Содержание

Введение

Об этой книге

Данная книга посвящена математическим основам теории риска. Перед тем как говорить о математических моделях рисковых ситуаций и методах их изучения, мы, конечно же, должны определить, что мы подразумеваем под словом "риск". Можно было бы построить изложение так, чтобы избегать более или менее строгих определений этого понятия, надеясь на интуитивное его восприятие читателем. Однако, коль скоро данная книга – математическая, придерживаться такой "страусиной" политики мы не можем. Несмотря на то, что разные уважаемые источники (от "Толкового словаря русского языка" В. И. Даля до энциклопедии "Вероятность и математическая статистика" под редакцией академика Ю. В. Прохорова) по-разному трактуют это понятие, мы сначала дадим только одно (правда, не очень строгое и потому не вполне математическое) определение, которое, однако, затем снабдим более четкой теоретико-вероятностной формализацией.

"Усредняя" определения риска из всех просмотренных нами источников, включая упомянутые выше, мы приходим к следующему.

Риском мы будем называть совокупность значения возможного ущерба в некоторой стохастической ситуации и его вероятности.

Такое определение вполне согласуется с интуицией. Единственно, что может вызвать опасения – так это явно негативный оттенок слова *ущерб*, в то время как, например, у В. И. Даля совершенно обоснованно одними из синонимов *риска* объявляются слова *удача, отвага* с явно положительным оттенком. Эти опасения мы снимем, формально допуская, что *ущерб* может быть отрицательным (в таком случае он превращается в *приход, доход*).

Попробуем теперь дать более формальную вероятностную конкретизацию приведенного выше определения. Величина возможного ущерба в стохастической ситуации, очевидно, до осуществления этой ситуации неизвестна и потому случайна. Таким образом, теоретико-вероятностным аналогом понятия *ущерба*, очевидно, является понятие *случайной величины*. Совокупность же значений случайной величины и их вероятностей в теории вероятностей задается *распределением* случайной величины. Таким образом, под *риском* хотелось бы понимать *случайную величину*. Однако, если риски отождествляются со случайными величинами, заданными на *разных* вероятностных пространствах, задача сравнения таких рисков оказывается принципиально неразрешимой и даже бессмысленной, так как соответствующие им случайные величины как функции элементарных исходов зависят от аргументов, имеющих разный смысл. Поэтому в подобных ситуациях приходится отождествлять риски с *функциями распределения*.

Итак, под математической теорией риска формально следует понимать совокупность моделей и методов теории вероятностей, применяемых к анализу случайных величин и их распределений. Такая интерпретация довольно широка и сводится к тому, что так интерпретируемая теория риска должна быть отождествлена с дисциплиной, за которой закреплено название “прикладная теория вероятностей” и которая включает в себя, в частности, такую важную и богатую результатами область как теория надежности.

Написание обстоятельного учебника по прикладной теории вероятностей с учетом *всех* возможных областей приложения ее моделей и методов представляет собой титаническую и практически невыполнимую задачу. Поэтому при выборе материала для данной книги как учебника по соответствующим курсам, читаемым сейчас в университетах, мы в значительной степени руководствовались традицией и ограничились теми разделами, которые *традиционно* относятся к теории риска, тем более что наряду с широким толкованием термина “теория риска” во многих источниках под теорией риска понимается довольно узкая область актуарной (или страховой) математики.

Как известно, в основе всех актуарных задач лежит неоспоримое присутствие случайности. Слияние методов из различных теорий (и прежде всего из различных разделов теории вероятностей) привело к созданию полнокровной ветви науки, называемой актуарной (страховой) математикой. К методическому ядру этой науки относится теория страхового риска, с вероятностной точки зрения рассматривающая вопросы функционирования страховых компаний. В данной книге наряду с другими разделами излагаются основы математической теории такого вида страхования, которое принято называть *ри́сковым*. Этот термин не совсем удачен – ведь любое страхование представляет собой не что иное как один из механизмов противодействия риску и потому “ри́сковое страхование” – это в определенном смысле тавтология. Этот термин, правда, лучше, чем “страхование не-жизни”, представляющее собой буквальный перевод английского аналога “non-life insurance”, который является антонимом термина “life insurance”, использующегося для обозначения страхования жизни. Сходный термин “рисковые виды страхования” используется в некоторых документах российского органа страхового надзора, в частности, в “Методике расчета тарифных ставок по рисковым видам страхования” (Методика, 1993), (Методика, 1994). Кроме того, в российской страховой литературе для перевода термина “non-life insurance” иногда используется еще более громозкое понятие – “виды страхования, отличные от страхования жизни”. Отметим, что наиболее яркой отличительной чертой “рискового страхования” от страхования жизни является то, что при страховании жизни величина страхового тарифа традиционно полагается равной средней величине относительных выплат, а в “рисковых видах страхования” страховой тариф включает, кроме того, надбавку (нагрузку безопасности), предназначенную для достижения приемлемого для страховщика значения вероятности неразорения (безубыточности страховой деятельности). Именно такова структура тарифов в большинстве рассматриваемых в данной книге моделей. Таким образом, в данной книге значительное место отведено математической теории именно страхования, отличного от страхования жизни, а выражаясь кратко, – рискового страхования.

Имея также в виду расширительное понимание теории риска, мы включили в книгу и некоторые дополнительные разделы, в частности, связанные с аналитическими методами теории риска, основанными на смешанных гауссовских моделях. Эти методы обосновывают целесообразность использования распределений с тяжелыми хвостами при анализе некоторых рисковых ситуаций и позволяют избегать возможной недооценки риска существенных потерь во многих конкретных случаях.

Базой для данной книги явились учебные пособия (Бенинг и Королев, 2000а), (Бенинг и Королев, 2000б) и (Бенинг, Королев и Шоргин, 2001), материал которых подвергся существенной переработке и дополнен многими новыми разделами. При выборе материала для книги основное внимание было уделено тем разделам теории риска и страховой математики, которые традиционно включаются в наиболее популярные учебники и руководства по этим и родственным дисциплинам. При этом, однако, авторы конечно же отдают себе отчет в том, что на окончательный выбор материала оказали существенное влияние их собственные научные пристрастия.

Наряду с хорошо известными классическими результатами (некоторые из них снабжены новыми доказательствами, по мнению авторов, более удобными с методической точки зрения) в книге изложены некоторые новейшие результаты в области теории риска (например, относящиеся к оценкам точности нормальной аппроксимации для распределений сумм независимых случайных величин, исследованию асимптотики распределения суммарного страхового требования, факторизационной модели индивидуального страхового иска, аппроксимации вероятности разорения при малой нагрузке безопасности, обобщенным процессам риска, статистическому оцениванию вероятности разорения, классическим процессам риска со случайными премиями как моделям процессов спекуляции, стоимостному подходу к оптимизации основных параметров страховой деятельности, аналитическим методам теории риска, основанным на смешанных гауссовских моделях). Почти все новые результаты, включенные в книгу, получены авторами.

Хотя в качестве примеров применения описываемых в данной книге результатов и методов используются разнообразные задачи из области рисковых видов страхования, по своей сути являющихся механизмами *экономической* стабилизации, книга имеет явно выраженный *математический* характер, и для освоения содержащегося в ней материала в полном объеме, от читателя требуется довольно серьезная изначальная математическая подготовка.

Данный учебник предназначен для студентов и аспирантов математических и экономико-математических специальностей и специализаций вузов (математика, прикладная математика, финансовая математика, актуарная математика, страховое дело). Изложение построено таким образом, чтобы книга также могла использоваться в качестве справочника актуариями и специалистами-аналитиками, работающими в страховых и финансовых компаниях, чья деятельность связана с оцениванием риска и анализом разнообразных рисковых ситуаций. Не будет она бесполезной и тем студентам и аспирантам, которые специализируются в области теории надежности, а также специалистам, которые уже работают в этой области.

От читателя требуется хорошее знание базового курса теории вероятностей. Однако мы старались избегать слишком “продвинутых” в математическом отношении формулировок и доказательств, чтобы круг возможных читателей включал и нематематиков-специалистов как в области страхования, так и в других областях, связанных с изучением и разработкой методов противодействия рискам разнообразных неблагоприятных событий (аварий, катастроф и пр.), желающих глубже ознакомиться с математическими аспектами моделирования и прогнозирования рисков. Для удобства читателей в список литературы включены не только непосредственные источники приводимых результатов, на которые имеются ссылки в тексте, но также и другие статьи и книги, которые, по мнению авторов, могут оказаться полезными читателям, которые пожелают продолжить изучение математической теории страхования и теории риска.

Данный учебник содержит материал, который в течение последних лет авторы читали и читают студентам факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в рамках курсов "вероятностные модели" и "прикладные задачи теории вероятностей", студентам факультета математических методов в экономике Российской экономической академии им. Г. В. Плеханова в рамках курсов "теория риска" и "актуарная математика", а также студентам отделения прикладной математики Вологодского государственного педагогического университета в рамках курсов "теория риска - I" и "теория риска - II". Эта книга может служить основой еще для нескольких курсов, например, "математические основы актуарной математики" (главы 1, 2); "теория страхового риска" (главы 3 – 11); "большие риски в теории надежности" (главы 1, 2, 3, 12).

Главная доля ответственности за недочеты, имеющиеся в книге, ложится на В. Ю. Королева, поскольку им выполнена основная часть работы, связанной с подбором материала и подготовкой текста. Однако работа над книгой проходила в тесном контакте между всеми авторами, так что ответственность за, возможно, имеющиеся некоторые достоинства книги все авторы делят поровну.

Авторы признательны академику Ю. В. Прохорову и профессору, доктору экономических наук В. И. Рябикину, поддержавшим идею написания данной книги, рецензентам книги профессору кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова доктору физико-математических наук Е. В. Булинской и декану факультета математических методов в экономике Российской экономической академии им. Г. В. Плеханова доктору экономических наук профессору Н. П. Тихомирову за замечания и советы, которые, несомненно, способствовали улучшению изложения.

Работа над книгой поддерживалась грантами Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 04-01-00671, 05-01-00396 и 05-01-00535.

Обозначения

В книге используется стандартная система нумерации формул и утверждений (определений, теорем, лемм, следствий, примеров и замечаний). Каждое из упомянутых утверждений снабжено тройным индексом: первое число – номер главы, второе – номер раздела и третье число – непосредственный номер утверждения в этом разделе. Аналогичная нумерация применена и к формулам. Например, ссылка на формулу (4.1.1) означает ссылку на первую формулу первого раздела четвертой главы.

Мы также используем следующие специальные обозначения:

$\mathsf{P}(A)$	–	вероятность события A;
$\mathsf{E}X$	–	математическое ожидание случайной величины X;
$\mathsf{D}X$	–	дисперсия случайной величины X;
$\mathsf{Cov}(X, Y)$	–	ковариация случайных величин X и Y;
$\Longrightarrow$	–	слабая сходимость (сходимость по распределению);
$\xrightarrow{\mathsf{P}}$	–	сходимость по вероятности;
$\stackrel{d}{=}$	–	совпадение распределений;
$\square$	–	конец доказательства.

Глава 1

Основные понятия теории вероятностей

1.1 Стохастические ситуации и их математические модели

Развитие современной математической теории риска, основанной, в первую очередь, на результатах и методах теории вероятностей и математической статистики, имеет не только вполне естественное серьезное теоретическое значение, но и огромную практическую важность. Это обусловлено, в первую очередь, насущной необходимостью решать на практике большое число конкретных задач, связанных с анализом рисковых ситуаций, то есть определением как размера возможных потерь, так и самой возможности потерь критического, например, катастрофического уровня. Рисковые ситуации чрезвычайно разнообразны. Они могут возникать в самых разных областях человеческой деятельности и могут иметь самые разные последствия – от больших материальных потерь и человеческих жертв при недооценке риска пожаров, транспортных катастроф, землетрясений, ураганов, наводнений или других природных катаклизмов большой силы при проектировании зданий или защитных сооружений, до значительных материальных и финансовых потерь при недооценке риска резких колебаний экономических или финансовых показателей (курсов валют, цен акций и др.).

Окружающая нас действительность постоянно порождает неопределенные, рисковые, ситуации, исходы которых невозможно заранее предсказать с исчерпывающей точностью. Иногда это связано просто с недостатком информации. В таких случаях получение дополнительной информации может существенно уменьшить неопределенность и даже совсем ее устранить. Однако иногда неопределенность принципиально нельзя устранить совсем, например, в лотереях или биржевых играх. Но даже в тех ситуациях, в которых неопределенность принципиально не устранима полностью, ее часто можно существенно уменьшить за счет лучшего понимания, уточнения самих механизмов проявления неопределенности. В частности, для этих целей можно использовать математические методы.

Математика предоставляет средства описания окружающей действительности, которые являются универсальными в том смысле, что они с одинаковым успехом могут быть использованы в самых разных областях – от физики, техники, биологии и медицины до страхования, финансов и юриспруденции. К разделам математики, изучающим механизмы проявления принципиально неустранимой неопределенности, можно отнести и теорию вероятностей.

Теория вероятностей изучает свойства математических моделей случайных явлений или процессов. Под *случайностью* мы будем понимать принципиально неустранимую неопределенность. С помощью понятий и утверждений теории вероятностей можно описать сами механизмы проявления неопределенности, выявить закономерности в проявлениях случайности.

Любая математическая теория устроена следующим образом. Фундаментом каждой такой теории является набор аксиом, то есть не противоречащих друг другу утверждений или принципов, заведомо считающихся верными и принимаемых без доказательств. Из этих аксиом с помощью логических переходов конструируются понятия и утверждения соответствующей теории. Разные наборы аксиом ведут к разным математическим теориям, которые могут описывать одни и те же процессы и явления. При этом практическая полезность или эффективность той или иной математической теории определяется удобством ее применения и ее адекватностью, то есть степенью согласованности получаемых с ее помощью выводов со свойствами описываемой ею реальности, наблюдаемыми на практике.

Имеется довольно много математических теорий, описывающих свойства тех или иных математических моделей случайных явлений или процессов. В каждой из этих теорий так или иначе присутствует понятие вероятности как числового выражения меры возможности осуществления того или иного события, связанного с неопределенной ситуацией. Другими словами, имеется несколько теорий вероятностей. В данной книге мы будем иметь дело с теорией вероятностей, основанной на системе аксиом, которая была предложена в 20-х – 30-х годах XX столетия великим русским математиком Андреем Николаевичем Колмогоровым[1] Как правило, именно эта теория и называется собственно теорией вероятностей. За другими теориями вероятностей закреплены особые названия, например, теория субъективных вероятностей, интервальная теория вероятностей и т. п.

В данной главе мы приводим те сведения из теории вероятностей, которые будут существенно использоваться в дальнейшем. Мы опускаем доказательства теорем. В случае необходимости их можно найти в книгах (Крамер, 1975), (Ширяев, 1989), (Феллер, 1984). Читатель, хорошо знакомый с теорией вероятностей, может пропустить эту главу и возвращаться к ней за справками лишь по мере необходимости.

Пусть Ω – непустое множество, элементы которого будут обозначаться ω. Мы будем отождествлять элементы ω с возможными элементарными, то есть неделимыми исходами некоторой стохастической ситуации. В связи с этим множество Ω будет называться *множеством элементарных исходов.*

Пусть $\mathcal{U}$ – множество подмножеств множества Ω элементарных исходов, обладающее свойствами

- $\Omega \in \mathcal{U}$;
- если $B \in \mathcal{U}$, то $B^c \in \mathcal{U}$;
- если $B_i \in \mathcal{U}$, $i = 1, 2, \ldots$, то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{U}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{U}.$$

Множество $\mathcal{U}$ называется *σ-алгеброй событий*, а его элементы (являющиеся подмножествами множества Ω) называются *событиями.*

Множество Ω вместе с σ-алгеброй его подмножеств образуют *измеримое пространство* $(\Omega, \mathcal{U})$.

Мера, то есть σ-аддитивная функция множеств, P, определенная на $\mathcal{U}$ и нормированная условием $\mathsf{P}(\Omega) = 1$, называется *вероятностной мерой* или *вероятностью.* Напомним, что свойство σ-аддитивности, также называемое счетной аддитивностью, заключается в следующем:

[1] [1] А. Н. Колмогоров. Общая теория меры и исчисление вероятностей. *Труды Коммунистической академии. Раздел математики.* 1929, т. 1, с. 8-21; также см. А. Н. Колмогоров. *Теория вероятностей и математическая статистика.* "Наука", Москва, 1986, с. 48-58. [2] A. Kolmogoroff. *Grundbegriffe der Wahrsgheinlichkeitsrechnung.* Berlin, Springer, 1933; также см. А. Н. Колмогоров. *Основные понятия теории вероятностей.* ОНТИ, Москва–Ленинград, 1936; 2-е издание: "Наука", Москва, 1974; 3-е издание: "Фазис", Москва, 1998.

если $A_1, A_2, \ldots$ – события ($A_i \in \mathcal{U}$), причем $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i).$$

Для $B \in \mathcal{U}$ значение $\mathsf{P}(B)$ называется *вероятностью события* B. Тройка $(\Omega, \mathcal{U}, \mathsf{P})$ называется *вероятностным пространством* или *вероятностной моделью.*

Этот курс предназначен для математиков-прикладников, для которых вопрос адекватности тех или иных математических моделей реальных ситуаций представляет особую важность. Сейчас мы опишем те свойства, которые должны быть присущи реальной неопределенной ситуации, чтобы ее можно было успешно математически описать на языке теории вероятностей. Другими словами, мы выделим те неопределенные ситуации, описание которых с помощью теории вероятностей ведет к адекватным выводам.

Итак, назовем *стохастической* такую ситуацию, которая характеризуется следующими свойствами или условиями:

- **непредсказуемость:** исход ситуации невозможно заранее предсказать с абсолютной точностью;
- **воспроизводимость:** имеется по крайней мере теоретическая возможность воспроизвести рассматриваемую ситуацию как угодно много раз в остающихся неизменными условиях;
- **устойчивость частот:** каким бы ни было интересующее нас событие, связанное с рассматриваемой ситуацией, при многократном воспроизведении этой ситуации частота события (то есть отношение количества случаев, в которых наблюдалось рассматриваемое событие, к общему числу воспроизведений ситуации) колеблется возле некоторого числа, приближаясь к нему все ближе и ближе по мере увеличения числа воспроизведений ситуации.

Поясним сказанное. Свойство непредсказуемости довольно очевидно. Если исход ситуации прогнозируем однозначно, то вообще нет никакой необходимости в привлечении аппарата теории вероятностей.

Свойство воспроизводимости ситуации является ключевым для того, чтобы быть уверенным в успехе применения аппарата теории вероятностей к ее описанию. Именно это свойство имеют в виду, когда говорят, что теория вероятностей и математическая статистика направлены на изучение *массовых* явлений. В связи с условием воспроизводимости следует весьма осторожно относиться к попыткам применения теории вероятностей к анализу *уникальных* явлений или систем. Например, известны многочисленные попытки дать количественный ответ на вопрос о том, какова вероятность существования во Вселенной других планет, населенных разумными существами. Однако пока нет достаточных оснований считать, что наличие других планет и, тем более, существование на них разумной жизни является массовым явлением. Поэтому существующие прогнозы весьма разноречивы и потому неадекватны.

Наконец, свойство устойчивости частот позволяет связать математическое определение вероятности события с интуитивным представлением о ней как о понимаемом в определенном смысле пределе частоты осуществления события при неограниченном воспроизведении соответствующей ситуации.

События A и B, связанные с некоторой вероятностной моделью $(\Omega, \mathcal{U}, \mathsf{P})$, называются *независимыми*, если вероятность их одновременного осуществления равна произведению вероятностей каждого из них:

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B).$$

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в вероятностной модели $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ $(n \geq 2)$ называются *независимыми в совокупности*, если для любого $k \leq n$ и любых индексов $i_1, \ldots, i_k$ $(i_p \neq i_q$ при $p \neq q$ и $1 \leq i_p \leq n$, $p = 1, \ldots, k)$

$$\mathsf{P}\Bigl(\bigcap_{p=1}^{k} A_{i_p}\Bigr) = \prod_{p=1}^{k} \mathsf{P}(A_{i_p}).$$

Пусть A и B – события, причем $\mathsf{P}(B) \neq 0$. *Условной вероятностью* A при условии B называется величина

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Если события A и B независимы, то из определения условной вероятности следует, что $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A)$.

Из определения условной вероятности также вытекает формула

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(B) \cdot \mathsf{P}(A|B).$$

Эту формулу иногда называют *законом умножения вероятностей.*

В некоторой вероятностной модели $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ рассмотрим события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$, которые обладают следующими свойствами:

a) события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны, то есть никакие два из них не могут произойти одновременно;

b) одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обязательно произойдет, то есть $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$, причем $\mathsf{P}(A_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обладают свойствами *a*) и *b*), то говорят, что они образуют *полную группу.*

Пусть B – некоторое событие, а события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу. В таком случае справедлива формула

$$\mathsf{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B|A_k)\mathsf{P}(A_k),$$

называемое *формулой полной вероятности.*

Пусть B – некоторое событие, имеющее положительную вероятность ($\mathsf{P}(B) > 0$), а события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу. В таком случае справедлива формула

$$\mathsf{P}(A_k|B) = \frac{\mathsf{P}(B|A_k)\mathsf{P}(A_k)}{\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B|A_k)\mathsf{P}(A_k)}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

называемая *формулой Байеса.* Формула Байеса позволяет уточнить представление о вероятности любого из событий, составляющих полную группу, с учетом информации об осуществлении некоторого события.

1.2 Случайные величины и их распределения

Любая вещественная функция $X = X(\omega)$, определенная на Ω, отображает множество элементарных исходов во множество вещественных чисел $\mathbb{R}$. Пусть A – произвольное множество вещественных чисел: $A \subseteq \mathbb{R}$. Определим множество

$$X^{-1}(A) = \{\omega : X(\omega) \in A\},$$

являющееся подмножеством множества Ω, называемое *прообразом множества* A (при преобразовании X).

Определим *борелевскую σ-алгебру* $\mathcal{B}$ подмножеств вещественной прямой $\mathbb{R}$ как наименьшую σ-алгебру, содержащую все интервалы. Любой элемент борелевской σ-алгебры называется *борелевским множеством.* Таким образом, любое борелевское множество можно построить из интервалов с помощью операций дополнения, счетного объединения или счетного пересечения.

Если $X^{-1}(A) \in \mathcal{U}$ для любого борелевского множества $A \in \mathcal{B}$, то функция $X(\omega)$ называется *измеримой.* Конечная вещественная измеримая функция называется *случайной величиной.* Простейшим примером нетривиальной случайной величины является индикатор $\mathbf{1}_B(\omega)$

множества $B \in \mathcal{U}$,

$$\mathbf{1}_B(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in B, \\ 0, & \text{если } \omega \notin B. \end{cases}$$

Рассмотрим события $B_1, B_2, \ldots$ такие, что $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup_i B_i = \Omega$. Пусть $\{x_1, x_2, \ldots\}$ – вещественные числа. Случайная величина

$$X(\omega) = \sum_j x_j \mathbf{1}_{B_j}(\omega)$$

называется *дискретной*. Заметим, что свойства событий B_j гарантируют, что для каждого ω в последней сумме один и только один индикатор отличен от нуля. При этом $B_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}$.

Обозначим

$$p_i = \mathsf{P}(B_i) \quad (= \mathsf{P}(\{\omega : X(\omega) = x_i\}).$$

Набор $\{(x_i, p_i)\}_{i \geq 1}$ называется *распределением вероятностей* или просто *распределением* дискретной случайной величины X. В дальнейшем для краткости вместо $\mathsf{P}(\{\omega : \ X \in A\})$ мы будем писать $\mathsf{P}(X \in A)$. Распределение дискретной случайной величины X полностью определяет вероятности попадания случайной величины X в любое борелевское множество: если $A \in \mathcal{B}$, то

$$\mathsf{P}(X \in A) = \sum_{i : x_i \in A} p_i.$$

заметим, что требование измеримости случайной величины как функции элементарного исхода гарантирует возможность рассмотрения множеств вида $\{\omega : X(\omega) \in A\}$ в качестве событий, какими бы ни были борелевские множества A, и, следовательно, определены вероятности попадания случайной величины в любые борелевские множества. Таким образом, мы можем рассмотреть вероятностную меру P_X, определенную на σ-алгебре $\mathcal{B}$ с помощью соотношения

$$\mathsf{P}_X(A) = \mathsf{P}(\{\omega : X(\omega) \in A\}), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Эта вероятностная мера называется *распределением* случайной величины X. Итак, любая случайная величина X порождает новое вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathsf{P}_X)$.

Пусть X – случайная величина. Рассмотрим вероятность $\mathsf{P}(X \in A)$ в том случае, когда множество A является бесконечным интервалом вида $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}$. В таком случае положим

$$F_X(x) \equiv F(x) = \mathsf{P}(X < x).$$

Функция $F(x)$ определена для каждого вещественного x и называется *функцией распределения* случайной величины X. Если X – дискретная случайная величина, для которой $\mathsf{P}(X = x_i) = p_i$, то

$$F_X(x) = \sum_{i: x_i < x} p_i. \tag{1.2.1}$$

Функция распределения вида (1.2.1) называется *дискретной*.

Функция распределения $F(x)$ любой случайной величины обладает следующими свойствами:

- $F(x)$ не убывает и непрерывна слева;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Обратное утверждение также верно: для любой функции $F(x)$, удовлетворяющей этим трем условиям, существуют вероятностное пространство и заданная на нем случайная величина такая, что $F(x)$ является ее функцией распределения.

Каждой случайной величине соответствует одна и только одна функция распределения. Обратное неверно. Например, на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{U}, \mathsf{P})$, в котором $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{U}$ – совокупность всех борелевских подмножеств интервала $[0, 1]$, а P – мера, каждому интервалу приписывающая его длину, случайные величины $X(\omega) \equiv \omega$ и $X(\omega) \equiv 1 - \omega$ имеют одну и ту же функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Число x называется *точкой роста* функции распределения $F(x)$, если $F(x + \delta) - F(x - \delta) > 0$ для любого $\delta > 0$.

Среди всех мер, заданных на $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, особую роль играет *мера Лебега*, которая каждому интервалу (a, b) приписывает его длину (очевидно, равную $b - a$), так что любое одноточечное множество имеет нулевую меру Лебега, что вполне естественно для непрерывных моделей. Кстати, практически ни в одном учебнике по теории вероятностей не обсуждается один важный вопрос, а именно, вопрос о том, почему для того, чтобы определить вероятностную модель (вероятностное пространство), непременно нужно рассматривать специальную σ-алгебру событий. Казалось бы, было бы намного проще, если бы в качестве совокупности событий *всегда* рассматривалось множество всех подмножеств множества Ω (или $\mathbb{R}$, если вероятностная мера задается на подмножествах вещественной прямой). Однако, вообще говоря, такой подход оказывается невозможным. Еще в 1930 выдающийся польский математик С. М. Улам доказал теорему, устанавливающую, что конечная мера, заданная на множестве всех подмножеств некоторого множества мощности континуума и приписывающая нулевую меру каждому множеству, содержащему ровно один элемент (одну точку), обязана приписывать нулевую меру любым другим множествам, то есть является тривиальной (краткое доказательство теоремы Улама приведено, например, в книге (Окстоби, 1971), глава 5).

Пусть μ – мера, заданная на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Распределение P_X называется *абсолютно непрерывным относительно* μ, если существует неотрицательная функция $p(x)$ такая, что

$$\mathsf{P}_X(A) = \int\limits_A p(y)\mu(dy) \tag{1.2.2}$$

для любого $A \in \mathcal{B}$ (здесь интеграл понимается в смысле Лебега). При этом функция $p(x)$ называется *плотностью распределения* или *плотностью вероятностей* или просто *плотностью* случайной величины X. Дискретное распределение $\{(x_i, p_i)\}_{i\geq 1}$ не является абсолютно непрерывным относительно меры Лебега, но является абсолютно непрерывным относительно *считающей меры*, которая каждому множеству $A \in \mathcal{B}$ приписывает число, равное количеству тех точек $\{x_i\}$, которые попадают в A. Более того, в последнем случае

$$p(x) = \mathsf{P}(X = x) = \begin{cases} p_i, & x = x_i, \\ 0, & x \neq x_i \text{ для любого } \ i. \end{cases}$$

Распределение, абсолютно непрерывное относительно меры Лебега, мы будем ниже называть просто *абсолютно непрерывным*. Можно показать, что распределение случайной величины X абсолютно непрерывно, если $\mathsf{P}(X \in A) = 0$ для любого множества $A \in \mathcal{B}$ нулевой меры Лебега. Для абсолютно непрерывного распределения $p(x) = F'(x)$. Случайная величина, распределение которой абсолютно непрерывно, и соответствующая функция распределения также называются абсолютно непрерывными.

Дискретные и абсолютно непрерывные распределения не исчерпывают все возможные виды распределений. Существуют также функции распределения, множество точек роста которых имеет лебегову меру нуль. Такие функции распределения и соответствующие им случайные величины и распределения вероятностей называются *сингулярными*. Сингулярные распределения представляют собой довольно экзотические объекты и практически не используются в прикладной теории вероятностей, теории риска или актуарной математике.

Приведем несколько общих свойств функций распределения, доказательство которых можно найти в стандартных курсах теории вероятностей или теории функций вещественной переменной.

Теорема 1.2.1. *Для любого $\delta > 0$ функция распределения $F(x)$ имеет не более чем счетное число точек скачков, в которых скачок превышает δ, и, следовательно, не более чем счетное число точек разрыва. Производная $F'(x)$ функции распределения $F(x)$ существует почти во всех точках x.*

Теорема 1.2.2. *Любая функция распределения $F(x)$ может быть однозначно представлена в виде взвешенной суммы двух компонент:*

$$F(x) = a_1\widehat{F}_1(x) + a_2F_2(x),$$

где a_1, a_2 – неотрицательные числа, сумма которых равна единице, $\widehat{F}_1(x)$ – непрерывная функция распределения, $F_2(x)$ – дискретная функция распределения, в точке x равная сумме всех скачков функции $F(x)$ в точках разрыва, не превосходящих x.

Теорема 1.2.3. *Любая функция распределения $F(x)$ может быть однозначно представлена в виде взвешенной суммы трех компонент:*

$$F(x) = a_1F_1(x) + a_2F_2(x) + a_3F_3(x),$$

где a_1, a_2, a_3 – неотрицательные числа, сумма которых равна единице, $F_1(x)$ – абсолютно непрерывная функция распределения, $F_2(x)$ – дискретная функция распределения, в точке x равная сумме всех скачков функции $F(x)$ в точках разрыва, не превосходящих x, $F_3(x)$ – сингулярная функция распределения.

Если X – дискретная случайная величина и $\mathsf{P}(X = x) > 0$, то x называется *возможным значением* случайной величины X. Случайная величина X имеет *решетчатое распределение*, если все ее возможные значения имеют вид $\{b + nh,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$, где b и $h > 0$ – фиксированные числа. Для решетчатого распределения максимальное из чисел h называется *шагом распределения*.

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называются *независимыми в совокупности*, если для любых борелевских множеств $B_1, B_2, \ldots, B_n$ события $\{\omega : X_1(\omega) \in B_1\}, \{\omega : X_2(\omega) \in B_2\}, \ldots, \{\omega : X_n(\omega) \in B_n\}$ независимы в совокупности. Говорят, что случайные величины $\{X_j\}_{j\geq1}$ образуют *последовательность независимых случайных величин*, если для любого $n \geq 1$ случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы в совокупности.

Если $X_1 = X_1(\omega), \ldots, X_n = X_n(\omega)$ – случайные величины, определённые на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{U}, \mathsf{P})$, то вектор $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ называется случайным вектором, или n-мерной случайной величиной. Областью значений случайного вектора $\mathbf{X}$ является n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}_n$ подмножеств $\mathbb{R}^n$ называется минимальная σ-алгебра, содержащая все n-мерные параллелепипеды. Элементы боревской σ-алгебры, как и ранее, будем называть борелевскими множествами. Для каждого борелевского множества B пространства $\mathbb{R}^n$ определена вероятность $\mathsf{P}(\mathbf{X} \in B)$. Набор $\{\mathsf{P}(\mathbf{X} \in B) : B \in \mathcal{B}_n\}$ называется *распределением случайного вектора* $\mathbf{X}$. В частности, для любых действительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ определена функция

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{P}(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n),$$

которая называется *функцией распределения случайного вектора* $\mathbf{X}$.

Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы тогда и только тогда, когда

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_k(x_k)$$

для любых действительных $x_1, \ldots, x_n$. Здесь

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{P}(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n) \quad \text{и} \quad F_k(x) = \mathsf{P}(X_k < x).$$

Для любой последовательности функций распределения $F_1(x)$, $F_2(x), \ldots$ существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{U}, \mathsf{P})$ и определённая на нем последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ такая, что для любого n функция распределения случайной величины X_n есть $F_n(x)$.

Рассмотрим некоторые специальные распределения, которые мы часто будем использовать в дальнейшем.

Вырожденное распределение. Случайная величина X имеет распределение, вырожденное в точке $a \in \mathbb{R}$, если

$$\mathsf{P}(X = a) = 1. \tag{1.2.3}$$

В этом случае

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Биномиальное распределение. Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p) $(0 < p < 1,\ n \geq 1)$, если

$$\mathsf{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.2.4}$$

Биномиально распределенная случайная величина описывает число успехов в n испытаниях Бернулли (независимых испытаний с двумя исходами – "успехом" и "неудачей"), в которых вероятность успеха в отдельном испытании равна p (и, соответственно, вероятность неудачи в отдельном испытании равна $1 - p$).

Распределение Пуассона. Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если

$$\mathsf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{1.2.5}$$

Распределение Пуассона является хорошей аппроксимацией для биномиального распределения при большом n и малом p. Более подробно об этом см. раздел 1.7.

Отрицательное биномиальное распределение (распределение Паскаля). Случайная величина X имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами n и p $(n > 0,\ 0 < p < 1)$, если

$$\mathsf{P}(X = k) = C_{n+k-1}^k p^n (1-p)^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

(для нецелых n величина C_{n+k-1}^n определяется как

$$C_{n+k-1}^k \ = \ \frac{\Gamma(n+k)}{k! \cdot \Gamma(n)},$$

где $\Gamma(r)$ – эйлерова гамма-функция,

$$\Gamma(r) = \int\limits_0^\infty e^{-y} y^{r-1} dy, \qquad r > 0).$$

Если n – целое, то случайная величина с отрицательным биномиальным распределением описывает число испытаний Бернулли, проведенных до достижения ровно n успехов.

Геометрическое распределение является частным случаем отрицательного биномиального распределения с $n = 1$.

Равномерное распределение на интервале $[a, b]$ определяется плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Нормальное (гауссово) распределение. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами (μ, σ^2), $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$, если ее плотность имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{1.2.6}$$

Нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$ называется *стандартным.* Везде в дальнейшем стандартная нормальная функция распределения и ее плотность будут обозначаться соответственно $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$. Таким образом,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt. \tag{1.2.7}$$

Легко видеть, что если случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами (μ, σ^2), то

$$\mathsf{P}(X < x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Гамма-распределение. Случайная величина X имеет гамма-распределение с параметром формы $\alpha > 0$ и параметром масштаба $\lambda > 0$, если ее плотность имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Здесь $\Gamma(\alpha)$ – эйлерова гамма-функция. Гамма-распределение является непрерывным аналогом отрицательного биномиального распределения.

Экспоненциальное (показательное) распределение является специальным случаем гамма-распределения с $\alpha = 1$. Экспоненциальное распределение является непрерывным аналогом геометрического распределения.

Распределение Парето. Случайная величина X имеет распределение Парето, если ее плотность имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{(ax-b)^\alpha}{(cx-d)^\beta}, & x \geq h, \\ 0, & x < h \end{cases}$$

с некоторыми $b \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $c > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $\gamma \geq 0$, $h > c/d$.

Распределение Коши с параметром положения (сдвига) $a \in \mathbb{R}$ и параметром масштаба $\lambda > 0$ определяется плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-a)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Распределение Лапласа (двойное показательное распределение). Случайная величина X имеет распределение Лапласа с параметром положения (сдвига) $a \in \mathbb{R}$ и параметром масштаба $\lambda > 0$, если ее плотность имеет вид

$$p(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-a|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.3 Моменты случайных величин. Основные неравенства.

Для случайных величин $X(\omega)$, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{U}, \mathsf{P})$, понятие интеграла Лебега вводится по стандартной схеме, детальное изложение которой приведено, например, в книге (Ширяев, 1989). Вкратце напомним основные шаги построения интеграла Лебега.

Пусть сначала $X(\omega)$ – дискретная неотрицательная случайная величина, принимающая конечное число значений $x_1, \ldots, x_n$. Такая случайная величина называется *простой*. Для простой случайной величины интеграл Лебега $\int_\Omega X d\mathsf{P}$ по определению полагается равным

$$\int\limits_\Omega X d\mathsf{P} = \sum_{j=1}^n x_j \mathsf{P}(\{\omega : X(\omega) = x_j\}).$$

Для произвольной неотрицательной случайной величины $X(\omega)$ существует монотонно неубывающая последовательность простых случайных величин $X_n(\omega)$, сходящаяся поточечно к $X(\omega)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно положить

$$X_n(\omega) = \sum_{i=1}^{2^{2^n}} \frac{i-1}{2^n} \mathbf{1}_{\left\{\omega:\, \frac{i-1}{2^n} \le X(\omega) < \frac{i}{2^n}\right\}}(\omega).$$

Интегал Лебега произвольной неотрицательной случайной величины $X(\omega)$ определяется как предел последовательности интегралов Лебега простых случайных величин, сходящихся поточечно к $X(\omega)$:

$$\int\limits_\Omega X d\mathsf{P} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^{2^n}} \frac{i-1}{2^n} \mathsf{P}\Big(\Big\{\omega : \frac{i-1}{2^n} \le X(\omega) < \frac{i}{2^n}\Big\}\Big).$$

Этот предел может быть либо конечным, либо бесконечным. В последнем случае говорят, что интеграл *расходится*.

Наконец, для произвольной случайной величины $X(\omega)$ введем случайные величины

$$X^+(\omega) = \max\{X(\omega), 0\}, \quad X^-(\omega) = -\min\{X(\omega), 0\}.$$

Очевидно, что случайные величины $X^+(\omega)$ и $X^-(\omega)$ неотрицательны, причем

$$X(\omega) = X^+(\omega) - X^-(\omega).$$

С помощью этих величин интеграл Лебега произвольной случайной величины $X(\omega)$ определяется как

$$\int\limits_{\Omega} X d\mathsf{P} = \int\limits_{\Omega} X^+ d\mathsf{P} - \int\limits_{\Omega} X^- d\mathsf{P}.$$

Так как $|X(\omega)| = X^+(\omega) + X^-(\omega)$, то интеграл $\int_{\Omega} X d\mathsf{P}$ существует и конечен тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{\Omega} |X| d\mathsf{P} < \infty.$$

Договоримся считать, что, если ровно один из интегралов $I^+ = \int_{\Omega} X^+ d\mathsf{P}$ и $I^- = \int_{\Omega} X^- d\mathsf{P}$ расходится, то интеграл $\int_{\Omega} X d\mathsf{P}$ существует и равен $+\infty$, если расходится I^+, и $-\infty$, если расходится I^-. Если же расходятся оба интеграла I^+ и I^-, то будем говорить, что интеграл $\int_{\Omega} X d\mathsf{P}$ не существует.

Математическим ожиданием $\mathsf{E}X$ случайной величины X по определению называется ее интеграл Лебега:

$$\mathsf{E}X = \int\limits_{\Omega} X d\mathsf{P}.$$

Более того, $\mathsf{E}X$ существует тогда и только тогда, когда существует $\mathsf{E}|X|$.

Справедливо равенство

$$\mathsf{E}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x),$$

в правой части которого стоит интеграл Стильтьеса. Если случайная величина X абсолютно непрерывна и имеет плотность $p(x)$, то

$$\mathsf{E}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx.$$

Если X – дискретная случайная величина с распределением $\{(x_i, p_i)\}_{i\geq 1}$, то
$$\mathsf{E}X = \sum_{i\geq 1} x_i p_i.$$

Пусть $h(x)$ – борелевская функция, то есть вещественная функция, определенная на $\mathbb{R}$ так, что для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : h(x) < c\}$ является борелевским. Тогда

$$\mathsf{E}h(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(x)dF(x).$$

Пусть X и Y – две случайные величины, α и β – числа. Тогда

$$\mathsf{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathsf{E}X + \beta \mathsf{E}Y,$$

если любые два из участвующих в этом равенстве математических ожиданий существуют.

Если случайные величины X и Y независимы, то

$$\mathsf{E}XY = \mathsf{E}X \cdot \mathsf{E}Y.$$

Математические ожидания случайных величин X^s и $|X|^s$ называются соответственно *моментом* и *абсолютным моментом* порядка s случайной величины X (или соответственно s-*м моментом* и *абсолютным моментом* случайной величины X):

$$\alpha_s = \mathsf{E}X^s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^s dF(x), \tag{1.3.1}$$

$$\beta_s = \mathsf{E}|X|^s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^s dF(x). \tag{1.3.2}$$

Если $F_X(x)$ – функция распределения случайной величины X, то

$$\mathsf{E}X = \int\limits_{0}^{\infty} (1 - F_X(x))dx + \int\limits_{-\infty}^{0} F_X(x)dx. \tag{1.3.3}$$

Более того, если $\mathsf{P}(X \geq 0) = 1$, то

$$\alpha_s = \mathsf{E}X^s = |s| \int\limits_{0}^{\infty} x^{s-1}(1 - F_X(x))dx \tag{1.3.4}$$

для любого действительного $s \neq 0$.

Центральный момент μ_s и *абсолютный центральный момент* ν_s порядка $s > 0$ случайной величины X определяются соответственно равенствами

$$\mu_s = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \alpha_1)^s dF(x), \tag{1.3.5}$$

$$\nu_s = \mathsf{E}|X - \mathsf{E}X|^s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x - \alpha_1|^s dF(x). \tag{1.3.6}$$

Особую роль играет второй центральный момент μ_2, который называется *дисперсией* случайной величины X и обозначается $\mathsf{D}X$:

$$\mathsf{D}X = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2 = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2.$$

Заметим, что, если конечно математическое ожидание $\mathsf{E}X$, то $\mathsf{D}X$ всегда существует, но может принимать значение $+\infty$.

Величина $\sigma = \sqrt{\mathsf{D}X}$ называется *среднеквадратическим уклонением* случайной величины X.

Отметим важное свойство дисперсии: $\mathsf{D}X = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{P}(X = \mathsf{E}X) = 1$, то есть тогда, когда случайная величина X постоянна с вероятностью единица. Если дисперсия конечна, то

$$\mathsf{D}(aX + b) = a^2 \mathsf{D}X, \quad a,\ b \in \mathbb{R}.$$

В частности, какой бы ни была случайная величина X, *стандартизованная* случайная величина

$$X^* = \frac{X - \mathsf{E}X}{\sqrt{\mathsf{D}X}} \tag{1.3.7}$$

всегда имеет нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию.

Если случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами (μ, σ^2), то

$$\mathsf{E}X = \mu, \quad \mathsf{D}X = \sigma^2.$$

Пусть X и Y – две случайные величины с конечными вторыми моментами. Величина

$$\mathsf{cov}(X, Y) = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)(Y - \mathsf{E}Y) = \mathsf{E}XY - \mathsf{E}X\mathsf{E}Y$$

называется *ковариацией* случайных величин X и Y. Величина

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathsf{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathsf{D}X\mathsf{D}X}}$$

называется *коэффициентом корреляции* случайных величин X и Y. Коэффициент корреляции характеризует тесноту *линейной* зависимости случайных величин X и Y, обладая следующими свойствами:

- $|\rho(X,Y)| \leq 1$;
- если случайные величины X и Y независимы, то $\rho(X,Y) = 0$;
- если $|\rho(X,Y)| = 1$, то существуют числа a и b такие, что $\mathsf{P}(X = aY + b) = 1$; при этом $\operatorname{sign} a = \operatorname{sign} \rho(X,Y)$.

Пусть X и Y – две случайные величины с конечными вторыми моментами. Если при этом $\mathsf{cov}(X,Y) = 0$, то случайные величины X и Y называются *некоррелированными*. Если случайные величины X и Y независимы, то они некоррелированы.

Справедлива формула

$$\mathsf{D}(X \pm Y) = \mathsf{D}X + \mathsf{D}Y \pm 2\mathsf{cov}(X,Y).$$

В частности, если случайные величины X и Y независимы, то

$$\mathsf{D}(X \pm Y) = \mathsf{D}X + \mathsf{D}Y.$$

Распределение P_X случайной величины X называется *унимодальным*, если существует значение $x = a$ такое, что при $x < a$ функция распределения $F_X(x)$ выпукла, а при $x > a$ – вогнута. При этом число a называется *модой* распределения. Если случайная величина X абсолютно непрерывна, то модами ее распределения называются точки максимума ее плотности $p_X(x)$.

Если X – дискретная случайная величина и $p_k = \mathsf{P}(X = x_k)$, то значения x_i, для которых

$$\mathsf{P}(X = x_i) = \max_k p_k,$$

называются модами ее распределения.

Пусть X – случайная величина и $q \in [0,1]$ – некоторое число. *Квантилью порядка* q случайной величины X (или q-квантилью случайной величины X) называется число $\ell_X(q)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\begin{cases} \mathsf{P}(X \leq \ell_X(q)) \geq q, \\ \mathsf{P}(X \geq \ell_X(q)) \geq 1 - q. \end{cases}$$

Если функция распределения $F_X(x)$ случайной величины X непрерывна, то

$$F_X(\ell_X(q)) = q.$$

Медианой $\mathrm{med}X$ случайной величины X называется ее квантиль порядка $\frac{1}{2}$. Для абсолютно непрерывной случайной величины X медиана удовлетворяет соотношению

$$\int_{-\infty}^{\mathrm{med}X} p_X(x)dx = \int_{\mathrm{med}X}^{\infty} p_X(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Математическое ожидание характеризует центр распределения случайной величины X в том смысле, что

$$\mathsf{E}(X-x)^2 \geq \mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)^2 = \mathsf{D}X$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. При этом дисперсия характеризует разброс распределения случайной величины X вокруг ее центра.

Медиана характеризует центр распределения случайной величины X в том смысле, что

$$\mathsf{E}|X-x| \geq \mathsf{E}|X-\mathrm{med}X| \tag{1.3.8}$$

для любого $x \in \mathbb{R}$.

Помимо дисперсии (и, соответственно, среднеквадратического уклонения), разброс распределения случайной величины X вокруг ее центра может характеризовать *интервартильный размах*, определяемый как разность между квантилями порядков $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}$.

Если случайная величина X имеет конечные моменты до третьего включительно, то величина

$$\kappa_3 = \mathsf{E}\Big(\frac{X-\mathsf{E}X}{\sqrt{\mathsf{D}X}}\Big)^3 = \frac{\mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)^3}{(\mathsf{D}X)^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

называется *коэффициентом асимметрии* ее распределения. Если $\kappa_3 < 0$, то левый хвост распределения тяжелее правого. Если же $\kappa_3 > 0$, то наоборот, правый хвост тяжелее.

Если случайная величина X имеет конечные моменты до четвертого включительно, то величина

$$\kappa_4 = \mathsf{E}\Big(\frac{X-\mathsf{E}X}{\sqrt{\mathsf{D}X}}\Big)^4 = \frac{\mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)^4}{(\mathsf{D}X)^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

называется *коэффициентом эксцесса* или *коэффициентом островершинности* ее распределения. Если X имеет плотность $p(x)$ и $\kappa_4 > 3$, то $p(x)$ имеет более острую вершину (и, соответственно, более тяжелые хвосты), нежели стандартная нормальная плотность $\varphi(x)$. Если же $\kappa_4 < 3$, то вершина плотности $p(x)$ более плоская, а хвосты более легкие, нежели у $\varphi(x)$.

Теорема 1.3.2. *Пусть $g(x)$ – неотрицательная борелевская функция такая, что $g(x) \geq M > 0$ для всех x из некоторого борелевского множества B. Тогда для любой случайной величины X справедливо неравенство*

$$\mathsf{P}(X \in B) \leq \frac{\mathsf{E}g(X)}{M}.$$

Доказательство этой теоремы немедленно вытекает из соотношений

$$\mathsf{E}g(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x) \geq M \int_B dF(x) = M\mathsf{P}_X(B).$$

В частности, если X – неотрицательная случайная величина, то, для любого положительного t полагая $g(x) = \min\{t, x\}$, мы получаем *неравенство Маркова*:

$$\mathsf{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathsf{E}\min\{t, X\}}{t} \leq \frac{\mathsf{E}X}{t}. \tag{1.3.9}$$

Полагая в теореме 1.2.3 $g(x) = (x - \mathsf{E}X)^2$, мы получаем *неравенство Чебышева*: для любого положительного t

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{E}X| \geq t) \leq \frac{\mathsf{D}X}{t^2}. \tag{1.3.10}$$

Далее, если для некоторого $\nu > 0$ мы положим $g(x) = |x|^\nu$, $M = t^\nu \beta_\nu$, $t > 0$, где β_ν – абсолютный момент случайной величины $|X|$ порядка ν (см. (1.3.2)), мы получаем неравенство

$$\mathsf{P}(|X| \geq t\beta_\nu^{1/\nu}) \leq \frac{1}{t^\nu}. \tag{1.3.11}$$

Наконец, для $g(x) = e^{tx}$, $t > 0$, $M = e^{ta}$ мы имеем

$$\mathsf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathsf{E}e^{tX}}{e^{ta}}. \tag{1.3.12}$$

Мы также будем в дальнейшем использовать *неравенство Ляпунова*: если X – неотрицательная случайная величина с $\mathsf{E}X^\alpha < \infty$ для некоторого $\alpha \geq 1$, то

$$\mathsf{E}X \leq (\mathsf{E}X^\alpha)^{1/\alpha}. \tag{1.3.13}$$

В частности, если случайная величина X необязательно неотрицательна и $\mathsf{E}X^2 < \infty$, то

$$\mathsf{E}|X - \mathsf{E}X| \leq \sqrt{\mathsf{D}X}. \tag{1.3.14}$$

Неравенства Ляпунова (1.3.13) и (1.3.14) можно рассматривать как частные случаи *неравенства Иенсена*: пусть $g(x)$ – выпуклая функция и X – случайная величина такая, что $\mathsf{E}|X| < \infty$. Тогда

$$\mathsf{E}g(X) \geq g(\mathsf{E}X).$$

Из неравенства Иенсена и соотношений (1.3.8) и (1.3.14), в частности, вытекает, что

$$|\mathsf{E}X - \mathrm{med}X| \leq \sqrt{\mathsf{D}X}.$$

Если случайная величина X имеет конечный момент α_k порядка k, то $\beta_m^{1/m} \leq \beta_k^{1/k}$ и $\nu_m^{1/m} \leq \nu_k^{1/k}$ для любого положительного $m \leq k$. Отсюда вытекает, что $\beta_m \beta_l \leq \beta_{m+l}$ и $\nu_m \nu_l \leq \nu_{m+l}$ для любых l и m.

1.4 Производящие и характеристические функции

При изучении целочисленных неотрицательных случайных величин оказывается полезными производящие функции, которые определяются следующим образом.

Пусть X – целочисленная неотрицательная случайная величина с распределением вероятностей

$$\mathsf{P}(X = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Производящей функцией случайной величины X (или последовательности $\{p_k,\ k = 0, 1, \ldots\}$) называется ряд

$$\psi_X(s) \equiv \psi(s) = \mathsf{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k, \quad |s| \leq 1. \tag{1.4.1}$$

Поскольку любой степенной ряд однозначно определяется своими коэффициентами, то связь между распределениями и соответствующими производящими функциями взаимно однозначна. Вырожденное распределение (1.2.3), биномиальное распределение (1.2.4) и распределение Пуассона (1.2.5) имеют соответственно производящие функции

$$\psi(s) = s^a, \quad \psi(s) = (1 - p + ps)^n, \quad \psi(s) = e^{-\lambda(1-s)}. \tag{1.4.2}$$

Производящая функция аналитична внутри единичного круга $|s| < 1$. Распределение вероятностей восстанавливается по производящей функции с помощью соотношения

$$p_k = \frac{1}{k!}\psi^{(k)}(0), \ k = 0, 1, \ldots \tag{1.4.3}$$

Факториальные моменты случайной величины X

$$\mathsf{E}X^{[m]} \equiv \mathsf{E}X(X-1)\ldots(X-m+1) \tag{1.4.4}$$

вычисляются по формуле

$$\mathsf{E}X^{[m]} = \psi^{(m)}(1), \quad m \geq 1. \tag{1.4.5}$$

В частности, математическое ожидание и дисперсия случайной величины X определяются по формулам

$$\mathsf{E}X = \psi^{(1)}(1), \quad \mathsf{D}X = \psi^{(2)}(1) + \psi^{(1)}(1) - (\psi^{(1)}(1))^2. \tag{1.4.6}$$

При вычислении факториальных моментов можно также использовать следующее представление производящей функции

$$\psi(s+1) = \sum_{m=0}^{\infty} s^m D_m, \quad D_m = \frac{1}{m!}\mathsf{E}X^{[m]}. \tag{1.4.7}$$

Вырожденное распределение (1.2.3) имеет математическое ожидание и дисперсию вида

$$\mathsf{E}X = a, \quad \mathsf{D}X = 0, \tag{1.4.8}$$

для биномиального распределения (1.2.4) соответственно имеем

$$\mathsf{E}X = np, \quad \mathsf{D}X = np(1-p), \tag{1.4.9}$$

$$\mu_3 = np(1 - 3p + 2p^2), \quad \mu_4 = 3n^2(p - p^2)^2 + n(p - 7p^2 + 12p^3 - 6p^4),$$

а для распределение Пуассона (1.2.5) формулы (1.4.6) приобретают вид

$$\mathsf{E}X = \mathsf{D}X = \mu_3 = \lambda, \quad \mu_4 = \lambda + 3\lambda^2. \tag{1.4.10}$$

Для случайных величин X, принимающих произвольные значения, аналогами производящих функций являются так называемые характеристические функции, которые определяются следующим образом.

Пусть случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)$, тогда *характеристической функцией* называется комплекснозначная функция вида

$$f_X(t) \equiv f(t) = \mathsf{E}e^{itX} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) = \tag{1.4.11}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) dF(x) + i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) dF(x).$$

В частности, если у случайной величины X существует плотность $p(x) = F'(x)$, то ее характеристическая функция является преобразованием Фурье плотности $p(x)$:

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx. \tag{1.4.12}$$

Для дискретной случайной величины X, принимающей значения x_k с вероятностями p_k, характеристическая функция $f(t)$ представима рядом

$$f(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k. \tag{1.4.13}$$

Несложно видеть, что если X имеет нормальное распределение с параметрами (μ, σ^2), то

$$f(t) = \exp\Big\{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}\Big\}.$$

Характеристические функции определены при всех действительных t для любых случайных величин. Приведём основные свойства характеристических функций.

1°. Справедливы соотношения

$$f(0) = 1, \quad |f(t)| \le 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2°. Характеристическая функция равномерно непрерывна на всей действительной оси.

3°. Положительная определённость характеристических функций: при каждом $n \in \mathbb{N}$ для любых комплексных чисел $z_1, \ldots, z_n$ и любых вещественных чисел $t_1, \ldots, t_n$

$$\sum_{l,m}^{n} f(t_l - t_m) z_l \overline{z}_m \ge 0.$$

4°. Эрмитовость:

$$\overline{f}(-t) = f(t)$$

(черта сверху означает комплексное сопряжение).
5°. Если $Y = aX + b$, где a и b – действительные числа, то

$$f_Y(t) = e^{ibt} f_X(at).$$

Теорема 1.4.1. *Для любого действительного y предел*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} f(t) e^{-ity} dt$$

существует и равен скачку функции распределения $F(x)$ в точке $x = y$. Таким образом, если $F(x)$ непрерывна в точке y то этот предел равен нулю.

Согласно Теореме 1.2.3, каждую функцию распределения $F(x)$ можно представить в виде суммы суммы трёх компонент. Используя этот факт, получаем соответствующее представление для характеристических функций

$$f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + a_3 f_3(t), \tag{1.4.14}$$

где каждое $f_j(t)$ – характеристическая функция соответствующей компоненты разложения $F(x)$. Рассмотрим теперь в отдельности поведение каждого из этих трёх слагаемых.

1. Так как $F_1(x)$ абсолютно непрерывна, то

$$f_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} F_1'(x) dx$$

и, следовательно по теореме Римана–Лебега

$$f_1(t) \to 0 \;\text{ при }\; |t| \to \infty. \tag{1.4.15}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |f_1(t)|^2 dt = 0.$$

Если для всех x существует абсолютно интегрируемая n-я производная $F_1^{(n)}(x)$, то интегрирорванием по частям несложно показать, что поведение характеристической функции $f_1(t)$ на бесконечности описывается соотношением

$$f_1(t) = O(\frac{1}{|t|^{n-1}}) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{1.4.16}$$

2. Если через x_k и p_k, $k = 1, 2, \ldots$ обозначить соответственно точки разрыва и величины скачков функции распределения $F(x)$ в этих точках, то

$$a_2 f_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{itx_k}.$$

Это выражение представляет собой сумму абсолютно сходящегося тригонометрического ряда и

$$\limsup_{|t|\to\infty} |f_2(t)| = 1. \tag{1.4.17}$$

Далее мы имеем

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f_2(t)|^2 dt = \frac{1}{a_2^2} \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2. \tag{1.4.18}$$

3. Характеристическая функция $f_3(t)$ является характеристической функцией непрерывной функции распределения $F_3(x)$, имеющей производную, почти всюду равную нулю. При этом $f_3(t)$ может не стремиться к нулю при $|t| \to \infty$.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1.4.2. *Если в представлении функции распределения $F(x)$ в виде суммы трех компонент (см. Теорему 1.2.3), $a_1 > 0$, то*

$$\limsup_{|t|\to\infty} |f(t)| < 1.$$

Отсюда следует, что для $|t| \geq \epsilon > 0$

$$|f(t)| < q_\epsilon < 1,$$

при любом сколь угодно малом $\epsilon > 0$. Если $a_1 = 1$, то

$$\lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0.$$

Если $a_2 = 1$, то

$$\limsup_{|t|\to\infty} |f(t)| = 1.$$

Для любой характеристической функции $f(t)$ справедливо равенство

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2,$$

где p_k – величины скачков функции распределения $F(x)$ в её точках разрыва x_k, $k = 1, 2, \dots$

Для решётчатого распределения

$$p_n = \mathsf{P}(X = b + nh), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

характеристическая функция $f(t)$ представима в виде ряда Фурье

$$f(t) = e^{itb} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{itnh} p_n, \tag{1.4.19}$$

так что $|f(2\pi/h)| = 1$. Обратно, если при некотором $t_0 \neq 0$ справедливо равенство $|f(t_0)| = 1$, то соответствующее распределение является решётчатым.

Максимальный шаг распределения равен h тогда и только тогда, когда модуль характеристической функции меньше единицы при $0 < |t| < 2\pi/h$ и равен единице при $t = 2\pi/h$.

Отсюда следует, что если $f(t)$ есть характеристическая функция решётчатого распределения с максимальным шагом h, то для любого $\epsilon > 0$ существует $0 < q_\epsilon < 1$ такое, что

$$|f(t)| \leq q_\epsilon < 1, \quad \text{при} \quad \epsilon \leq |t| \leq \frac{2\pi}{h} - \epsilon.$$

Случайная величина X и её распределение называются *симмметричными*, если функции распределения случайных величин X и $-X$ совпадают, то есть, если

$$X \stackrel{d}{=} -X.$$

Если X – симметричная случайная величина и $f(t)$ её характеристическая функция, то вследствие эрмитовости характеристических функций выполнено соотношение

$$f(t) = \mathsf{E} e^{itX} = \mathsf{E} e^{-itX} = f(-t) = \overline{f}(t).$$

Таким образом, характеристическая функция симметричной случайной величины всегда действительна.

Если у случайной величины X существует момент $\alpha_k = \mathsf{E}X^k$ некоторого целого порядка $k \geq 1$, то характеристическая функция этой случайной величины дифференцируема k раз и, кроме того, справедливо соотношение

$$f_X^{(k)}(0) = i^k \alpha_k = i^k \mathsf{E}X^k. \quad (1.4.20)$$

Используя формулу Тейлора, можно показать, что если случайная величина X с характеристической функцией $f_X(t)$ имеет момент $\alpha_k = \mathsf{E}X^k$ некоторого целого порядка $k \geq 1$, то справедливо разложение

$$f_X(t) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{j!}(it)^j + o(|t|^k), \quad t \to 0. \quad (1.4.21)$$

Для достаточно малых значений t главная ветвь $\log f_X(t)$, которая стремится к нулю вместе с t, представима в виде

$$\log f_X(t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\kappa_j}{j!}(it)^j + o(|t|^k), \quad t \to 0. \quad (1.4.22)$$

при этом коэффициенты $\{\kappa_j(X) \equiv \kappa_j,\ j = 1, 2, \ldots\}$ называются *кумулянтами* или *семиинвариантами* случайной величины X. Семиинварианты определяются также по формуле

$$\kappa_j = \frac{1}{i^j} l^{(j)}(0), \ \text{где } l(t) = \log f_X(t). \quad (1.4.23)$$

Для нормального распределения с произвольными параметрами семиинварианты всех порядков, начиная с третьего, равны нулю. Для распределения Пуассона с параметром λ семиинварианты всех порядков равны λ.

Из формального тождества

$$\log\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{j!}(it)^j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\kappa_j}{j!}(it)^j$$

можно получить следующую формулу, связывающую семиинвариант κ_s произвольного порядка s с моментами $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$

$$\kappa_s = s! \sum (-1)^{m_1+\ldots+m_s-1}(m_1 + \ldots + m_s - 1)! \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{m_i!}\Big(\frac{\alpha_i}{i!}\Big)^{m_i}. \quad (1.4.24)$$

Здесь суммирование производится по всем целым неотрицательным решениям уравнения

$$m_1 + 2m_2 + \ldots + sm_s = s.$$

Отсюда несложно получить следующие формулы

$$\kappa_1 = \mathsf{E}X = \alpha_1, \quad \kappa_2 = \mathsf{D}X = \mu_2, \tag{1.4.25}$$

$$\kappa_3 = \mu_3, \quad \kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2, \quad \kappa_5 = \mu_5 - 10\mu_2\mu_3,$$
$$\kappa_6 = \mu_6 - 15\mu_2\mu_4 - 10\mu_3^2 + 30\mu_2^3,$$
$$\kappa_7 = \mu_7 - 21\mu_2\mu_5 - 35\mu_3\mu_4 + 210\mu_2^2\mu_3,$$
$$\kappa_8 = \mu_8 - 28\mu_2\mu_6 - 56\mu_3\mu_5 - 35\mu_4^2 + 420\mu_2^2\mu_4 + 560\mu_2\mu_3^2 - 630\mu_2^4.$$

Можно показать, что для семиинвариантов справедливы неравенства

$$|\kappa_n| \leq n^n \beta_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.4.26}$$

Согласно определению (1.4.11), характеристическая функция однозначно определяет функцию распределения $F_X(x)$ и, значит, распределение случайной величины X.

Сформулируем теоремы, показывающие, что и обратно, функция распределения $F(x)$ однозначно определяется характеристической функцией $f(t)$.

Теорема 1.4.3. *Если функция распределения $F(x)$ непрерывна в точках x_1 и x_2, то*

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} f(t)dt.$$

Из этого утверждения легко следует теорема единственности:

Теорема 1.4.4. *Две функции распределения, которым соответствует одна и та же характеристическая функция, тождественно совпадают.*

В случае, если случайная величина X имеет плотность, справедлива следующая формула обращения.

Теорема 1.4.5. *Если*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty,$$

то соответствующая функция распределения $F(x)$ имеет всюду непрерывную производную $p(x) = F'(x)$ и, кроме того для любого x

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)dt.$$

Приведём также формулу обращения для решётчатого распределения.

Теорема 1.4.6. *Пусть случайная величина X имеет решётчатое распределение:*

$$p_k = \mathsf{P}(X = b + kh), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Тогда

$$p_k = \frac{h}{2\pi} \int\limits_{|t|<\pi/h} e^{-it(b+kh)} f(t)dt,$$

где $f(t)$ – характеристическая функция случайной величины X.

Пусть $f_X(t) = \mathsf{E}e^{itX}$ и $f_Y(t) = \mathsf{E}e^{itY}$ – характеристические функции независимых случайных величин X и Y с функциями распределения $F_X(x) = \mathsf{P}(X < x)$, $F_Y(x) = \mathsf{P}(Y < x)$. Тогда, используя равенства

$$\mathsf{E}e^{iXY} = \mathsf{E}f_Y(X) = \mathsf{E}f_X(Y),$$

получим *равенство Парсеваля*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(t)dF_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dF_Y(t). \tag{1.4.27}$$

Одним из вариантов записи равенства Парсеваля является *формула обращения со сглаживанием*:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma^2}\Big\} dF(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big\{-itx - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\Big\} f(t)dt, \quad \sigma > 0. \tag{1.4.28}$$

Теорема 1.4.7. *Функция распределения $F(x)$ с характеристической функцией $f(t)$ абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда функция $|f(t)|^2$ абсолютно интегрируема. При этом для плотности $p'(x) = F(x)$ справедливо равенство Парсеваля*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p^2(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

Теорема 1.4.8. *Если X и Y – независимые случайные величины и $F_X(x)$, $F_Y(x)$ – их функции распределения, а $f_X(t)$ и $f_Y(t)$ – их характеристические функции, то сумма $X+Y$ имеет функцию распределения*

$$F_{X+Y}(x) \equiv F_X * F_Y(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_X(x-y)dF_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_Y(x-y)dF_X(y),$$

называемую сверткой или композицией функций распределения $F_X(x)$ и $F_Y(x)$, и характеристическую функцию

$$f_{X+Y}(t) = f_X(t) \cdot f_Y(t).$$

Если X и Y – неотрицательные целочисленные случайные величины с распределениями

$$p_k = \mathsf{P}(X=k), \quad q_k = \mathsf{P}(Y=k), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

и производящими функциями $\psi_X(s)$ и $\psi_Y(s)$, то распределение суммы $X+Y$ имеет вид

$$\mathsf{P}(X+Y=k) = \sum_{l=0}^{k} p_l q_{k-l},$$

причем производящая функция суммы $X+Y$ равна

$$\psi_{X+Y}(s) = \psi_X(s)\psi_Y(s).$$

1.5 Сходимость случайных величин и их распределений

Последовательность функций распределения $F_n(x)$, $n=1,2,\ldots$ *сходится в основном* к функции распределения $F(x)$, если при $n\to\infty$

$$F_n(x) \longrightarrow F(x)$$

для всех x, которые являются точками непрерывности предельной функции распределения $F(x)$. Для сходимости функций распределения в основном достаточно сходимости на счётном всюду плотном множестве действительной прямой $\mathbb{R}$.

Последовательность функций распределения $F_n(x),\ n = 1, 2, \ldots$ *слабо сходится* к функции распределения $F(x)$, если при $n \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x)$$

для любой непрерывной и ограниченной функции $g(x)$ на действительной прямой.

Слабая сходимость и сходимость в основном функций распределения эквивалентны и в дальнейшем будут обозначаться символом

$$F_n(x) \Longrightarrow F(x).$$

Пусть $X_1,\ X_2, \ldots$ – последовательность случайных величин с функциями распределения $F_1(x), F_2(x) \ldots, F_n(x) = \mathsf{P}(X_n < x)$, и X – случайная величина с функцией распределения $F(x) = \mathsf{P}(X < x)$. Слабая сходимость функций распределения $F_1(x), F_2(x) \ldots$ к $F(x)$ означает, что

$$\mathsf{E}g(X_n) \to \mathsf{E}g(X)$$

для любой непрерывной и ограниченной функции $g(x)$ на действительной прямой. В этом случае говорят, что последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ *сходится по распределению* к случайной величине X. Этот факт мы также будем обозначать символом

$$X_n \Longrightarrow X.$$

Пусть $X_1,\ X_2, \ldots$ – последовательность случайных величин. Будем говорить, что эта последовательность *сходится по вероятности* к случайной величине X и писать

$$X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} X, \quad n \to \infty,$$

если

$$\mathsf{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) \to 0,$$

для любого числа $\epsilon > 0$. Из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению. Обратное утверждение неверно, за исключением случая, когда имеет место сходимость к постоянной.

Теорема 1.5.1. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ и $Y_1, Y_2, \ldots$ – последовательности случайных величин, определённых на одном и том же вероятностном пространстве. Если последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ слабо сходится к случайной величине X и*

$$Y_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad n \to \infty,$$

то и последовательность случайных величин $X_n + Y_n$ тоже слабо сходится к случайной величине X.

Будем говорить, что последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ сходится по вероятности к бесконечности (или неограниченно возрастает по вероятности), если для любого $M > 0$ выполняется $\mathsf{P}(|X_n| < M) \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$.

Семейство функций распределения $\{F_\theta(x),\ \theta \in \Theta\}$ *слабо компактно*, если любая последовательность функций распределения из этого семейства содержит слабо сходящуюся к функции распределения подпоследовательность. Предельная функция распределения не обязана принадлежать данному семейству. В дальнейшем мы будем часто использовать следующие критерии слабой компактности. Пусть $\{X_\theta, \theta \in \Theta\}$ – семейство случайных величин, $F_\theta(x)$ и $f_\theta(s)$ – функции распределения и характеристические функции, соответствующие случайным величинам X_θ.

Теорема 1.5.2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1° *семейство* $\{F_\theta(x), \theta \in \Theta\}$ *слабо компактно*;

2° $\lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_{\theta\in\Theta} \mathsf{P}(|X_\theta| > R) = 0$;

3° *семейство* $\{f_\theta(s), \theta \in \Theta\}$ *равностепенно непрерывно в точке* $s = 0$.

Семейство функций распределения $\{F_\theta(x),\ \theta \in \Theta\}$ называется *плотным*, если для каждого $\epsilon > 0$ можно указать такое число $K_\epsilon > 0$, что

$$\sup_{\theta\in\Theta} (1 - F_\theta(K_\epsilon) + F_\theta(-K_\epsilon)) \le \epsilon.$$

Фундаментальную роль в вопросах слабой сходимости играет следующая теорема Ю. В. Прохорова.

Теорема 1.5.3. *Семейство функций распределения слабо компактно тогда и только тогда, когда оно плотно.*

Основой метода характеристических функций, эффективно применяемого при доказательстве утверждений о сходимости распределений тех или иных случайных величин, и прежде всего, сумм независимых случайных величин, является следующее утверждение, называемое *теоремой непрерывности* соответствия распределений и их характеристических функций.

Теорема 1.5.4. *Пусть $F(x), F_1(x), F_2(x), \ldots$ – функции распределения, $f(t), f_1(t), f_2(t), \ldots$ – соответствующие им характеристические функции. Если*

$$F_n(x) \Longrightarrow F(x), \tag{1.5.1}$$

то

$$f_n(t) \to f(t) \tag{1.5.2}$$

равномерно относительно t в любом конечном интервале.

Обратно, пусть $f_1(t), f_2(t), \dots$ – последовательность характеристических функций, а $F_1(x), F_2(x), \dots$ – последовательность соответствующих им функций распределения. Если имеет место сходимость (1.5.2) к некоторой функции $f(t)$, непрерывной в точке $t = 0$, то существует функция распределения $F(x)$ такая, что имеет место сходимость (1.5.1), причем

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x).$$

В качестве примера использования этой теоремы мы сейчас докажем *закон больших чисел* в форме А. Я. Хинчина. Законами больших чисел называются утверждения о сближении средних араифметических случайных величин со средними арифметическими их математических ожиданий по мере увеличения числа слагаемых в среднем арифметическом.

Теорема 1.5.5. *Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием $\mathsf{E}X_1 = a$. Тогда для любого $\epsilon > 0$*

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - a\Big| > \epsilon\Big) \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$

Доказательство. Характеристическую функцию случайной величины X_1 обозначим $f(t)$,$t \in \mathbb{R}$. Тогда по формуле 1.1.39 мы имеем

$$f(t) = 1 + iat + o(t)$$

при $t \to 0$ и, следовательно,

$$\mathsf{E}\exp\Big\{it\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\Big\} = f^n\Big(\frac{t}{n}\Big) = \Big[1 + ia\frac{t}{n} + o\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big]^n \longrightarrow e^{iat}$$

при $n \to \infty$. Но в правой части последнего соотношения стоит характеристическая функция распределения, вырожденного в точке a. Таким образом, по теореме 1.5.4 средние арифметические независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \dots, X_n$ слабо сходятся к постоянной случайной величине, вырожденной в точке a. Но, как мы отмечали выше, слабая сходимость к константе эквивалентна сходимости по вероятности. Теорема доказана. □

Приведём еще один пример использования теоремы 1.5.4.

Теорема 1.5.6. *Пусть случайная величина X_λ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Тогда распределение нормированной случайной величины*

$$X_\lambda^* = \frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

слабо сходится к стандартному нормальному закону при $\lambda \to \infty$.

Доказательство. Так как характеристическая функция стандартного нормального распределения равна $e^{-t^2/2}$, то, применяя теорему 1.2.5, достаточно показать, что при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$

$$f_\lambda^*(t) = \mathsf{E}e^{itX_\lambda^*} \to e^{-t^2/2}, \quad \lambda \to \infty.$$

Характеристическая функция распределения Пуассона имеет вид

$$f_\lambda(t) = \mathsf{E}e^{itX_\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}. \tag{1.5.3}$$

Поэтому

$$f_\lambda^*(t) = e^{-it\sqrt{\lambda}} f_\lambda(t\lambda^{-1/2}) = \exp\{-it\sqrt{\lambda} + \lambda(e^{it\lambda^{-1/2}} - 1)\}.$$

Но

$$e^{is} = 1 + is + \frac{(is)^2}{2} + o(s^2), \quad s \to 0.$$

Таким образом, полагая $s = t\lambda^{-1/2}$, при $\lambda \to \infty$ мы получаем

$$f_\lambda^*(t) = \exp\{-it\sqrt{\lambda} + \lambda(it\lambda^{-1/2} + (it)^2(2\lambda)^{-1} + o(t^2\lambda^{-1}))\} \to e^{-t^2/2}.$$

Теорема доказана. □

Следующие простые теоремы часто оказываются полезными.

Теорема 1.5.7. *Если последовательность функций распределения $F_1(x),\ F_2(x), \ldots$ сходится к непрерывной функции распределения $F(x)$, то эта сходимость равномерна по $x \in \mathbb{R}$.*

Теорема 1.5.8. *Пусть $p(x),\ p_1(x),\ p_2(x), \ldots$ – последовательность плотностей и*

$$p_n(x) \longrightarrow p(x), \quad n \to \infty,$$

для всех действительных x за исключением множества значений x нулевой лебеговой меры. Тогда

$$\int_A p_n(x)dx \longrightarrow \int_A p(x)dx$$

равномерно относительно всех борелевских множеств A на действительной прямой.

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – две функции распределения. *Метрика Леви* $L_1(F,G)$ между функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ определяется как точная нижняя грань множества значений h, для которых $F(x-h)-h\leq G(x)\leq F(x+h)+h$ при всех x:

$$L_1(F,G)=\inf\{h:\ F(x-h)-h\leq G(x)\leq F(x+h)+h, \forall x\in\mathbb{R}\}.$$

Метрика Леви $L_1(F,G)$ имеет смысл стороны наибольшего квадрата со сторонами, параллельными координатным осям, который можно вписать между графиками функций распределения F и G.

Элементарно доказывается, что

1. $L_1(F,G)=0\Longleftrightarrow F(x)\equiv G(x)$.

2. $L_1(F,G)=L_1(G,F)$.

3. $L_1(F,H)\leq L_1(F,G)+L_1(F,H)$.

Метрика Леви метризует слабую сходимость: для слабой сходимости функций распределения $F_n(x)$ к функции распределения $F(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$L_1(F_n,F)\longrightarrow 0.$$

Теорема 1.5.9. *Метрическое пространство одномерных функций распределений с расстоянием $L_1(F,G)$ является полным.*

Далее в тексте,если не оговорено противное, мы будем использовать следующее соглашение. Если X_1 и X_2 – некоторые случайные величины с функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, а $L_1(\cdot,\cdot)$ – метрика Леви, то мы не будем делать различия между $L_1(F_1,F_2)$ и $L_1(X_1,X_2)$.

В метрических пространствах аналогичным образом определяется метрика *Леви–Прохорова* как расстояние между вероятностными мерами.

Пусть $(E,\mathcal{E},\rho)$ – метрическое пространство и $\mathcal{P}(E)$ – множество вероятностных мер на измеримом пространстве $(E,\mathcal{E})$. Пусть $A\subset E$. Положим $\rho(x,A)=\inf\{\rho(x,y):\ \ y\in A\}$. Пусть $\varepsilon>0$. Обозначим $A^\varepsilon=\{x\in E:\ \rho(x,A)<\varepsilon\},\ \ A\in\mathcal{E}$. Пусть P_1 и P_2 – произвольные вероятностные меры из $\mathcal{P}(E)$. Положим

$$\sigma(\mathsf{P}_1,\mathsf{P}_2)=$$

$$= \inf\{\varepsilon > 0: \ \mathsf{P}_1(A) \le \mathsf{P}_2(A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ для любого замкнутого } A \in \mathcal{E}\}.$$

Расстояние Леви–Прохорова между распределениями P_1 и P_2 определяется как

$$L_2(\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2) = \max\{\sigma(\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2), \sigma(\mathsf{P}_2, \mathsf{P}_1)\}.$$

Расстояние Леви–Прохорова между случайными векторами $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ определяется как расстояние Леви–Прохорова между порожденными ими вероятностными распределениями: $L_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = L_2(\mathsf{P}_{\mathbf{X}}, \mathsf{P}_{\mathbf{Y}})$. Известно, что слабая сходимость случайных векторов, то есть слабая сходимость их распределений, эквивалентна их сходимости в метрике Леви–Прохорова L_2 (см., например, (Золотарев, 1986), (Ширяев, 1989)).

1.6 Центральная предельная теорема, ее уточнения и обобщения

1.6.1 Центральная предельная теорема

Термин *центральная предельная теорема* означает любое утверждение о том, что при выполнении определённых условий функция распределения суммы малых случайных величин с ростом числа слагаемых сходится к нормальной функции распределения. Важность центральной предельной теоремы объясняется тем, что она даёт теоретическое объяснение следующему многократно подтверждённому практикой наблюдению: если исход случайного эксперимента определяется большим числом случайных факторов, влияние каждого из которых пренебрежимо мало, то распределение результата такого эксперимента хорошо аппроксимируется нормальным законом с соответствующим образом подобранными математическим ожиданием и дисперсией.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - независимые одинаково распределенные случайные величины, удовлетворяющие условиям

$$\mathsf{E}X_1 = 0, \qquad \mathsf{D}X_1 = \sigma^2 < \infty. \tag{1.6.1}$$

Функцию распределения случайной величины X_1 обозначим $F(x)$. Функцию распределения нормированной суммы $S_n = (X_1 + \ldots + X_n)/(\sigma\sqrt{n})$ обозначим

$$F_n(x) = F^{*n}(x\sqrt{n}).$$

Функцию распределения и плотность стандартного нормального закона как и ранее будем обозначать $\Phi(x)$ и $\phi(x)$ соответственно,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt, \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{-\frac{x^2}{2}\Big\}.$$

Центральная предельная теорема утверждает, что последовательность функций распределения нормированных сумм S_n случайных величин, удовлетворяющих условию (1.6.1), при $n \to \infty$ равномерно сходится к стандартной нормальной функции распределения:

$$\rho(F_n, \Phi) \equiv \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \longrightarrow 0.$$

При этом второе из условий (1.6.1) – условие конечности дисперсии каждого слагаемого – является необходимым и достаточным для указанной равномерной сходимости, если распределения слагаемых одинаковы.

Если же распределения слагаемых различны, то сходимость распределений центрированных и нормированных сумм независимых случайных слагаемых к нормальному закону имеет место, если вклад каждого слагаемого в сумму мал по сравнению с само́й суммой, то есть ни одно из слагаемых не играет доминирующей роли. Чтобы формализовать сказанное, обозначим

$$\mathsf{E}X_j = a_j, \quad a_1 + \ldots + a_n = A_n; \quad \mathsf{D}X_j = \sigma_j^2, \quad \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2 = B_n^2,$$

$$F_n(x) = \mathsf{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - A_n}{B_n} < x\right), \quad j \geq 1, \ n \geq 1.$$

Наиболее хорошо известной версией центральной предельной теоремы для сумм неодинаково распределенных независимых слагаемых является *теорема Линдеберга–Феллера*, которая формулируется следующим образом.

Теорема 1.6.1. *Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы. Для того чтобы*

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

и при каждом $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1 \leq j \leq n} \mathsf{P}\left(\left|\frac{X_j - a_j}{B_n}\right| > \epsilon\right) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие Линдеберга: для любого $\tau > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^n \int\limits_{|x-a_j|>\tau B_n} (x - a_j)^2 d\mathsf{P}(X_j < x) = 0.$$

Заметим, что все приводимые утверждения формально корректны, если $\sigma_1^2 > 0$. Несложно убедиться, что в случае, когда распределения слагаемых в сумме одинаковы, условие Линдеберга оказывается эквивалентным условию конечности дисперсии.

Предположим, что $\beta_j^3 \equiv \mathsf{E}|X_j - a_j|^3 < \infty$, $j \geq 1$, и обозначим $\beta_1^3 + \ldots + \beta_n^3 = M_n^3$. Тогда, как несложно видеть,

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{|x-a_j|>\tau B_n} (x-a_j)^2 d\mathsf{P}(X_j < x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\tau B_n^3} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{|x-a_j|>\tau B_n} |x-a_j|^3 d\mathsf{P}(X_j < x) \leq \frac{M_n^3}{\tau B_n^3}.$$

Поэтому в случае существования третьих моментов слагаемых условие Линдеберга вытекает из *условия Ляпунова*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n^3}{B_n^3} = 0,$$

то есть для случая конечных третьих абсолютных моментов слагаемых условие Ляпунова является достаточным для равномерной сходимости функций распределения центрированных и нормированных сумм независимых случайных слагаемых к стандартной нормальной функции распределения. Это утверждение принято называть *теоремой Ляпунова*.

1.6.2 Неравенство Берри–Эссеена

Вернемся к той ситуации, когда распределения слагаемых одинаковы. Известно, что при условии существования абсолютного момента порядка $2+\delta$ с $0 < \delta \leq 1$, то есть

$$\beta^{2+\delta} \equiv \mathsf{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty, \tag{1.6.2}$$

справедливо неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leq C_\delta L_n^{2+\delta}, \tag{1.6.3}$$

где

$$L_n^{2+\delta} = \frac{\beta^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta} n^{\delta/2}},$$

а C_δ – положительная абсолютная постоянная (см., например, (Петров, 1972), гл. VI, Теорема 6). При $\delta = 0$ нормальная сходимость имеет место, но может быть как угодно медленной (Мацкявичюс, 1983).

Случай $\delta = 1$, то есть

$$\beta^3 \equiv \mathsf{E}|X_1|^3 < \infty \tag{1.6.4}$$

изучен лучше всего. В этом случае неравенство (1.6.3) превращается в классическое *неравенство Берри–Эссеена*

$$\rho(F_n, \Phi) \le CL_n^3, \tag{1.6.5}$$

где

$$L_n^3 = \frac{\beta^3}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

– так называемая *дробь Ляпунова* третьего порядка, C – абсолютная постоянная (Berry, 1941), (Esseen, 1942). Неравенство (1.6.5) устанавливает правильную *скорость сходимости* (правильный порядок убывания $\rho(F_n, \Phi)$ с ростом n). Однако, чтобы применить неравенство (1.6.5) на практике для оценивания *точности* нормальной аппроксимации, необходимо иметь конкретную численную оценку абсолютной константы C.

В некоторых прикладных задачах (в частности, в теории управления запасами, финансовой и страховой математике, см. главу 10) объем имеющейся выборки *n фиксирован*, поэтому при оценивании точности нормальной аппроксимации решающую роль для окончательного результата играет значение абсолютной константы в неравенстве Берри–Эссеена.

История отыскания значения абсолютной константы в неравенстве Берри–Эссеена интересна и богата результатами. Так, Э. Берри утверждал, что $C \le 1.88$, однако, как обнаружилось позднее (Hsu, 1945), вычисления Берри содержали ошибку. К.-Г. Эссеен показал, что $C \le 7.59$ (Esseen, 1942). Х. Бергстрём показал, что $C \le 4.8$ (Bergström, 1949). К. Такано (Takano, 1951) получил оценку $C \le 2.031$. По-видимому, работа Такано (опубликованная на японском языке) выпала из поля зрения некоторых исследователей, так как в нескольких более поздних публикациях приводятся немного худшие оценки. В частности, в работе (Esseen, 1956) имеется упоминание о неопубликованных вычислениях, дающих $C \le 2.9$. В работе Д. Л. Уоллеса (Wallace, 1958) приведена оценка $C \le 2.05$. В. Феллер (Феллер, 1984б), упоминая результат Уоллеса, также обходит вниманием работу Такано. Вычислению наименьшего возможного значения абсолютной постоянной C придавал большое значение А. Н. Колмогоров. В своей работе (Колмогоров, 1953) он высказал предположение о том, что $C = 1/\sqrt{2\pi}$. К сожалению, это предположение оказалось не совсем точным: в 1956 г., решая несколько иную задачу, К.-Г. Эссеен показал, что в неравенстве (1.6.5) постоянная C не может быть меньше, чем

$$C_1 = \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 0.0107899...$$

(Esseen, 1956). Этот результат получен как следствие решения задачи об асимптотически правильной константе в неравенстве Берри–Эссеена, то есть наименьшей постоянной C_*, обеспечивающей асимптотическую оценку

$$\rho(F_n, \Phi) \leq C_* L_n^3 + o(L_n^3).$$

Эссеен показал, что в рассматриваемой ситуации $C_* = C_1$. Поскольку $C \geq C_*$, была найдена нижняя оценка для C. Далее, как показал Б. А. Рогозин,

$$\limsup_{n\to\infty} \inf_{a,b} \frac{\sigma^3\sqrt{n}}{\beta^3} \sup_x \left| F_n(x) - \Phi\left(\frac{x-a}{b}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leq 0.3990$$

(Рогозин, 1965). Тем самым предположение Колмогорова было в определенном смысле подтверждено.

Тем не менее, наименьшее возможное значение константы C в классическом неравенстве Берри–Эссеена до сих пор неизвестно. Верхняя оценка для C была последовательно снижена до $C < 0.9051$ (Золотарев, 1966), $C < 0.8197$ (Золотарев, 1967), $C < 0.7975$ (Van Beek, 1971), (Van Beek, 1972), $C \leq 0.7655$ (Шиганов, 1982). Рекорд Шиганова удалось перекрыть лишь недавно – в 2006 г. И. Г. Шевцовой удалось получить оценку $C \leq 0.7056$ (Шевцова, 2006б). Следует отметить, что в шести последних работах использовался один и тот же подход, предложенный еще в 1966 г. В. М. Золотаревым (описание этого подхода можно найти, например, в книге (Золотарев, 1986)).

В основе доказательства оценки, полученной в работе (Шевцова, 2006б), лежит неравенство сглаживания Золотарёва (Золотарев, 1966), (Zolotarev, 1967), улучшенное П. Ван Беeком (Van Beek, 1971), (Van Beek, 1972), а также результат Г. Правитца, который в 1972 г. показал, что, если $L_n^3 \leq 0.1$, то $\rho(F_n, \Phi) \leq 0.51513 \cdot L_n^3$ (Prawitz, 1972). По-видимому, по какой-то причине этот результат Правитца выпал из поля зрения И. С. Шиганова, соответствующая модификация алгоритма которого позволила И. Г. Шевцовой получить уточненную оценку. Доказательство последнего результата существенно опирается на вычисления, произведенные при помощи компьютера. Ниже мы опишем лишь ключевые этапы доказательства.

Для удобства изложения, не ограничивая общность, будем считать, что $\sigma^2 = 1$, и от параметров β^3 и n перейдем к эквивалентной параметризации $\varepsilon = L_n^3$ и n. Для каждого фиксированного ε и n существует число $D(\varepsilon, n)$, такое что $\rho \le D(\varepsilon, n)\varepsilon$, поэтому абсолютная постоянная C из неравенства (1.6.5) может быть вычислена как

$$C = \sup_{\varepsilon} D(\varepsilon), \quad D(\varepsilon) = \sup_{n} D(\varepsilon, n),$$

при этом предполагается, что супремум по всем распределениям с фиксированным ε и n уже взят.

Для оценивания величины $D(\varepsilon, n)$ используется неравенство сглаживания Золотарёва, для формулировки которого нужны дополнительные обозначения. Пусть $p(x) \in L_1$ – некоторая интегрируемая функция. Обозначим ее преобразование Фурье

$$\widehat{p}(x) = \int e^{itx} p(x) dx$$

и норму $\|p\| = \int |p(x)| dx$. Для произвольных $x, y > 0$ введём функции

$$V(x) = x \cdot v(x), \quad v(x) = \int_0^x p^+(u) du, \quad p^+(u) = \max\{p(u), 0\},$$

$$q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty |\widehat{p}(t/y)| \frac{\delta(t)}{t} dt, \quad \delta(t) = |f_n(t) - e^{-t^2/2}|,$$

где $f_n(t)$ – характеристическая функция, соответствующая функции распределения $F_n(x)$. Обозначим через Λ класс всех непрерывных симметричных функций $p \in L_1$, таких что $\widehat{p} \in L_1$.

В работе (Золотарев, 1966) доказано, что для любых $y > 0$, $x > \chi_p$ и $p \in \Lambda$ имеет место неравенство

$$D(\varepsilon, n) \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{V(x)/y + q(y)}{\varepsilon(4v(x) - \|p\|)},$$

где χ_p – единственный положительный корень уравнения

$$4v(x) - \|p\| = 0$$

(если таковой существует).

Зависимость оценки $D(\varepsilon, n)$ от n характеризует поведение функции $\delta(t)$, для которой в (Золотарев, 1966) приведены следующие оценки:
1°. Для $|t| < \sqrt{2n}$

$$\delta(t) \le \delta_1(t) = e^{-t^2/2}(\exp\{t^2 \tau(|t|, \varepsilon, n)\} - 1),$$

где
$$\tau(|t|,\varepsilon,n)=\frac{\varepsilon|t|}{6}-\frac{n}{t^2}\left[\ln\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)+\frac{t^2}{2n}\right].$$
2°. Для всех $t\in\mathbb{R}$
$$\delta(t)\le\delta_2(t)=e^{-t^2/2}(\exp\{k\varepsilon|t|^3/2\}+1),$$
где
$$k=4\sup_{x>0}\{(\cos x-1+x^2/2)/x^3\}\approx 0.396648.$$
3°. Для всех $t\in\mathbb{R}$
$$\delta(t)\le\delta_3(t)=1+e^{-t^2/2}.$$

Подставляя в функцию $q(y)$ величину $\delta_0(t)=\min\{\delta_1(t),\delta_2(t),\delta_3(t)\}$, получаем функцию $q(y,\varepsilon,n)$, также зависящую от ε и n. При этом для $D(\varepsilon,n)$ остается справедливой оценка
$$D(\varepsilon,n)\le\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{V(x)/y+q(y,\varepsilon,n)}{\varepsilon(4v(x)-\|p\|)}\equiv D(\varepsilon,n,x,y,p),$$
так что мы можем положить при каждом ε и n
$$D(\varepsilon,n)=\inf\{D(\varepsilon,n,x,y,p):\ y>0,\ x>\chi_p,\ p\in\Lambda\}.$$
Найдем теперь при каждом фиксированном ε супремум по n определенной таким образом функции $D(\varepsilon,n)$. Заметим, что $\beta^3\ge 1$ в силу моментных условий (1.6.1), поэтому супремум берётся по $n\ge\max\{1,\lceil 1/\varepsilon^2\rceil\}$, где $\lceil x\rceil$ – минимальное целое, превосходящее, либо равное x. Заметим далее, что $D(\varepsilon,n,x,y,p)$ зависит от n только через функцию $\delta_0(t)$, причем монотонно. Из представления
$$\tau(|t|,\varepsilon,n)=\frac{\varepsilon|t|}{6}+\frac{t^2}{4n}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{t^2}{2n}\right)^{r-2},$$
очевидно, вытекает, что $\tau(|t|,\varepsilon,n)$, а значит, и $\delta_1(t)$ монотонно убывает по n при каждом фиксированном ε. Поскольку с ростом n множество, по которому берется минимум
$$\delta_0(t)=\begin{cases}\min\{\delta_1(t),\delta_2(t),\delta_3(t)\}, & |t|<\sqrt{2n};\\ \min\{\delta_2(t),\delta_3(t)\}, & |t|\ge\sqrt{2n}\end{cases}$$
расширяется, величина $\delta_0(t)$, а значит, и $D(\varepsilon,n,x,y,p)$ монотонно убывает с ростом n при каждом фиксированном ε. Отсюда вытекает, что $\sup_n D(\varepsilon,n)$ достигается при $n=\max\{1,\lceil 1/\varepsilon^2\rceil\}$, так что
$$D(\varepsilon)=D(\varepsilon,\max\{1,\lceil 1/\varepsilon^2\rceil\}).$$

В работах (Золотарев, 1966) и (Шиганов, 1982) приведено следующее неравенство, позволяющее оценить второй супремум $C = \sup_\varepsilon D(\varepsilon)$ по значениям $D(\varepsilon)$ только в конечном числе точек: для любых $\varepsilon_1 \le \varepsilon \le \varepsilon_2$ справедливо соотношение

$$D(\varepsilon) \le D(\varepsilon_2) \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Поскольку равномерное расстояние между двумя функциями распределения не превосходит единицы, для любого ε можно требовать выполнения неравенства $C\varepsilon \le 1$, из которого вытекает, что достаточно рассматривать $\varepsilon \le 1/0.7655 < 1.4173$. Кроме того, как показано в работе (Prawitz, 1972), $C \le 0.5152$ при $\varepsilon \le 0.1$, так что для доказательства требуемой оценки достаточно рассматривать только $\varepsilon \in (0.1, 1.4173]$.

Ядро $p(x)$ выбирается таким же, как и в работе (Шиганов, 1982):

$$p(x) = 0.5(p_1(x + a_1) + p_1(x - a_1) + a_3(p_1(x + a_2) + p_1(x - a_2))),$$

где a_1, a_2, a_3 – действительные числа,

$$p_1(x) = \frac{\sin x}{2\pi x(1 - x^2/\pi^2)}.$$

Преобразование Фурье такого ядра имеет вид

$$\widehat{p}(t) = \widehat{p}_1(t)(\cos(a_1 t) + a_3 \cos(a_2 t)), \quad \widehat{p}_1(t) = \cos^2(\pi t/2)\mathbf{1}(|t| \le 1),$$

где $\mathbf{1}(\cdot)$ – индикаторная функция. Легко видеть, что функция $p(x)$ симметрична по a_1 и a_2, поэтому достаточно рассматривать, только неотрицательные a_1, a_2. Кроме того, можно убедиться, что $\chi_p < \infty$ тогда и только тогда, когда $a_3 > -1$. Таким образом, задача минимизации функционала $D(\varepsilon, n, x, y, p)$ свелась к задаче минимизации функции $D(\varepsilon, n, x, y, a_1, a_2, a_3)$ пяти аргументов $x > \chi_p$, $y > 0$, $a_1 \ge 0$, $a_2 \ge 0$, $a_3 > -1$ при фиксированных ε и n.

Численная оптимизация проводилась на компьютере. При написании соответствующей программы использовалась библиотека математических функций GNU Scientific Library (GSL), из которой были взяты процедуры для вычисления интегралов $\|p\|$, $v(x)$ и $q(y)$ и минимизации по методу сопряженных градиентов.

В ходе оптимизации оказалось, что экстремальные значения функции $D(\varepsilon)$ достигаются при $\varepsilon \approx 0.5782$ и $\varepsilon \approx 0.5047$. При этом в качестве x, y, a_1, a_2, a_3 можно взять

а) $\varepsilon = 0.5782$: $x = 7.7968$, $y = 14.8491$, $a_1 = 0.3224$, $a_2 = 4.2565$, $a_3 = 2.2041$, $D(\varepsilon) = 0.705592$;

б) $\varepsilon = 0.5047$: $x = 7.7147$, $y = 16.4049$, $a_1 = 2.3050$, $a_2 = 5.2758$, $a_3 = 0.5176$, $D(\varepsilon) = 0.705593$.

В отличие от работы Шиганова, где супремум $D(\varepsilon)$ достигался при $\varepsilon \to 0$, в работе Шевцовой, учитывающей результат (Prawitz, 1972), супремум $D(\varepsilon)$ достигается при ε, отделённых от нуля. При этом предположение В. М. Золотарёва о том, что "глобальный" супремум $D(\varepsilon)$ достигается при $\varepsilon \to 0$ (см., например, (Шиганов, 1982)), позволяет надеяться, что данный метод в принципе может привести к снижению верхней оценки постоянной C как минимум до 0.5152 за счет расширения класса рассматриваемых ядер p.

1.6.3 Уточнения неравенства Берри–Эссеена

Наряду с уточнениями неравенства (1.6.5) за счет более аккуратного оценивания C, были предприняты многие попытки его уточнения за счет усовершенствования его структуры. В частности, в 1966 г. В. М. Золотарев доказал неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \le 0.8197 L_n^3 + 0.5894 (L_n^3)^{4/3} + O\left((L_n^3)^{5/3}\right), \quad L_n^3 \to 0.$$

Развивая идею о том, что оптимальная структура оценки точности нормальной аппроксимации должна включать член вида L_n^3 с оптимальной константой C_1 плюс "добавка", убывающая быстрее, чем $n^{-1/2}$, В. Бенткус (Bentkus, 1991), (Bentkus, 1994) показал, что существует положительная постоянная $\overline{C}$, обеспечивающая оценку

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \le \left(\frac{1}{6\sqrt{2\pi}} + \phi(x)\right) L_n^3 + \overline{C}(L_n^3)^{5/3},$$

из которой вытекает, что

$$\rho(F_n, \Phi) \le \frac{7L_n^3}{6\sqrt{2\pi}} + \overline{C}(L_n^3)^{5/3} \qquad \left(\frac{7}{6\sqrt{2\pi}} = 0.4654...\right).$$

Наконец, недавно Г. П. Чистяков доказал, что в указанных предположениях существует абсолютная постоянная $\widetilde{C}$ такая, что

$$\rho(F_n, \Phi) \le C_1 L_n^3 + \widetilde{C}(L_n^3)^{40/39} |\log L_n^3|^{7/6}$$

(Чистяков, 2001).

Приведенные выше результаты являются универсальными, они справедливы при *любых* распределениях слагаемых с конечным третьим моментом. Однако, в такой их универсальности заключен и их недостаток: во многих практических ситуациях приведенные выше оценки являются слишком грубыми. Без дополнительных предположений абсолютная константа при первом слагаемом в правой части неравенства Чистякова, убывающем как $O(n^{-1/2})$, не может быть уменьшена. Таким образом, по сути единственный путь существенного уточнения упомянутых результатов заключается в рассмотрении достаточно общих частных случаев.

В некоторых конкретных (также достаточно общих) ситуациях, когда имеется некоторая дополнительная информация о распределении слагаемых, эти оценки можно уточнить. В частности, В. Бенткус показал, что если слагаемые X_j имеют симметричное распределение, то существует абсолютная постоянная $\widehat{C}$ такая, что

$$\rho(F_n, \Phi) \le \frac{L_n^3}{\sqrt{2\pi}} + \widehat{C}(L_n^3)^{4/3}$$

(Bentkus, 1991), (Bentkus, 1994). Обратим внимание на то, что в работах Чистякова и Бенткуса не приведены численные оценки констант $\overline{C}$, $\widetilde{C}$ и $\widehat{C}$, что не позволяет применять на практике эти замечательные теоретические результаты.

Накладывая другие условия, оценки точности нормальной аппроксимации можно уточнить весьма существенно. В этом нас убеждает хорошо известный результат К.-Г. Эссеена, согласно которому, если распределение слагаемых X_j не является решетчатым, то при $n \to \infty$

$$F_n(x) - \Phi(x) = \frac{\mathsf{E}X_1^3}{6\sigma^3\sqrt{2\pi n}}(1 - x^2)e^{-x^2/2} + o(n^{-1/2}) \tag{1.6.6}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$ (Esseen, 1945), см. также (Феллер, 1967). Легко видеть, что

$$\sup_x |1 - x^2|e^{-x^2/2} = 1.$$

Таким образом, учитывая, что $|\mathsf{E}X_1^3| \le \mathsf{E}|X_1|^3$, из (1.6.6) мы получаем неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \le \frac{L_n^3}{6\sqrt{2\pi}} + R_n, \tag{1.6.7}$$

справедливое для случая нерешетчатого распределения слагаемых, где $R_n = o(n^{-1/2})$ при $n \to \infty$. Более того, из (1.6.7) вытекает соотношение

$$\limsup_{n\to\infty} L_n^{-3}\rho(F_n, \Phi) \le \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} < 0.0665, \tag{1.6.8}$$

то есть для случая нерешетчатых слагаемых число $1/(6\sqrt{2\pi}) < 0.0665$ является асимптотической абсолютной постоянной в аналоге неравенства Берри–Эссеена. В силу (1.6.6) мы заключаем, что эта константа неулучшаема. К сожалению, из-за отсутствия явных оценок величины R_n неравенством (1.6.7) также нельзя пользоваться для практических вычислений.

На фоне все возрастающего интереса к изучению случайных величин, распределения которых имеют так называемые тяжелые хвосты (что отчасти обусловлено необходимостью решать задачи, связанные с большими рисками), особую важность приобретает вопрос о возможности использования нормальной аппроксимации для распределений сумм слагаемых, распределения которых имеют (в некотором смысле) тяжелые хвосты, и о ее точности.

К классу распределений с тяжелыми хвостами, конечно же, можно отнести те, для которых не существует моментов третьего порядка, но существуют моменты лишь порядка $2+\delta$ с $0<\delta<1$.

Для случая $0<\delta<1$ в работе (Tysiak, 1983) (также см. (Paditz, 1996)) получена следующая таблица значений оценок константы C_δ

$\delta=$	$C_\delta\le$	$\delta=$	$C_\delta\le$	$\delta=$	$C_\delta\le$
0.1	1.102	0.4	0.950	0.7	0.833
0.2	1.076	0.5	0.902	0.8	0.812
0.3	1.008	0.6	0.863	0.9	0.802

Л. Падитц (Paditz, 1986) показал, что при $\delta=0$ имеет место неравенство

$$\rho(F_n,\Phi)\le 3.51\cdot\frac{1}{\sigma^2}\mathsf{E}\left(X_1^2\min\left\{1,\frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{n}}\right\}\right),$$

откуда вытекает, что имеет место равномерная по $\delta\in[0,1)$ оценка $C_\delta\le 3.51$, так как при любом $\delta\in(0,1]$ выражение в правой части последнего неравенства не превосходит $3.51L_n^{2+\delta}$.

Случай $0<\delta<1$ чрезвычайно интересен. С одной стороны, для этого случая в 1966 г. И. А. Ибрагимов доказал, что для того чтобы

$$\rho(F_n,\Phi)=O(n^{-\delta/2})\quad(n\to\infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathsf{E}[X_1^2\mathbf{1}(|X_1|\ge z)]=O(z^{-\delta})\quad(z\to\infty)$$

(Ибрагимов, 1966) (см. также Ибрагимов и Линник, 1965)), откуда вытекает, что, если $\beta^{2+\delta}=\mathsf{E}|X_1|^{2+\delta}<\infty$, то $\rho(F_n,\Phi)=O(n^{-\delta/2})$ (это следует из того, что в таком случае

$$\mathsf{E}[X_1^2\mathbf{1}(|X_1\ge z)]=\mathsf{E}[|X_1|^{2+\delta}|X_1|^{-\delta}\mathbf{1}(|X_1\ge z)]\le z^{-\delta}\mathsf{E}|X_1|^{2+\delta}$$

для любого $z > 0$).

Однако условие Ибрагимова слабее, чем требование существования $\beta^{2+\delta}$. В частности, если случайная величина X_1 имеет плотность

$$p(x) = \frac{2+\delta}{2} \cdot \frac{1}{(|x|+1)^{3+\delta}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

то, очевидно, $\mathsf{E}|X_1|^{2+\delta}$ не существует, но для любого $z > 0$

$$\mathsf{E}[X_1^2 \mathbf{1}(|X_1| \geq z)] = \frac{2+\delta}{2} \int\limits_{|x|\geq z} \frac{x^2 dx}{(|x|+1)^{3+\delta}} \leq$$

$$\leq \frac{2+\delta}{2} \int\limits_{|x|\geq z} \frac{dx}{|x|^{1+\delta}} = \frac{2+\delta}{2\delta} \cdot z^{-\delta}.$$

С другой стороны, как показал К. Хейди, при $0 < \delta < 1$ условие $\mathsf{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty$ *равносильно* тому, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+\delta/2} \rho(F_n, \Phi) < \infty$$

(Heyde, 1967). Поэтому если бы было справедливо соотношение $\rho(F_n, \Phi) \sim n^{-\delta/2}$ $(n \to \infty)$, то указанный ряд должен был бы расходиться. Таким образом, неравенство (1.6.3) в некотором смысле дает слишком грубую оценку точности нормальной аппроксимации для распределений сумм независимых случайных величин (порядок $n^{-\delta/2}$ является “не совсем правильным” в том смысле, что он может быть характерен лишь для некоторой разреженной подпоследовательности значений индекса n в то время как для остальных значений n скорость сходимости выше).

Случай же $\delta = 1$ является как бы критическим, потому что, как показывают соответствующие примеры, без дополнительных предположений порядок $\rho(F_n, \Phi) = O(n^{-1/2})$ нельзя улучшить, сколь велик бы ни был порядок $\gamma \geq 3$ момента слагаемого.

В данном разделе мы уточним оценку (1.6.3) для случая $0 < \delta < 1$ за счет модификации ее структуры, уменьшив константу при ляпуновской дроби, являющейся, как вытекает из сказанного выше, “не совсем правильным” слагаемым. Наряду с общей ситуацией, мы также рассмотрим упомянутую задачу при дополнительном условии гладкости распределения слагаемых для $0 < \delta \leq 1$. Материал данного раздела основан на работах (Королев и Шевцова, 2005a) и (Королев и Шевцова, 2005b). Мы убедимся, что и классическое неравенство Берри–Эссеена (1.6.5), и неравенство (1.6.3) могут быть заметно уточнены.

Случай произвольных распределений слагаемых с $0 < \delta \le 1$

В книге (Феллер, 1984б), с. 611, отмечено, что *в последнее время большое внимание уделялось обобщениям теоремы Берри–Эссеена на величины, не имеющие момента третьего порядка. В этом случае граница в неравенстве выражается через момент дробного порядка или какую-нибудь родственную величину... Обычные вычисления в этом случае достаточно запутаны, а попытки разработать универсальные методы, применимые ко многим случаям, не предпринимались... Необходимость в моментах третьего порядка появляется в доказательстве теоремы* [Берри–Эссеена] *только из-за неравенства*

$$\left| e^{itx} - 1 - itx + \frac{(tx)^2}{2} \right| \le \frac{|tx|^3}{6}. \tag{1.6.9}$$

В большинстве работ, посвященных изучению ситуации, когда существуют лишь моменты порядка $2+\delta$, неравенство (1.6.9) используется в некотором конечном интервале изменения аргумента x, а для остальных значений аргумента используется граница порядка $(tx)^2$ (см., например, (Осипов, 1966), (Петров, 1972), (Бхаттачария и Ранга Рао, 1982)). При доказательстве приводимых ниже результатов (см. Лемму 1.6.1 ниже) вместо упомянутого метода усечения, основанного на использовании неравенства (1.6.9), используется иной подход, базирующийся на оценке

$$\left| e^{itx} - \left(1 + itx + \ldots + \frac{(itx)^n}{n!}\right) \right| \le \frac{2^{1-\delta}\Gamma(1+\delta)|tx|^{n+\delta}}{\Gamma(n+1+\delta)}, \quad x, t \in \mathbb{R}, \tag{1.6.10}$$

справедливой для любого целого $n \ge 0$ и для любого $\delta \in (0,1]$. Это позволяет использовать традиционную универсальную схему рассуждений, основанную на применении классического неравенства сглаживания и его модификаций, ориентированных на оптимизацию абсолютных констант. Доказательство неравенства (1.6.10) (в неявной форме) можно найти, например, в (Лоэв, 1962), с. 212-213.

Здесь и далее символ $\Gamma(\,\cdot\,)$, как обычно, обозначает эйлерову гамма-функцию,

$$\Gamma(y) = \int\limits_0^\infty z^{y-1}e^{-z}dz, \quad y > 0.$$

Всюду далее для упрощения записей, не ограничивая общность, мы полагаем $\sigma^2 = 1$.

Вспомогательные результаты

Пусть d – некоторое число, лежащее в интервале $(0, \sqrt{2})$. Введем функции

$$a(\delta, d) = \frac{d^{2-\delta}}{4} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{2}\right)^{r-2} + \frac{2^{1-\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)}$$

$$\left(= -\frac{1}{d^{2+\delta}} \left[\frac{d^2}{2} + \ln\left(1 - \frac{d^2}{2}\right)\right] + \frac{2^{1-\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)}\right),$$

$$b(\delta, d) = \frac{1}{2} - d^{\delta/2} a(\delta, d).$$

Несложно убедиться, что при каждом $\delta \in (0, 1]$

$$\lim_{d\to 0+} a(\delta, d) = \frac{2^{1-\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)}, \qquad \lim_{d\to 0+} b(\delta, d) = \frac{1}{2}.$$

Более того, можно убедиться, что функция $b(\delta, d)$ монотонно убывает при $d \in (0, \sqrt{2})$, причем на интервале $(0, \sqrt{2})$ лежит единственный нуль этой функции, который мы обозначим $d_0(\delta)$.

Лемма 1.6.1. *Пусть выполнены условия* (1.6.1) *и* (1.6.2) *при* $0 < \delta \le 1$. *Тогда для любого* $d \in \left(0, \, (\beta^{2+\delta})^{-2(1-\delta)/\delta}\right)$ *и любого* $n \ge 1$ *при* $|t| \le T_n \equiv d\sqrt{n}/\beta^{2+\delta}$ *справедлива оценка*

$$|f_n(t) - e^{-t^2/2}| \le a(\delta, d) \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} |t|^{2+\delta} \exp\left\{-b(\delta, d) t^2\right\}.$$

Доказательство. Из неравенства Ляпунова следует, что $\beta \ge 1$, поэтому

$$d \le (\beta^{2+\delta})^{-2(1-\delta)/\delta} \le 1 < \sqrt{2}.$$

Для t из указанного промежутка имеем

$$\left|f\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big) - 1\right| \le \frac{t^2}{2n} \le \frac{d^2}{2(\beta^{2+\delta})^2} \le \frac{d^2}{2}. \tag{1.6.11}$$

Отсюда следует, что

$$\left|f\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\right| \ge 1 - \frac{d^2}{2} > 0$$

для всех $d \in (0, \, (\beta^{2+\delta})^{-2(1-\delta)/\delta}) \subset (0, \sqrt{2})$. Значит, логарифм $\ln f(t/\sqrt{n})$ определен при всех $|t| \le d\sqrt{n}/\beta^{2+\delta}$. Обозначим через $h(t)$ функцию

$$h(t) = \frac{t^2}{2} + \ln f_n(t) = \frac{t^2}{2} + n \ln f\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big).$$

Тогда

$$|f_n(t) - e^{-t^2/2}| = e^{-t^2/2}\left|e^{h(t)} - 1\right| \le e^{-t^2/2}\,|h(t)|\,e^{|h(t)|}. \qquad (1.6.12)$$

Стало быть, для доказательства леммы нам достаточно найти две оценки для $|h(t)|$, одна из которых будет величиной порядка $O(|t|^{2+\delta}n^{-\delta/2})$, а вторая – величиной порядка $O(t^2)$. Имеем

$$|h(t)| = n\Big|\ln\Big[1 - \Big(1 - f\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\Big)\Big] + \frac{t^2}{2n}\Big| =$$

$$= n\Big| - \sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r}\Big(1 - f\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\Big)^r + f\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big) - 1 + \frac{t^2}{2n}\Big|$$

Из неравенства (1.6.10) следует, что

$$\left|f\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big) - 1 + \frac{t^2}{2n}\right| \le \frac{2^{1-\delta}\beta^{2+\delta}|t|^{2+\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)n^{1+\delta/2}},$$

поэтому с учетом соотношений (1.6.11) мы получаем

$$|h(t)| \le n\Big[\left(\frac{t^2}{2n}\right)^2\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{d^2}{2}\right)^{r-2} + \frac{2^{1-\delta}\beta^{2+\delta}|t|^{2+\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)n^{1+\delta/2}}\Big] =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{d^2}{2}\right)^{r-2}\frac{t^4}{n} + \frac{2^{1-\delta}\beta^{2+\delta}|t|^{2+\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)n^{\delta/2}} \le$$

$$\le \frac{d^{2-\delta}}{4}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{d^2}{2}\right)^{r-2}\frac{\beta^{2+\delta}|t|^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} +$$

$$+ \frac{2^{1-\delta}\beta^{2+\delta}|t|^{2+\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)n^{\delta/2}} \equiv a(\delta,d)\frac{\beta^{2+\delta}|t|^{2+\delta}}{n^{\delta/2}}.$$

Это первая интересующая нас оценка. Вторая получается из первой с использованием неравенства

$$|t|^{\delta} \le d^{\delta}n^{\delta/2}/(\beta^{2+\delta})^{\delta} \le d^{\delta/2}n^{\delta/2}/\beta^{2+\delta},$$

верного для всех рассматриваемых значений t и параметра d:

$$|h(t)| \le d^{\delta/2}a(\delta,d)|t|^2 \equiv \frac{t^2}{2} - b(\delta,d)t^2.$$

Подставляя последние две оценки в (1.6.12), получаем утверждение леммы.

Пусть $v > 0$ и $\gamma > 0$ – произвольные числа. Рассмотрим плотность распределения вероятностей

$$p_{v,\gamma}(x) = \frac{\gamma}{2\pi v}\left(\frac{\sin\frac{\gamma x}{2v}}{\frac{\gamma x}{2v}}\right)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Несложно убедиться, что плотности $p_{v,\gamma}(x)$ соответствует характеристическая функция

$$g_{v,\gamma}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{v}{\gamma}|t|, & \text{если } |t| \le \gamma/v, \\ 0, & \text{если } |t| > \gamma/v. \end{cases}$$

Обозначим

$$\alpha = \alpha(\gamma) = \int\limits_{-v}^{v} p_{v,\gamma}(x)dx$$

$$\Big(= \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\gamma/2}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 dy = \frac{2}{\pi\gamma}(\gamma\mathrm{Si}(\gamma) + \cos\gamma - 1)\Big).$$

Пусть γ_0 – решение уравнения

$$\alpha(\gamma) = \frac{1}{2}.$$

Численные расчеты показывают, что $\gamma_0 \approx 1.69958$. Для всех $\gamma > \gamma_0$ имеем $\alpha(\gamma) > 1/2$.

Лемма 1.6.2. *Для любых $\gamma > \gamma_0$ и $v > 0$ справедливо неравенство*

$$\rho(F_n, \Phi) \le \frac{1}{2\alpha(\gamma) - 1}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\gamma/v}^{\gamma/v}\left|\frac{f_n(t) - e^{-t^2/2}}{t}\right||g_{v,\gamma}(t)|dt + \frac{v\alpha(\gamma)}{\sqrt{2\pi}}\right].$$

Доказательство леммы дословно повторяет доказательство Леммы 12.2 из (Бхаттачария и Ранга Рао, 1982).

Аналоги неравенства Берри–Эссеена с уточненной структурой. Оценки асимптотически правильных констант

Обозначим $\overline{d}(\delta) = \min\{d_0(\delta),\, (\beta^{2+\delta})^{-2(1-\delta)/\delta}\}$. Можно убедиться, что при каждом $\delta \in (0, 1]$ существует $\varepsilon' > 0$ такое, что $0 < d(\delta, \varepsilon) < \overline{d}(\delta)$ для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$. Точную верхнюю грань таких ε' обозначим $\varepsilon(\delta)$.

Теорема 1.6.2. *При условиях* (1.6.1) *и* (1.6.2) *для некоторого* $0 < \delta \le 1$, *для любого* $n \ge 1$ *справедливо неравенство*

$$\rho(F_n,\, \Phi) \le C_n(\delta) \cdot L_n^{2+\delta},$$

где

$$C_n(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \inf_{\substack{\gamma_0 < \gamma \le \infty \\ 0 < d < \overline{d}(\delta)}} \left\{ \frac{1}{2\alpha(\gamma) - 1} \left[\frac{\Gamma(\frac{2+\delta}{2}) a(\delta, d)}{\sqrt{2\pi}\,[b(\delta, d)]^{1+\delta/2}} + \frac{\gamma\alpha(\gamma)}{dn^{(1-\delta)/2}} \right] \right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим в Лемме 1.6.2 параметр v равным $v = \gamma/T_n (= \gamma\beta^{2+\delta}/(d\sqrt{n}))$. Тогда модуль разности характеристических функций под знаком интеграла в этой лемме можно оценить при помощи Леммы 1.6.1. Имеем

$$\rho(F_n, \Phi) \le$$

$$\le \frac{1}{2\alpha(\gamma) - 1} \left[\frac{a(\delta, d)\beta^{2+\delta}}{2\pi n^{\delta/2}} \int_{-T_n}^{T_n} |t|^{1+\delta} \exp\left\{-b(\delta, d)t^2\right\} \left(1 - \frac{|t|}{T_n}\right) dt + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma\alpha(\gamma)}{\sqrt{2\pi} T_n} \right] \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2\alpha(\gamma) - 1)} \left[\frac{a(\delta, d)\beta^{2+\delta}}{\sqrt{2\pi} n^{\delta/2}} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{1+\delta} \exp\left\{-b(\delta, d)t^2\right\} dt + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma\alpha(\gamma)}{T_n} \right] = \frac{\beta^{2+\delta}}{\sqrt{2\pi}(2\alpha(\gamma) - 1)n^{\delta/2}} \left[\frac{\Gamma(\frac{2+\delta}{2}) a(\delta, d)}{\sqrt{2\pi}\,[b(\delta, d)]^{1+\delta/2}} + \frac{\gamma\alpha(\gamma)}{dn^{(1-\delta)/2}} \right].$$

Лемма доказана.

Поскольку $C_n(\delta)$ – невозрастающая функция аргумента n при каждом $\delta \in (0, 1]$, справедливо

Следствие 1.6.1. *В условиях Теоремы* 1.6.1 *неравенство* (1.6.3) *имеет место с* $C_\delta \le C_1(\delta)$, *где*

$$C_1(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \inf_{\substack{\gamma_0 < \gamma \le \infty \\ 0 < d < \overline{d}(\delta)}} \left\{ \frac{1}{2\alpha(\gamma) - 1} \left[\frac{\Gamma(\frac{2+\delta}{2}) a(\delta, d)}{\sqrt{2\pi}\,[b(\delta, d)]^{1+\delta/2}} + \frac{\gamma\alpha(\gamma)}{d} \right] \right\}.$$

Значения константы $C_1(\delta)$ в целом довольно невелики. Однако, они все же заметно хуже значений, полученных в работах (Tysiak, 1983) и (Paditz, 1986). Возможно, оценки абсолютной константы $C_1(\delta)$ могут быть уточнены за счет использования более тонкого неравенства сглаживания, нежели то, которое составляет утверждение Леммы 1.6.2. Тем не менее, Теорема 1.6.2 позволяет получить вполне приемлемые оценки константы при ляпуновской дроби в аналоге (1.6.7) для $0 < \delta \le 1$, где супремум берется по всем распределениям F, удовлетворяющим условиям (1.6.1) и (1.6.2).

Обозначим

$$C(\delta) \equiv \lim_{d\to 0+} \frac{\Gamma(\frac{2+\delta}{2})a(\delta,d)}{2\pi\,[b(\delta,d)]^{1+\delta/2}} = \frac{2^{1-\delta/2}\Gamma(\frac{\delta+2}{2})}{\pi(1+\delta)(2+\delta)}. \tag{1.6.13}$$

Несложно убедиться, что для любого $0<\varepsilon<\varepsilon(\delta)$ существует единственный корень $d(\delta,\varepsilon)$ уравнения

$$\frac{\Gamma(\frac{2+\delta}{2})a(\delta,d)}{2\pi\,[b(\delta,d)]^{1+\delta/2}} = C(\delta)+\varepsilon,$$

лежащий в интервале $\Big(0,\,\overline{d}(\delta)\Big)$. Также можно убедиться, что для любого $\omega>0$ существует единственный корень $\gamma(\omega)$ уравнения

$$(2\alpha(\gamma)-1)\,(1+\omega)=1.$$

Теперь из Теоремы 1.6.2 мы получаем следующий результат, который делает более наглядным вид коэффициента $C_n(\delta)$.

Следствие 1.6.2. *При условиях* (1.6.1) *и* (1.6.2) *для* $0<\delta\le 1$, *для любого* $n\ge 1$ *справедливо неравенство*

$$\rho(F_n,\,\Phi) \le \inf_{\substack{0<\varepsilon<\varepsilon(\delta)\\ \omega>0}} \left\{(C(\delta)+\varepsilon)\,(1+\omega) + \frac{(2+\omega)\gamma(\omega)}{2\sqrt{2\pi}d(\delta,\varepsilon)n^{(1-\delta)/2}}\right\}\cdot\frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}}.$$

В свою очередь, из Следствия 1.6.2 вытекает

Следствие 1.6.3. *При условиях* (1.6.1) *и* (1.6.2) *для* $0<\delta<1$, *при* $n\to\infty$

$$\rho(F_n,\,\Phi)\le C(\delta)\cdot L_n^{2+\delta}+o(L_n^{2+\delta}).$$

Другими словами, при условиях (1.6.1) и (1.6.2) для $\delta\in(0,1)$ мы имеем

$$\inf_n C_n(\delta)=\lim_{n\to\infty}C_n(\delta)=C(\delta).$$

Значения константы $C(\delta)$ при некоторых δ приведены в следующей таблице:

δ	$C(\delta)$	δ	$C(\delta)$	δ	$C(\delta)$
0.05	0.2867	0.40	0.1515	0.75	0.0907
0.10	0.2592	0.45	0.1399	0.80	0.0850
0.15	0.2352	0.50	0.1294	0.85	0.0797
0.20	0.2141	0.55	0.1201	0.90	0.0750
0.25	0.1955	0.60	0.1116	0.95	0.0706
0.30	0.1791	0.65	0.1040	1.00	0.0665
0.35	0.1645	0.70	0.0970		

Сопоставляя эту таблицу с таблицей из работы (Tysiak, 1983), мы замечаем, что при всех значениях $\delta \in (0,1)$ константа $C(\delta)$ существенно меньше константы C_δ. При этом отношение $C_\delta/C(\delta)$ изменяется от 4 (при малых δ) до примерно 11 (при δ, близких к единице). Минимальное же значение отношения $C_1(\delta)/C(\delta)$ превосходит 35.

Заметим, что абсолютная константа при ляпуновской дроби в аналоге (1.6.7) для $0 < \delta \leq 1$ не является непрерывной функцией аргумента δ, так как она имеет разрыв в точке $\delta = 1$: из Следствия 1.6.3 вытекает, что

$$\lim_{\delta\to 1-} C(\delta) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}},$$

более того, из асимптотического разложения Эссеена для нерешетчатых распределений вытекает, что в случае $\delta = 1$ число $1/(6\sqrt{2\pi})$ является асимптотически правильной константой в неравенства Берри–Эссеена (см. (1.6.8)). В то же время, как мы уже отмечали, $\underline{C}(1) = C_1 = (\sqrt{10}+3)/(6\sqrt{2\pi})$ (Esseen, 1956).

Чтобы конкретизировать порядок малости величины $o(L_n^{2+\delta})$, фигурирующей в Следствии 1.6.3, заметим, что из Следствия 1.6.2, очевидно, вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.6.4. *В условиях* (1.6.1) *и* (1.6.2) *с* $\delta \in (0,1)$ *для любого* $0 < \varepsilon < \varepsilon(\delta)$ *существует число* $c(\delta,\varepsilon) \in (0,\infty)$ *такое, что выполнено неравенство*

$$\rho(F_n,\Phi) \leq (C(\delta)+\varepsilon)\cdot L_n^{2+\delta} + c(\delta,\varepsilon)\cdot (L_n^{2+\delta})^{1+\frac{1-\delta}{\delta}}.$$

В качестве $c(\delta,\varepsilon)$ *можно взять*

$$c(\delta,\varepsilon) = \inf\left\{\frac{(2+\omega)\gamma(\omega)}{2\sqrt{2\pi}d(\delta,\tau)}\ \middle|\ (\tau,\omega):\ \tau+\omega C(\delta)+\tau\omega = \varepsilon\right\}.$$

Несложно убедиться, что

$$\sup_{0<\delta\leq 1} C(\delta) = \lim_{\delta\to 0+}\frac{2^{1-\delta/2}\Gamma(\frac{2+\delta}{2})}{\pi(1+\delta)(2+\delta)} = \frac{1}{\pi} < 0.31831.$$

Поэтому в Следствии 1.6.4 можно положить $\varepsilon = 1/\pi - C(\delta)$. В этом случае мы получаем

Следствие 1.6.5. *В условиях* (1.6.1) *и* (1.6.2) *с* $\delta \in (0,1)$ *существует число* $c(\delta) \in (0,\infty)$ *такое, что выполнено неравенство*

$$\rho(F_n,\Phi) \leq \frac{1}{\pi}\cdot L_n^{2+\delta} + c(\delta)\cdot (L_n^{2+\delta})^{1+\frac{1-\delta}{\delta}}.$$

В качестве $c(\delta)$ *можно взять*

$$c(\delta) = \inf\left\{ \frac{(2+\omega)\gamma(\omega)}{2\sqrt{2\pi}d(\delta,\varepsilon)} \;\middle|\; (\varepsilon,\omega):\ (C(\delta)+\varepsilon)(1+\omega) = \frac{1}{\pi} \right\}.$$

От присутствия добавки ε в абсолютной константе при первом слагаемом в правой части Следствия 1.6.4 можно избавиться совсем. Однако платой за это будет некоторое ухудшение скорости убывания второго слагаемого. Чтобы в этом убедиться, заметим, что с помощью элементарных рассуждений можно получить оценки

$$\gamma(\omega) \le 2\pi + \frac{4}{\pi\omega}, \qquad d(\delta,\varepsilon) \ge M(\delta)\cdot\varepsilon^{2/\delta}, \tag{1.6.14}$$

где

$$M(\delta) = \left\{ \frac{8\pi z(\delta)}{2^{1-\delta/2}z(\delta)\Gamma\left(\frac{2+\delta}{2}\right) + \left(6+\delta+\frac{2^{1-\delta}}{1+\delta}\right)\left[2^{1-\delta/2}\Gamma\left(\frac{2+\delta}{2}\right)+\pi z(\delta)\right]} \right\}^{2/\delta},$$

$$z(\delta) = (1+\delta)(2+\delta).$$

Подставляя оценки (1.6.14) в неравенство, приведенное в Следствии 1.6.2, полагая $\omega = n^{-a}$ и $\varepsilon = n^{-b}$ с $a > 0$ и $b > 0$ и выбирая a и b так, чтобы минимальная скорость убывания выражений, зависящих от a и b, с ростом n была наибольшей, мы окончательно приходим к следующему “разложению” оценки равномерного расстояния между допредельной и предельной функциями распределения в центральной предельной теореме.

Следствие 1.6.6. *В условиях* (1.6.1) *и* (1.6.2) *при* $\delta \in (0,1]$

$$\rho(F_n,\,\Phi) \le \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}}\left(C(\delta) + Q_1(\delta)\tau_n + Q_2(\delta)\tau_n^2 + Q_3(\delta)\tau_n^3\right),$$

где

$$\tau_n = \tau_n(\delta) = n^{-\frac{\delta(1-\delta)}{4(1+\delta)}}, \quad Q_1(\delta) = 1 + C(\delta) + \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2}M(\delta)},$$

$$Q_2(\delta) = 1 + \frac{\sqrt{2}(1+\pi^2)}{\pi^{3/2}M(\delta)}, \quad Q_3(\delta) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}M(\delta)}.$$

К примеру, если $\delta = \frac{1}{2}$, то имеет место неравенство

$$\rho(F_n,\,\Phi) \le \frac{\beta^{2+\frac{1}{2}}}{n^{1/4}}\left(0.1294 + \frac{9.98}{n^{1/24}} + \frac{49.1008}{n^{1/12}} + \frac{21.8378}{n^{1/8}}\right).$$

Если же $\delta = \frac{3}{4}$, то

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{\beta^{2+\frac{3}{4}}}{n^{3/8}} \left(0.0907 + \frac{3.2435}{n^{1/14}} + \frac{12.6510}{n^{1/7}} + \frac{5.2896}{n^{3/14}}\right).$$

Заметим, что с учетом неравенства $C(\delta) \leq 1/\pi$ из Следствия 1.6.6 можно получить оценку

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} \left(\frac{1}{\pi} + Q_1(\delta)\tau_n + Q_2(\delta)\tau_n^2 + Q_3(\delta)\tau_n^3\right),$$

из которой вытекает, что при малых δ константу в оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме "портят" добавки, соответствующие более высоким степеням n^{-1}, нежели $\delta/2$.

Так как $\beta^{2+\delta} \geq 1$, то из Следствия 1.6.6 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.6.7. *В условиях* (1.6.1) *и* (1.6.2) *при* $\delta \in (0, 1]$

$$\rho(F_n, \Phi) \leq C(\delta) \cdot L_n^{2+\delta} + Q(\delta) \cdot \left(L_n^{2+\delta}\right)^{1+\frac{1-\delta}{2(1+\delta)}},$$

где $C(\delta)$ *определено соотношением* (1.6.13),

$$Q(\delta) = Q_1(\delta) + Q_2(\delta) + Q_3(\delta),$$

а коэффициенты $Q_j(\delta)$, $j = 1, 2, 3$, *определены в Следствии* 1.6.6.

"Гладкий" случай

В этом разделе мы рассматриваем "гладкий" случай и предполагаем, что слагаемые имеют ограниченную плотность $p(x)$:

$$\sup_x p(x) \equiv A < \infty. \tag{1.6.15}$$

Можно показать, что при условиях (1.6.1) всегда $A \geq 1/(2\sqrt{3}) \geq 0.288675$ (Прохоров, 1963).

Теорема 1.6.3. *При условиях* (1.6.1), (1.6.2) *с* $0 < \delta \leq 1$ *и* (1.6.15), *для любого* $n \geq 2$ *справедливо неравенство*

$$\rho(F_n, \Phi) \leq$$

$$\leq \inf_{0<\varepsilon<\varepsilon(\delta)} \left\{(C(\delta) + \varepsilon)\, \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} + V_n(\beta^{2+\delta}, d(\delta, \varepsilon)) + W_n(A, \beta^{2+\delta}, d(\delta, \varepsilon))\right\},$$

где $C(\delta)$ *определено в* (1.6.13)*,*

$$V_n(\beta^{2+\delta}, d) = \frac{(\beta^{2+\delta})^2}{\pi d^2 n} \exp\left\{-\frac{d^2 n}{(\beta^{2+\delta})^2}\right\},$$

$$W_n(A, \beta^{2+\delta}, d) = \frac{\beta^{2+\delta} A}{d}\left[1 - \frac{d^2}{3\pi^2 A^2 (\beta^{2+\delta})^2}\left(1 - \frac{(2d)^{2+\delta}}{\pi^{2+\delta}(\beta^{2+\delta})^{1+\delta}}\right)^3\right]^{n-2}.$$

Наряду с Леммой 1.6.1, в доказательстве Теоремы 1.6.3 используется аналог Леммы 1.6.2 для случая распределений с интегрируемыми характеристическими функциями. Приведем соответствующее утверждение.

Лемма 1.6.3. *Если* $\mathsf{E}X_1 = 0$ *и выполнено условие* (1.6.15)*, то для всех* $n \geq 2$

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{f_n(t) - e^{-t^2/2}}{t}\right| dt.$$

Доказательство. В силу ограниченности $p\,(x)$ по формуле Планшереля мы имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p^2(x) dx < 2\pi A < \infty,$$

и так как $|f(t)| \leq 1$, то при всех $n \geq 2$ характеристическая функция $f_n(t) = (f(t/\sqrt{n}))^n$ абсолютно интегрируема. Остается лишь сослаться на замечание к Лемме 12.2 в (Бхаттачария и Ранга Рао, 1982), с. 114, утверждающее, что аналогичное утверждение справедливо не только для вероятностных, но и для произвольных конечных мер, удовлетворяющих соответствующим условиям гладкости.

Доказательство Теоремы 1.6.3. На основании Леммы 1.6.3 мы имеем

$$2\pi\rho(F_n, \Phi) \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{f_n(t) - e^{-t^2/2}}{t}\right| dt \equiv I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int\limits_{|t| \leq T_n} \frac{|f_n(t) - e^{-t^2/2}|}{|t|}\, dt,$$

$$I_2 = \int\limits_{|t| > T_n} |t|^{-1} e^{-t^2/2} dt, \quad I_3 = \int\limits_{|t| > T_n} \frac{|f_n(t)|}{|t|} dt,$$

а T_n определено в формулировке Леммы 1.6.1:

$$T_n = \frac{d\sqrt{n}}{\beta^{2+\delta}}, \quad d \in (0, \sqrt{2}).$$

Интеграл I_1 оценивается с помощью Леммы 1.6.1:

$$I_1 \le a(\delta, d)\frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t|^{1+\delta} \exp\{-b(\delta, d)t^2\}dt =$$

$$= \frac{a(\delta, d)}{[b(\delta, d)]^{1+\delta/2}} \cdot \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} \int\limits_{0}^{+\infty} y^{\delta/2} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(\frac{2+\delta}{2})a(\delta, d)}{[b(\delta, d)]^{1+\delta/2}} \cdot \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}}.$$

При этом область возможных значений параметра d сужается до интервала $(0,\, d_0(\delta))$, определяющего область сходимости интеграла, где $d_0(\delta)$ – единственный нуль монотонно убывающей функции $b(\delta, d)$ на $(0, \sqrt{2})$.

Интеграл I_2 оценивается непосредственно:

$$I_2 \le \frac{2}{T_n^2} \int\limits_{T_n}^{\infty} t e^{-t^2/2} dt = \frac{2}{T_n^2} \int\limits_{T_n^2}^{\infty} e^{-y} dy = \frac{2}{T_n^2} \exp\{-T_n^2\} =$$

$$= \frac{2(\beta^{2+\delta})^2}{d^2 n} \exp\Big\{ - \frac{d^2 n}{(\beta^{2+\delta})^2} \Big\} \equiv 2\pi V_n(\beta^{2+\delta}, d).$$

Поскольку $f_n(t) = (f(t/\sqrt{n}))^n$,

$$I_3 = \int\limits_{|t| > d/\beta^{2+\delta}} \frac{|f(t)|^n}{|t|} dt \le \frac{\beta^{2+\delta}}{d} \int\limits_{|t| > d/\beta^{2+\delta}} |f(t)|^n \, dt.$$

Оценим подынтегральную функцию, воспользовавшись Следствием 2.5.1 из книги (Ushakov, 1999), согласно которому, если при некотором $s > 0$ существует $\mathsf{E}\,|X_1|^s \equiv \beta^s$ и $\sup\limits_x p(x) = A < \infty$, то для любого $\gamma \in (0, 1)$

$$|f(t)| \le 1 - \frac{(1-\gamma)^3}{3\pi^2 A^2} t^2, \quad \text{если } |t| \le \frac{\pi \gamma^{1/s}}{2(\beta^s)^{1/s}} \equiv t_\gamma,$$

$$|f(t)| \le 1 - \frac{(1-\gamma)^3 \gamma^{2/s}}{12 A^2 (\beta^s)^{2/s}}, \quad \text{если } |t| > \frac{\pi \gamma^{1/s}}{2(\beta^s)^{1/s}}. \tag{1.6.16}$$

В нашем случае $s = 2+\delta$, ниже мы будем использовать это обозначение. Так как $\beta \geq 1$ и $d < 1$, то в качестве γ можно взять

$$\gamma = \left(\frac{2d}{\pi(\beta^s)^{(s-1)/s}}\right)^s \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^s < 1.$$

При таком выборе γ граница интегрирования $d/\beta^{2+\delta} = t_\gamma$, и с учетом (1.6.16) оценка для I_3 примет вид

$$I_3 = \frac{\beta^{2+\delta}}{d} \int\limits_{|t|>t_\gamma} |f(t)|^n \, dt \leq$$

$$\leq \frac{\beta^{2+\delta}}{d} \int\limits_{|t|>t_\gamma} |f(t)|^2 \left(1 - \frac{(1-\gamma)^3 \gamma^{2/s}}{12A^2(\beta^{2+\delta})^{2/(2+\delta)}}\right)^{n-2} dt \leq$$

$$\leq \frac{\beta^{2+\delta}}{d} \left(1 - \frac{(1-\gamma)^3 \gamma^{2/s}}{12A^2(\beta^{2+\delta})^{2/(2+\delta)}}\right)^{n-2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt.$$

По формуле Планшереля имеем

$$I_3 \leq \frac{2\pi\beta^{2+\delta}}{d} \left(1 - \frac{(1-\gamma)^3 \gamma^{2/s}}{12A^2(\beta^{2+\delta})^{2/(2+\delta)}}\right)^{n-2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p^2(x) dx \leq$$

$$\leq \frac{2\pi A\beta^{2+\delta}}{d} \left(1 - \frac{(1-\gamma)^3 \gamma^{2/s}}{12A^2(\beta^{2+\delta})^{2/(2+\delta)}}\right)^{n-2}.$$

Подставляя $s = 2 + \delta$ и

$$\gamma = \Big(\frac{2d}{\pi}\Big)^{2+\delta} \cdot (\beta^{2+\delta})^{-(1+\delta)/(2+\delta)},$$

получаем оценку

$$I_3 \leq 2\pi \frac{\beta^{2+\delta} A}{d} \Big[1 - \frac{d^2}{3\pi^2 A^2 (\beta^{2+\delta})^2} \Big(1 - \frac{(2d)^{2+\delta}}{\pi^{2+\delta}(\beta^{2+\delta})^{1+\delta}}\Big)^3\Big]^{n-2} \equiv$$

$$\equiv 2\pi W_n(A, \beta^{2+\delta}, d).$$

Собирая оценки для интегралов I_1, I_2, I_3, получаем

$$\rho(F_n, \Phi) \leq$$

$$\leq \inf_{0<d\leq \bar{d}(\delta)} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{2+\delta}{2}) a(\delta, d)}{2\pi] b(\delta, d)]^{1+\delta/2}} \cdot \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} + V_n(\beta^{2+\delta}, d) + W_n(A, \beta^{2+\delta}, d) \right\}.$$

Теперь для доказательства теоремы достаточно заметить, что функция

$$\frac{\Gamma(\frac{2+\delta}{2})}{2\pi}\cdot\frac{a(\delta,d)}{[b(\delta,d)]^{1+\delta/2}}$$

монотонно и неограниченно возрастает по d на интервале $(0,\,d_0(\delta))$, причем ее инфимум равен пределу в нуле справа, что в точности совпадет с определением $C(\delta)$. Теорема доказана.

Следует заметить, что для любого $\delta\in(0,1]$ сумма

$$V_n(\beta^{2+\delta},d)+W_n(A,\beta^{2+\delta},d)$$

убывает экспоненциально быстро с ростом n.

Для случая $\delta=1$ (то есть при условии (1.6.4) из Теоремы 1.6.3 мы получаем следующее утверждение. Пусть $\varepsilon>0$ и пусть d_ε – единственный корень уравнения

$$\frac{a(1,d)}{4\sqrt{\pi}b^{3/2}(1,d)}=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}+\varepsilon$$

(лежащий в интервале $(0,1.17]$).

Следствие 1.6.9. *Пусть выполнены условия* (1.6.1), (1.6.4) *и* (1.6.15). *Тогда для любого $n\geq 2$ справедлива оценка*

$$\rho(F_n,\Phi)\leq\inf_{\varepsilon>0}\left\{\left(\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}+\varepsilon\right)\frac{\beta^3}{\sqrt{n}}+V_n(\beta^3,d_\varepsilon)+W_n(A,\beta^3,d_\varepsilon)\right\},$$

где

$$V_n(\beta^3,d)=\frac{(\beta^3)^2}{\pi d^2 n}\exp\left\{-\frac{d^2n}{(\beta^3)^2}\right\},$$

$$W_n(A,\beta^3,d)=\frac{A\beta^3}{d}\left[1-\frac{d^2}{3\pi^2A^2(\beta^3)^2}\left(1-\frac{8d^3}{\pi^3(\beta^3)^2}\right)^3\right]^{n-2}.$$

Следствие 1.6.10. *При условиях* (1.6.1), (1.6.4) *и* (1.6.15)

$$\sup\limsup_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\beta^3}\rho(F_n,\Phi)\leq\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}<0.0665,$$

где супремум берется по всем распределениям, удовлетворяющим условиям (1.6.1), (1.6.4) *и* (1.6.15), *что означает, что для гладких распределений функция $\underline{C}(\delta)$ непрерывна в точке $\delta=1$.*

Аналогичный результат, очевидно, вытекает из асимптотического разложения Эссеена для случая слагаемых с нерешетчатыми распределениями.

Стремясь избавиться от присутствия ε в формулировках Теоремы 1.6.3 и Следствия 1.6.9, рассмотрим подробнее структуру оценки точности нормальной аппроксимации для случая гладких распределений. Попытаемся уточнить вид члена $o(L_n^{2+\delta})$ в Следствии 1.6.3 для такой ситуации. С этой целью заметим, что из Теоремы 1.6.3 вытекает существование таких не зависящих от n и $d(\delta,\varepsilon)$ положительных конечных констант q', q'', Q' и Q'', что

$$\rho(F_n,\Phi) \le C(\delta)\cdot L_n^{2+\delta} + \varepsilon\cdot L_n^{2+\delta} + \frac{Q'}{(d(\delta,\varepsilon))^2\, n}\exp\{-q'\,(d(\delta,\varepsilon))^2\, n\}+$$

$$+\frac{Q''}{d(\delta,\varepsilon)}\exp\{-q''\,(d(\delta,\varepsilon))^2\, n\}. \tag{1.6.17}$$

В качестве q', q'', Q', Q'' можно взять

$$q' = q'(\beta^{2+\delta}) = (\beta^{2+\delta})^{-2}, \qquad Q' = Q'(\beta^{2+\delta}) = \frac{(\beta^{2+\delta})^2}{\pi},$$

$$q'' = q''(A,\beta^{2+\delta}) = \frac{1}{3\pi^2A^2(\beta^{2+\delta})^2}\left(1-\frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}\right)^3 \approx \frac{0.00262}{A^2(\beta^{2+\delta})^2},$$

$$Q'' = Q''(A,\beta^{2+\delta}) = e^2A\beta^{2+\delta} \approx 7.38905\beta^{2+\delta}A.$$

Выбирая последовательность $\varepsilon=\varepsilon_n$ так, чтобы порядки убывания второго и четвертого слагаемых в соотношении (1.6.17) совпадали с точностью до логарифмического множителя, мы приходим к следующему утверждению.

Следствие 1.6.11. *В условиях* (1.6.1), (1.6.2) *и* (1.6.15) *существует число* $D = D(\delta, A, \beta^{2+\delta}) \in (0,\infty)$ *такое, что*

$$\rho(F_n,\Phi) \le C(\delta)\cdot L_n^{2+\delta} + D\cdot (L_n^{2+\delta})^{3/2}|\log L_n^{2+\delta}|^{\delta/4}.$$

При этом для D *справедлива оценка*

$$D = D(\delta,A,\beta^{2+\delta}) \le \frac{(A\beta^{2+\delta})^{\delta/2}}{M(\delta)}\left(\frac{2+3\delta}{4}\right)^{\delta/4} + \frac{0.0034}{A^2(2+3\delta)} + \frac{0.7565}{\sqrt{2+3\delta}}.$$

В частности, при $\delta=1$ мы получаем

Следствие 1.6.12. *В условиях* (1.6.1), (1.6.4) *и* (1.6.15) *существует число* $D'(A,\beta^3) = D(1,A,\beta^3)$ *такое, что*

$$\rho(F_n,\Phi) \le \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\cdot L_n^3 + D'(A,\beta^3)\cdot (L_n^3)^{3/2}|\log L_n^3|^{1/4}.$$

Другими словами,

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} + D'(A, \beta^3) \cdot \frac{(\log n)^{1/4}}{n^{3/4}}.$$

Для $D'(A, \beta^3)$ *справедлива оценка*

$$D'(A, \beta^3) \leq 928.2062\sqrt{A\beta^3} + 0.0007A^{-2} + 0.3384.$$

1.6.4 Неравномерные оценки

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределённые случайные величины с $\mathsf{E}X_1 = \mu$, $\mathsf{D}X_1 = \sigma^2$ и $\mathsf{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta \in (0, 1]$. Обозначим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$,

$$F_n(x) = \mathsf{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = F^{*n}(x\sigma\sqrt{n} + n\mu).$$

Справедлива следующая неравномерная оценка:

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C(\delta)}{n^{\delta/2}} \cdot \frac{\mathsf{E}|X_1 - \mu|^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}(1 + |x|^{2+\delta})}, \tag{1.6.18}$$

где $C(\delta)$ – абсолютная постоянная. В работе (Paditz, 1989) показано, что

$$\begin{gathered} C(0.1) \leq 14.88, \quad C(0.2) \leq 16.24, \quad C(0.3) \leq 17.43, \quad C(0.4) \leq 18.78, \\ C(0.5) \leq 20.32, \quad C(0.6) \leq 22.07, \quad C(0.7) \leq 24.07, \quad C(0.8) \leq 26.35, \\ C(0.9) \leq 29.01, \quad C(1.0) \leq 31.94. \end{gathered}$$

В частности, при $\delta = 1$ получаем неравенство

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{31.94}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\mathsf{E}|X_1 - \mu|^3}{\sigma^3(1 + |x|^3)}, \tag{1.6.19}$$

Пусть X_1, X, $\ldots$, X_n – независимые одинаково распределённые случайные величины и

$$\mathsf{E}X_1 = 0, \quad \mathsf{D}X_1 = \sigma^2, \quad \mathsf{E}|X_1|^r < \infty$$

для некоторого $r \geq 3$. Тогда

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C(r)}{(1 + |x|)^r} \left(\frac{\mathsf{E}|X_1|^3}{\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{\mathsf{E}|X_1|^r}{n^{r/2-1}\sigma^r}\right), \tag{1.6.20}$$

где константа $C(r) > 0$ зависит только от r (Петров, 1972).

Другие вопросы точности нормальной аппроксимации детально разобраны в книгах (Бхаттачария и Ранга Рао, 1976) и (Senatov, 1998).

1.6.5 Устойчивые и безгранично делимые распределения

Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены. Из Теоремы 1.3.7 вытекает, что для сходимости распределений их последовательных сумм, нормированных и центрированных соответствующим образом, к нормальному закону необходимо и достаточно существования конечной дисперсии слагаемых. Возникает вполне резонный вопрос: а к каким распределениям могут сходиться распределения нормированных сумм независимых и одинаково распределенных случайных величин, если у слагаемых нет моментов второго порядка? Оказывается, что класс предельных законов для таких сумм совпадает с классом *устойчивых распределений*.

Функция распределения $G(x)$ и соответствующая ей характеристическая функция $g(t)$ называются *устойчивыми*, если для любых $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$ найдутся числа $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$g(a_1 t)g(a_2 t) \equiv e^{ibt} g(at). \tag{1.6.21}$$

Несложно убедиться в том, что условие (1.6.21) эквивалентно тому, что для любых $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1 \in \mathbb{R}$ и $b_2 \in \mathbb{R}$ существуют числа $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$G(a_1 x + b_1) * G(a_2 x + b_2) \equiv G(ax + b).$$

Характеристическая функция $g(t)$ устойчива тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде

$$g(t) = \exp\Big\{iat - c|t|^\alpha\Big(1 + ib\frac{t}{|t|}Q(t,\alpha)\Big)\Big\},$$

где

$$Q(t,\alpha) = \begin{cases} \tan\frac{\pi\alpha}{2}, & \text{если } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}\log|t|, & \text{если } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Параметр α при этом называется *характеристическим показателем*. Все невырожденные устойчивые распределения абсолютно непрерывны. Примерами устойчивых распределений являются нормальное ($\alpha = 2$), Коши ($\alpha = 1$), Леви ($\alpha = 1/2$) с плотностью

$$p_{1/2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{2\pi x^3}}\exp\Big\{-\dfrac{\sigma^2}{2x}\Big\}, & x > 0 \end{cases}$$

и распределение с плотностью $\overline{p}(x) = p_{1/2}(|x|)$ при $x < 0$ и $\overline{p}(x) = 0$ при $x > 0$. Другие примеры устойчивых законов, плотности которых выражаются через элементарные функции, неизвестны.

В 1925 г. П. Леви доказал следующую фундаментальную теорему.

Теорема 1.6.3. *Для того чтобы функция распределения $F(x)$ могла быть предельной при $n \to \infty$ для распределений сумм*

$$S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n - a_n}{b_n}$$

независимых одинаково распределенных случайных величин при некотором выборе чисел $a_n \in \mathbb{R}$ и $b_n > 0$, необходимо и достаточно, чтобы она была устойчивой.

Полное доказательство этой теоремы см., например, в (Хинчин, 1938) и (Гнеденко и Колмогоров, 1949).

Устойчивые законы являются хорошо известными примерами распределений с тяжелыми хвостами. Если $G_\alpha(x)$ – устойчивая функция распределения с характеристическим показателем $\alpha \in (0, 2)$, то

$$G_\alpha(-x) + 1 - G_\alpha(x) \sim \frac{c}{x^\alpha}$$

при $x \to \infty$, где $c > 0$. Более того, если Z_α – случайная величина с функцией распределения $G_\alpha(x)$, $\alpha \in (0, 2)$, то $\mathsf{E}|Z_\alpha|^\gamma < \infty$ для любого $\gamma < \alpha$, но моменты величины Z_α порядков, больше или равных α, не существуют. Таким образом, дисперсии всех устойчивых законов за исключением нормального не определены (иногда говорят, что дисперсии не-нормальных устойчивых законов "бесконечны").

Устойчивые законы, а также отрицательно биномиальное, гамма-распределения и распределение Пуассона являются примерами безгранично делимых законов. Функция распределения $F(x)$ с характеристической функцией $f(t)$ называются *безгранично делимыми*, если для любого $n \geq 1$ существует характеристическая функция $f_n(t)$ такая, что

$$f(t) \equiv (f_n(t))^n$$

Безгранично делимые характеристические функции нигде не обращаются в нуль.

Рассмотрим предельную схему, обобщающую рассмотренную выше *схему нарастающих сумм* S_n случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, образующих *одну* последовательность. А именно, предположим, что распределения слагаемых могут изменяться вместе с изменением числа слагаемых в сумме. Пусть $\{m_n\}_{n \geq 1}$ – последовательность натуральных чисел.

Пусть $\{\xi_{n,j}\}_{j\geq 1}$, $n = 1, 2, \ldots$ – последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин. Говорят, что случайные величины $\{\xi_{n,j}\}$ удовлетворяют *условию равномерной предельной малости*, если для любого положительного числа ϵ

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\leq j\leq m_n} \mathsf{P}(|\xi_{n,j}| > \epsilon) = 0.$$

В 1937 г. А. Я. Хинчин доказал следующую фундаментальную теорему.

Теорема 1.6.4. *Для того чтобы функция распределения $F(x)$ могла быть предельной при $n \to \infty$ для распределений сумм $S_{n,m_n} = \xi_{n,1} + \ldots + \xi_{n,m_n}$ независимых случайных величин, удовлетворяющих условию равномерной предельной малости, необходимо и достаточно, чтобы она была безгранично делимой.*

Доказательство см., например, в (Гнеденко и Колмогоров, 1949).

1.7 Суммы случайных индикаторов. Теорема Пуассона

Рассмотрим последовательность однотипных независимых испытаний (испытаний Бернулли), в каждом из которых некоторое событие A наступает с вероятностью p. Пусть случайная величина X_k равна 1, если в k-ом испытании событие A произошло, и 0 в противном случае. Тогда случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы и

$$\mathsf{P}(X_k = 1) = p, \quad \mathsf{P}(X_k = 0) = 1 - p = q.$$

Образуем сумму

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n,$$

которая равна числу появлений события A в первых n испытаниях. Легко видеть, что $\mathsf{E}S_n = np$, $\mathsf{D}S_n = npq$. Теорема Муавра–Лапласа устанавливает, что если дисперсии $\mathsf{D}S_n = npq$ достаточно велика (что наблюдается при большом n, а p и q существенно отличных от нуля и единицы), то распределение случайной величины S_n близко к нормальному. Однако зачастую, например, в страховой деятельности, приходится рассматривать “редкие"события A, вероятность p появления которых в каждом конкретном испытании мала (то есть близка к нулю). При этом значение n может быть умеренным. Например, если $p = 0.02$ и $n = 200$, то $np = 2$ и $npq = 1.96$. В этом случае можно пользоваться пуассоновской аппроксимацией для распределения случайной величины S_n. А именно, справедлив следующий результат.

Теорема 1.7.1. *Пусть $np = \lambda > 0$, $k - 1 \le \frac{n}{4}$, $p \le \frac{1}{4}$. Тогда*

$$\mathsf{P}(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp\{-\lambda + r_n(k)\},$$

где

$$\frac{k\lambda}{n} + 2\log\frac{4}{3} \cdot \frac{k(1-k)}{n} - \frac{2\lambda^2}{3n} \le r_n(k) \le \frac{k\lambda}{n} + \frac{k(1-k)}{2n}.$$

Доказательство. Преобразуем биномиальную вероятность $\mathsf{P}(S_n = k)$ следующим образом:

$$\mathsf{P}(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot\ldots\cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) (1-p)^{n-k} e^{np} = \frac{\lambda^k}{k!} \exp\{-\lambda + r_n(k)\}.$$

Таким образом, достаточно показать, что остаточный член

$$r_n(k) = \log\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot\ldots\cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) (1-p)^{n-k} e^{np}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \log\left(1 - \frac{i}{n}\right) + (n-k)\log(1-p) + \lambda$$

удовлетворяет условиям теоремы. Из неравенства

$$\log(1-x) \le -x,$$

справедливого при $0 \le x \le 1$, следует соотношение

$$r_n(k) \le -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{n} - (n-k)p + \lambda = \frac{k(1-k)}{2n} + kp = \frac{k(1-k) + 2k\lambda}{2n}.$$

Далее, так как при $0 \le x \le \frac{1}{4}$ справедливы неравенства

$$\log(1-x) \ge -4\log\frac{4}{3} \cdot x, \qquad \log(1-x) + x \ge -\frac{x^2}{2(1-x)} \ge -\frac{2x^2}{3}$$

(первое устанавливается элементарно, второе вытекает из разложения функции $\log(1-x)$ в ряд Тейлора), то

$$r_n(k) \ge -4\log\frac{4}{3} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{n} + kp - \frac{2np^2}{3} = 2\log\frac{4}{3} \cdot \frac{k(1-k)}{n} + \frac{k\lambda}{n} - \frac{2\lambda^2}{3n}.$$

Теорема доказана. □

Теорема 1.7.1 устанавливает естественность приближения

$$\mathsf{P}(S_n = k) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad (1.7.1)$$

которое обладает высокой точностью даже при умеренных n. Однако из этой же теоремы вытекает, что аппроксимация

$$\mathsf{P}(S_n = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\exp\left\{-\lambda + \alpha\cdot\frac{k(1-k)}{n} + \frac{k\lambda}{n}\right\},$$

где $0.5 \le \alpha \le 0.5754$, более точна.

Из оценки остаточного члена в теореме 1.7.1 вытекает, что предельной схемы, в которой лишь n стремится к бесконечности, недостаточно для строгого обоснования формулы (1.7.1), то есть для получения предельной теоремы, в которой $\mathsf{P}(S_n = k) \longrightarrow e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Необходимо, чтобы одновременно и $p = \mathsf{P}(X_k = 1) \to 0$. Но этого нельзя добиться, рассматривая *схему "нарастающих"сумм*, в которой последовательность $X_1, X_2, \ldots$ остается *фиксированной*.

Рассмотрим *схему серий* случайных величин

$$\begin{array}{l} X_{1,1} \\ X_{2,1}, X_{2,2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Первый индекс указывает на номер серии. Предположим, что в каждой серии случайные величины $X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n}$, $n = 1, 2, \ldots$, независимы и

$$\mathsf{P}(X_{n,i} = 1) = p_n = 1 - q_n.$$

Из Теоремы 1.7.1 вытекает следующий классический результат, известный как *теорема Пуассона.* Положим

$$S_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}.$$

Теорема 1.7.2. *Если $np_n \longrightarrow \lambda > 0$ при $n \to \infty$, то при каждом фиксированном $k = 0, 1, 2, \ldots$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(S_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Естественным обобщением рассмотренной ситуации является та, в которой случайные величины $X_{n,j}$ могут иметь разное распределение даже в рамках одной и той же серии. Предположим теперь, что

$$\mathsf{P}(X_{n,j} = 1) = p_{n,j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Подобную схему серий неодинаково распределенных независимых индикаторов принято называть *схемой Пуассона*. Распределение случайной величины S_n в такой схеме иногда называют *пуассон-биномиальным*.

Теорема 1.7.3. *Если*

$$\max_{1\le j\le n} p_{n,j} \longrightarrow 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} p_{n,j} \longrightarrow \lambda \in (0,\infty)$$

при $n \to \infty$, *то при каждом фиксированном* $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(S_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем теорему методом производящих функций. Символ $f_X(s)$ будет обозначать производящую функцию случайной величины X в точке s:

$$f_X(s) = \mathsf{E}s^X, \qquad |s| \le 1.$$

Тогда, очевидно,

$$f_{X_{n,j}}(s) = \mathsf{E}s^{X_{n,j}} = 1 + p_{n,j}(s-1).$$

Поскольку случайные величины $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ независимы, мы имеем

$$f_{S_n}(s) = \mathsf{E}s^{S_n} = \prod_{j=1}^{n} f_{X_{n,j}}(s) = \prod_{j=1}^{n}(1 + p_{n,j}(s-1)).$$

Далее, так как

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} p_{n,j}^2 \le \lim_{n\to\infty}\max_{1\le j\le n} p_{n,j} \cdot \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} p_{n,j} = 0$$

и при любом фиксированном s, $|s| \le 1$,

$$\log f_{S_n}(s) = \sum_{j=1}^{n}\log(1 + p_{n,j}(s-1)) \sim \sum_{j=1}^{n} p_{n,j}(s-1) \sim \lambda(s-1) \quad (n\to\infty),$$

то при любом фиксированном s, $|s| \le 1$,

$$f_{S_n}(s) \longrightarrow e^{\lambda(s-1)}.$$

Но последнее выражение представляет собой производящую функцию распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Теорема доказана. □

Теоремы 1.7.1 – 1.7.3 описывают поведение числа редко наблюдаемых событий при большом числе испытаний. Их иногда называют *теоремами о редких событиях* или *законами малых чисел*. Именно эти теоремы могут рассматриваться как математическое обоснование использования пуассоновского распределения во многих прикладных задачах.

Рассмотрим теперь вопрос о скорости сходимости в законах малых чисел. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$ обозначим $\pi_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $b_k = \mathsf{P}(S_n = k)$. Обозначим $\Pi = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots\}$, $\mathrm{B} = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$. Определим *расстояние по вариации* между распределением случайной величины S_n и распределением Пуассона по формуле

$$\|\mathrm{B} - \Pi\| = \sum_{k=0}^{\infty} |b_k - \pi_k|.$$

Следующие результаты мы приведем без доказательств, ограничившись лишь соответствующими ссылками.

Теорема 1.7.4. *Если $p_{n,1} = \ldots = p_{n,n} = p$, $\lambda = np$, то справедливо неравенство*

$$\|\mathrm{B} - \Pi\| \le 2p \min\{2, \lambda\}.$$

Доказательство см. в (Прохоров, 1953). □

В последующих теоремах мы будем использовать обозначения

$$\lambda = p_{n,1} + \ldots + p_{n,n}, \quad \lambda_2 = p_{n,1}^2 + \ldots + p_{n,n}^2.$$

Легко видеть, что

$$\mathsf{E}S_n = \lambda, \qquad \mathsf{D}S_n = \lambda - \lambda_2. \tag{1.7.2}$$

Теорема 1.7.5. *Справедливо неравенство*

$$\|\mathrm{B} - \Pi\| \le 2 \min\{9, \lambda\} \max_{1 \le j \le n} p_{n,j}.$$

Доказательство см. в (LeCam, 1960). □

Теорема 1.7.6. *Справедливо неравенство*

$$\|\mathrm{B} - \Pi\| \le 2.08 \frac{\lambda_2}{\lambda}.$$

Доказательство см. в (Пресман, 1985). □

Теорема 1.7.7. *Если* $\lambda \to \infty$ *и* $\lambda_2/\lambda \to 0$, *то*

$$\|\mathrm{B} - \Pi\| \sim \frac{\lambda_2}{\sqrt{2\pi e}\lambda}.$$

Доказательство см. в (Deheuvels and Pfeifer, 1987), (Deheuvels and Pfeifer, 1988). □

Из последней теоремы вытекает, что условие $\max_{1\leq j\leq n} p_{n,j} \to 0$, фигурирующее в Теореме 1.7.3, не является необходимым для справедливости пуассоновской аппроксимации для пуассон-биномиального распределения. На самом же деле в качестве необходимого и достаточного условия нужно рассматривать условие $\lambda_2/\lambda \to 0$, которое в силу (1.7.2) равносильно тому, что

$$\frac{\mathsf{D}S_n}{\mathsf{E}S_n} \longrightarrow 1.$$

К обсуждению точности пуасоновской аппроксимации для пуассон-биномиального распределения мы вернемся в разделе 5.1.

1.8 Случайные процессы

Определение 1.8.1. Случайным процессом называется семейство случайных величин $X(\tau) = X(\omega, \tau)$, заданных на одном (базовом) вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ и зависящих от параметра τ, принимающего значения из некоторого множества T.

Из определения 1.8.1 следует, что случайный процесс имеет двоякую сущность. С одной стороны, если $\omega \in \Omega$ фиксировано, то $X(\tau) = X(\omega, \tau)$ есть некоторая функция от $\tau \in T$. С другой стороны, если $t \in T$ фиксировано, то $X(t) = X(\omega, t)$ – случайная величина, определенная на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Эту случайную величину иногда называют *проекцией* случайного процесса в точке t.

Договоримся обозначать параметр случайного процесса греческой буквой, если речь идет о процессе как об элементе пространства случайных функций (строгое определение случайной функции мы дадим чуть позже), и латинской буквой, если речь идет о случайной величине, являющейся проекцией процесса в выделенной точке. Так, например, $\{X(\tau), \tau \in T\}$ или $X(\tau)$ есть случайный процесс, определенный на T, а $\{X_n(t_n)\}_{n\geq 1}$, $t_n \in T$, – последовательность случайных величин, являющихся проекциями процессов $X_n(\tau)$ в некоторых точках $t_n \in T$.

Очевидно, что последовательности случайных величин $X_1, X_2, \dots$ являются случайными процессами с $T = \{1, 2, \dots\}$. Процессы, определенные на множестве $T = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ или его подмножестве, обычно называются *процессами с дискретным временем* или *случайными последовательностями*. Если же множество T представляет из себя интервал (конечный или бесконечный), то семейство случайных величин $X(\tau) = X(\omega, \tau)$ принято называть *случайным процессом с непрерывным временем*. Тем не менее, параметр τ в определении случайного процесса, конечно, не обязан иметь смысл времени.

Рассмотрим случайный процесс $X(\tau) = X(\omega, \tau)$. Как уже было отмечено, при фиксированном $\omega_0 \in \Omega$ мы получаем функцию $X(\tau) = X(\omega_0, \tau)$, $\tau \in T$, которую принято называть *траекторией* случайного процесса $X(\tau)$. Пусть $\mathcal{S}$ – функциональное пространство всех возможных траекторий случайного процесса $X(\tau)$. В этом случае случайный процесс $X(\tau)$ можно рассматривать как случайный элемент, принимающий значения в пространстве $\mathcal{S}$. Остановимся на данной трактовке определения 1.8.1 более подробно.

Итак, пусть $\mathcal{S}$ – некоторое метрическое пространство. Рассмотрим вероятностные меры, определенные на классе Σ всех борелевских подмножеств пространства $\mathcal{S}$. Класс Σ представляет собой σ-алгебру, порожденную всеми открытыми подмножествами пространства $\mathcal{S}$, то есть минимальную σ-алгебру, содержащую все открытые подмножества. Вероятностная мера P на Σ – это неотрицательная счетно-аддитивная функция множеств $\mathsf{P} : \Sigma \to [0, 1]$ такая, что $\mathsf{P}(\mathcal{S}) = 1$.

Пусть X есть отображение базового вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ в метрическое пространство $\mathcal{S}$. Если отображение X является измеримым, то есть $\{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ для любого множества $B \in \Sigma$, то X называется *случайным элементом*. Причем, если пространство $\mathcal{S}$ является пространством вещественнозначных функций, то X принято называть *случайной функцией* или *случайным процессом*. Далее в текущем разделе мы будем иметь дело только со случайными процессами.

Определение 1.8.2. Распределением случайного процесса X называется вероятностная мера P_X, заданная на измеримом пространстве $(\mathcal{S}, \Sigma)$, определенная для всех множеств $A \in \Sigma$ следующим образом:

$$\mathsf{P}_X(A) = \mathsf{P}(\{\omega \mid X(\omega) \in A\}) \equiv \mathsf{P}(X \in A).$$

При фиксированных значениях $t_1, \dots, t_k$, $t_i \in T$, $i = 1, \dots, k$, мы получаем k-мерный случайный вектор $(X(\omega, t_1), \dots, X(\omega, t_k))$. Распределения этих случайных векторов для различных $k \geq 1$ и $t_1, \dots, t_k$ называются *конечномерными распределениями* процесса $\{X(\tau),\ \tau \in T\}$.

Обозначим

$$F_{t_1,\dots,t_k}(x_1,\dots,x_k) = \mathsf{P}\left(\{\omega \mid X(\omega,t_1) < x_1,\dots,X(\omega,t_k) < x_k\}\right).$$

Определение 1.8.3. Случайный процесс $\{X(\tau),\ \tau \in T \subseteq \mathbb{R}\}$ называется процессом с независимыми приращениями, если для любых $n \geq 1$, любых $t_i \in T$, $i = 0,\dots,n$, таких, что $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, случайные величины

$$X(t_0),\ X(t_1) - X(t_0),\ \dots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})$$

независимы в совокупности.

Определение 1.8.4. Случайный процесс $\{X(\tau),\ \tau \in T\}$ называется однородным (по времени), если

$$X(t+h) - X(t) \stackrel{d}{=} X(s+h) - X(s)$$

для всех t, s и $h \geq 0$ таких, что $t \in T$, $t+h \in T$, $s \in T$, $s+h \in T$.

Определение 1.8.5. Случайный процесс $\{X(\tau),\ \tau \in T\}$ называется стохастически непрерывным, если для любых $t \in T$ и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{s \to t,\ s \in T} \mathsf{P}\left(|X(s) - X(t)| > \varepsilon\right) = 0.$$

Определение 1.8.6. Однородный стохастически непрерывный случайный процесс с независимыми приращениями, определенный на $T = [0,\infty)$, P-почти все траектории которого выходят из нуля, непрерывны справа и имеют конечные пределы слева, называется процессом Леви.

Важным примером случайного процесса с непрерывными траекториями, который можно рассматривать как модель непрерывного хаотического движения, является винеровский процесс, служащий для описания координаты частицы, подверженной броуновскому движению.

Определение 1.8.7. Процесс Леви $W_{a,\sigma^2}(\tau)$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, такой, что при $t > 0$ проекция $W_{a,\sigma^2}(t)$ имеет нормальное распределение с параметрами at и $\sigma^2 t$, называется винеровским процессом или процессом броуновского движения с коэффициентами сноса a и диффузии σ^2. Винеровский процесс $W_{0,1}(\tau)$ называется стандартным винеровским процессом.

Еще одним случайным процессом, широко используемым в качестве математической модели хаотических потоков событий, является пуассоновский процесс (см. ниже).

Определение 1.8.8. Процесс Леви $N_\lambda(\tau)$ называется пуассоновским процессом с параметром $\lambda > 0$, если при $t > 0$ проекция $N_\lambda(t)$ имеет пуассоновское распределение с параметром λt.

Можно показать, что пуассоновский процесс является целочисленным и обладает неубывающими кусочно постоянными траекториями. Заметим, что λ имеет смысл среднего числа скачков пуассоновского процесса за единицу времени. Параметр λ называется *интенсивностью* пуассоновского процесса. Пуассоновский процесс с единичной интенсивностью договоримся называть *стандартным пуассоновским процессом.*

Глава 2

Некоторые свойства случайных сумм

2.1 Элементарные свойства случайных сумм

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Пусть N – неотрицательная целочисленная случайная величина. Предположим, что случайные величины $N, X_1, X_2, \ldots$ определены на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ и независимы. Под *случайной суммой* $S_N = X_1 + \ldots + X_N$ мы будем понимать случайную величину, которая при каждом $\omega \in \Omega$ принимает значение $X_1(\omega) + \ldots + X_{N(\omega)}(\omega)$. Для определенности мы полагаем $\sum_{k=1}^{0} = 0$.

Обозначим $p_n = \mathsf{P}(N = n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Производящую функцию случайной величины N обозначим $\psi(s)$, $|s| \leq 1$. Функцию распределения, плотность (если она существует) и характеристическую функцию случайной величины X_1 обозначим соответственно $F(x)$, $p(x)$ и $f(t)$. Основные сведения о распределении случайной суммы содержатся в следующей теореме.

Теорема 2.1.1. *Справедливы следующие утверждения*:
1°. *Функция распределения $F_{S_N}(x)$ случайной суммы S_N имеет вид*

$$F_{S_N}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x),$$

где $F^{*n}(x)$ – n-кратная свертка функции распределения F, причем $F^{*0}(x)$ – функция распределения с единственным единичным скачком в нуле.

2°. Если $p_0 > 0$*, то* $F_{S_N}(x)$ *не является абсолютно непрерывной, даже если* X_1 *абсолютно непрерывна. Если* $p_0 = 0$ *и* X_1 *имеет плотность* $p(x)$*, то плотность* $p_{S_N}(x)$ *случайной суммы существует и равна*

$$p_{S_N}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n p^{*n}(x),$$

где $p^{*n}(x)$ *–* n*-кратная свертка* $p(x)$*.*

3°. Характеристическая функция $f_{S_N}(t)$ *случайной суммы* S_N *имеет вид*

$$f_{S_N}(t) = \psi(f(t)).$$

4°. Математическое ожидание и дисперсию случайной суммы можно вычислить по формулам

$$\mathsf{E}S_N = \mathsf{E}N\mathsf{E}X_1, \quad \mathsf{D}S_N = \mathsf{E}N\mathsf{D}X_1 + \mathsf{D}N(\mathsf{E}X_1)^2$$

при условии, что все величины в правых частях существуют.

Доказательство. Два первых утверждения просто получаются по формуле полной вероятности. Докажем пункт 3°. Прежде всего заметим, что для $n \geq 1$ мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF^{*n}(x) = \mathsf{E}\exp\{it(X_1 + \ldots + X_n)\} = f^n(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Поэтому по пункту 1 мы получаем

$$f_{S_N}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{S_N}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Big(\sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x)\Big) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF^{*n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f^n(t) = \psi(f(t)).$$

Теперь докажем пункт 4°. Чтобы получить $\mathsf{E}S_N$, воспользуемся хорошо известным свойством характеристических функций и только что доказанным утверждением. Мы получаем

$$\mathsf{E}S_N = \frac{1}{i} \cdot \frac{df_{S_N}(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{1}{i} \cdot \frac{d\psi(f(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{1}{i} \cdot \frac{d\psi(f(t))}{df(t)} \cdot \frac{df(t)}{dt}\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{i}\mathsf{E}N \cdot i\mathsf{E}X_1 = \mathsf{E}N\mathsf{E}X_1.$$

Таким же образом вычислим и дисперсию случайной величины S_N. Имеем

$$\mathsf{E}S_N^2 = -\frac{d^2 f_{S_N}(t)}{dt^2}\Big|_{t=0} = -\frac{d}{dt}\Big(\frac{d\psi(f(t))}{df(t)} \cdot \frac{df(t)}{dt}\Big)\Big|_{t=0} =$$

$$= -\frac{d^2\psi(f(t))}{d(f(t))^2} \cdot \Big(\frac{df(t)}{dt}\Big)^2\Big|_{t=0} - \frac{d\psi(f(t))}{df(t)} \cdot \frac{d^2 f(t)}{dt^2}\Big|_{t=0} =$$

$$= \mathsf{E}N(N-1)(\mathsf{E}X_1)^2 + \mathsf{E}N\mathsf{E}X_1^2 = \mathsf{E}N^2(\mathsf{E}X_1)^2 + \mathsf{E}N\mathsf{D}X_1.$$

Поэтому

$$\mathsf{D}S_N = \mathsf{E}S_N^2 - (\mathsf{E}S_N)^2 = \mathsf{E}N^2(\mathsf{E}X_1)^2 + \mathsf{E}N\mathsf{D}X_1 - (\mathsf{E}N)^2(\mathsf{E}X_1)^2 =$$

$$= \mathsf{D}N(\mathsf{E}X_1)^2 + \mathsf{E}N\mathsf{D}X_1. \quad \square$$

В этой книге основное внимание будет уделено двум частным типам случайных сумм: пуассоновским (случайным) суммам и геометрическим (случайным) суммам.

Пусть случайная величина N имеет распределение Пуассона. Тогда случайная сумма S_N называется *пуассоновской случайной суммой* или просто *пуассоновской суммой*. Распределение пуассоновской случайной суммы называется *обобщенным пуассоновским* (см. следующий раздел). Элементарные свойства пуассоновских сумм описаны в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.1.2. *Пусть случайная величина N имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$.*
$1°$. *Характеристическая функция пуассоновской случайной суммы S_N имеет вид*

$$f_{S_N}(t) = \exp\{\lambda(f(t) - 1)\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, распределение пуассоновской случайной суммы безгранично делимо.
$2°$. *Если $\mathsf{E}X_1^2 < \infty$, то*

$$\mathsf{E}S_N = \lambda\mathsf{E}X_1, \quad \mathsf{D}S_N = \lambda\mathsf{E}X_1^2.$$

Более того, если известны моменты $\mathsf{E}X_1^k$, $k = 1, \ldots, n$, $n \geq 1$, то моменты $\mathsf{E}S_N^n$ можно вычислить рекуррентно по формуле

$$\mathsf{E}S_N^n = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \mathsf{E}S_N^k \mathsf{E}X_1^{n-k}, \quad \mathsf{E}S_N^0 = 1.$$

3°. *Если* $\alpha^m = \mathsf{E}X_1^m < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, *то семиинварианты* $\kappa_j(S_N)$, $j = 1, \ldots, m$ *пуассоновской случайной суммы* S_N *удовлетворяют равенствам*

$$\kappa_j(S_N) = \lambda\alpha_j, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Доказательство. Пункт 1° и первое утверждение пункта 2° непосредственно вытекают из Теоремы 2.1.1. Чтобы убедиться в безграничной делимости характеристической функции f_{S_N}, заметим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение $f_{S_N} = (g_n(t))^n$, где $g_n(t) = \exp\{\frac{\lambda}{n}(f(t) - 1)\}$ – характеристическая функция пуассоновской случайной суммы $X_1 + \ldots + X_{N_n}$, в которой случайная величина N_n имеет распределение Пуассона с параметром λ/n и независима от $X_1, X_2, \ldots$ Чтобы получить формулу для дисперсии пуассоновской случайной суммы, напомним, что $\mathsf{E}N = \mathsf{D}N = \lambda$, и используем пункт 4° Теоремы 2.1.1, в соответствии с которым

$$\mathsf{D}S_N = \mathsf{D}N(\mathsf{E}X_1)^2 + \mathsf{E}N\mathsf{D}X_1 = \lambda((\mathsf{E}X_1)^2 + \mathsf{D}X_1) = \lambda\mathsf{E}X_1^2.$$

Чтобы доказать второе утверждение пункта 2°, прежде всего заметим, что из пункта 1° вытекает, что

$$\frac{df_{S_N}(t)}{dt} = \lambda f_{S_N}(t) \cdot \frac{df(t)}{dt}.$$

Теперь, используя формулу Лейбница для производных высших порядков, мы получаем

$$i^n\mathsf{E}S_N^n = \frac{d^n f_{S_N}(t)}{dt^n}\bigg|_{t=0} = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\frac{df_{S_N}(t)}{dt}\right)\bigg|_{t=0} =$$

$$= \lambda\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(f_{S_N}(t) \cdot \frac{df(t)}{dt}\right)\bigg|_{t=0} = i^n\lambda\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{d^k(f_{S_N}(t))}{dt^k} \cdot \frac{d^{n-k}f(t)}{dt^{n-k}}\bigg|_{t=0} =$$

$$= i^n\lambda\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \mathsf{E}S_N^k\mathsf{E}X_1^{n-k}.$$

Третий пункт вытекает из определения семиинвариантов и соотношений

$$f_{X_1}(t) = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{j!}(it)^j + o(|t|^m), \qquad t \to 0,$$

$$\log f_{S_N}(t) = \lambda(f_{X_1}(t) - 1) = \lambda\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{j!}(it)^j + o(|t|^m). \qquad \square$$

Мы здесь не рассматриваем асимптотические свойства пуассоновских случайных сумм, так как они будут подробно описаны в следующих разделах.

Теперь рассмотрим геометрические случайные суммы. Если случайная величина N имеет геометрическое распределение

$$\mathsf{P}(N = n) = p(1-p)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.1.1}$$

то случайная величина S_N называется *геометрической случайной суммой* или просто *геометрической суммой.*

Несложно видеть, что производящая функция геометрического распределения имеет вид

$$\psi_N(s) = \mathsf{E}s^N = \frac{p}{1-(1-p)s}, \tag{2.1.2}$$

тогда как

$$\mathsf{E}N = \frac{1-p}{p}, \qquad \mathsf{D}N = \frac{1-p}{p^2}. \tag{2.1.3}$$

В соответствии с Теоремой 2.1.1 характеристическая функция геометрической случайной суммы имеет вид

$$f_{S_N}(t) = \frac{p}{1-(1-p)f(t)}. \tag{2.1.4}$$

Пусть $G(x)$ – функция распределения стандартного показательного распределения, то есть $G(x) = 1 - e^{-x}$ при $x \geq 0$ и $G(x) = 0$ при $x < 0$. Асимптотическое поведение геометрических случайных сумм описано в следующей теореме.

Теорема 2.1.3. *Пусть случайная величина N имеет геометрическое распределение* (2.1.1).
1°. *Пусть случайная величина X_1 неотрицательна и $0 < \alpha_1 = \mathsf{E}X_1 < \infty$. Тогда*

$$\sup_x |\mathsf{P}(p\alpha_1^{-1}S_N < x) - G(x)| \longrightarrow 0, \quad as \quad p \to 0.$$

2°. *Пусть случайная величина X_1 неотрицательна, $\alpha_1 = \mathsf{E}X_1 > 0$ и $\alpha_2 = \mathsf{E}X_1^2 < \infty$. Тогда*

$$\sup_x |\mathsf{P}(p\alpha_1^{-1}S_N < x) - G(x)| \leq \frac{p\alpha_2}{(1-p)\alpha_1^2}.$$

3°. *Пусть $\alpha_1 = \mathsf{E}X_1 = 0$, $0 < \alpha_2 = \mathsf{E}X_1^2 < \infty$. Тогда при $p \to 0$ выполнено соотношение*

$$\sup_x |\mathsf{P}(\sqrt{p}\alpha_2^{-1/2}S_N < x) - \Lambda(x)| \longrightarrow 0,$$

где $\Lambda(x)$ – *функция распределения Лапласа с плотностью*

$$\lambda(x) = \Lambda'(x) = 2^{-1/2}e^{-\sqrt{2}|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4°. *Пусть* $\alpha_1 = \mathsf{E}X_1 = 0$, $0 < \alpha_2 = \mathsf{E}X_1^2$ *и* $\beta_r = \mathsf{E}|X_1|^r < \infty$, $2 < r \le 3$. *Тогда существует абсолютная постоянная* $C(r) \in (0, \infty)$, *зависящая только от* r, *такая, что*

$$(1-p)\sup_x \left|\mathsf{P}(\sqrt{p}\alpha_2^{-1/2}S_N < x) - \Lambda(x)\right| \le C(r)p^{r/2-1}\frac{\beta_r}{\alpha_2^r} + \frac{p}{2}.$$

Здесь $C(r) \le C_0\Gamma(2-r/2)(\log 2)^{2-r/2}$, *а* C_0 – *абсолютная постоянная из неравенства Берри–Эссеена. В частности,* $C(3) \le 1.1297$.

Доказательство. Первое утверждение составляет суть теоремы Реньи (см., например, (Kalashnikov, 1997), (Бенинг и Королев, 2000)). Второе утверждение доказано в (Kalashnikov, 1997). Третье утверждение является частным случаем центральной предельной теоремы для случайных сумм (см., например, (Королев, 1997)). Четвертое утверждение можно найти в (Круглов и Королев, 1990). □

В заключение данного раздела рассмотрим взаимосвязь пуассоновских и геометрических случайных сумм.

Лемма 2.1.1. *Пусть* M – *целочисленная обобщенная пуассоновская случайная величина (см. разделы* 1.5 *и* 4.1*),* $X_1, X_2, \ldots$ – *одинаково распределенные случайные величины с общей характеристической функцией* $f(t)$. *Предположим, что случайные величины* $M, X_1, X_2, \ldots$ *независимы. Тогда случайная величина* $S_M = X_1 + \ldots + X_M$ *является пуассоновской случайной суммой.*

Доказательство. Производящая функция $\psi_M(s)$ случайной величины M имеет вид $\psi_M(s) = \exp\{\lambda(\psi(s) - 1)\}$, где $\psi(s)$ – производящая функция. В соответствии с пунктом 3 Теоремы 2.1.1 характеристическая функция $f_{S_M}(t)$ случайной суммы S_M имеет вид

$$f_{S_M}(t) = \psi_M(f(t)) = \exp\{\lambda(\psi(f(t)) - 1)\}. \tag{2.1.5}$$

Но из пункта 1 Теоремы 2.1.2 и пункта 3 Теоремы 2.1.1 вытекает, что (2.1.5) является характеристической функцией пуассоновской случайной суммы $Y_1 + \ldots + Y_N$, в которой случайная величина N имеет распределение Пуассона с параметром λ, $Y_j \stackrel{d}{=} X_1 + \ldots + X_L$, $j = 1, 2, \ldots$, L – случайная величина, производящая функция которой равна $\psi(s)$, и случайные величины $N, Y_1, Y_2, \ldots$ независимы, как и случайные величины $L, X_1, X_2, \ldots$. Другими словами, $S_M \stackrel{d}{=} Y_1 + \ldots + Y_N$. □

Лемма 2.1.2. *Пусть M – случайная величина с геометрическим распределением*

$$\mathsf{P}(M=n)=p(1-p)^n, \qquad n=0,1,\ldots \tag{2.1.6}$$

Тогда M является обобщенной пуассоновской случайной величиной.

Доказательство (см. главу XII, раздел 2, в (Феллер, 1984), том 1). Производящая функция величины M имеет вид (2.1.2). Положим

$$\lambda=\log\tfrac{1}{p}, \qquad \psi(s)=\tfrac{1}{\lambda}\log\tfrac{1}{1-(1-p)s}.$$

Тогда несложно видеть, что $\psi_M(s)=\exp\{\lambda(\psi(s)-1)\}$. Остается убедиться, что $\psi(s)$ – производящая функция. Но, используя разложение логарифмической функции в ряд Тейлора, мы видим, что

$$\psi(s)=\frac{1}{\lambda}\log\Big(\frac{1}{1-(1-p)s}\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda[(1-p)s]^k}{k},$$

тогда как

$$\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-p)^k}{k}=1,$$

то есть набор $\{\lambda(1-p)^k/k\}_{k=1}^{\infty}$ задает дискретное распределение вероятностей (это распределение обычно называют *логарифмическим* или *распределением логарифмического ряда*; оно было введено в (Fisher, Corbet and Williams, 1943), также см. (Кендалл и Стюарт, 1969)). □

Теорема 2.1.4. *Любая геометрическая случайная сумма является пуассоновской случайной суммой. Более точно, если $M, X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины такие, что M имеет геометрическое распределение (2.1.6) и $X_1, X_2, \ldots$ одинаково распределены с общей характеристической функцией $f(t)$, то*

$$X_1+\ldots+X_M\stackrel{d}{=}Y_1+\ldots+Y_N,$$

где N – пуассоновская случайная величина с параметром $\log\frac{1}{p}$, случайные величины $N, Y_1, Y_2, \ldots$ независимы, причем $Y_1, Y_2, \ldots$ имеют одно и то же распределение с характеристической функцией

$$f_{Y_1}(t)=\frac{1}{\log\frac{1}{p}}\log\Big(\frac{1}{1-(1-p)f(t)}\Big),$$

то есть $Y_j\stackrel{d}{=}X_1+\ldots+X_L$, $j=1,2,\ldots$, где случайная величина L имеет логарифмическое распределение $\mathsf{P}(L=k)=\log\frac{1}{p}\cdot\frac{(1-p)^k}{k}$, $k=1,2,\ldots$, и независима от $X_1, X_2, \ldots$.

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из Лемм 2.1.1 и 2.1.2. □

Следствие 2.1.1. *Пусть* S_N *– пуассоновская случайная сумма с характеристической функцией* $\exp\{\lambda(f(t)-1)\}$. *Если функция*

$$g(t) = \frac{1 - e^{-\lambda f(t)}}{1 - e^{-\lambda}}$$

является характеристической, то S_N *– геометрическая случайная сумма,* $S_N \stackrel{d}{=} Y_1 + \ldots + Y_M$, *где случайные величины* $M, Y_1, Y_2, \ldots$ *независимы, причем* M *имеет геометрическое распределение* (2.1.6) *с* $p = e^{-\lambda}$, *а* $Y_1, Y_2, \ldots$ *одинаково распределены с общей характеристической функцией* $g(t)$.

Следствие 2.1.2. *Любая геометрическая случайная сумма безгранично делима.*

Дальнейшие сведения о случайных суммах можно найти в книгах (Круглов и Королев, 1990), (Gnedenko and Korolev, 1996), (Королев, 1997) и (Бенинг и Королев, 2002).

2.2 Пуассоновски-смешанные и обобщенные пуассоновские распределения

Сначала дадим определение смеси вероятностных распределений. Пусть функция $F(x, y)$ определена на множестве $\mathbb{R} \times \mathcal{Y}$, где для простоты предполагается, что $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^m$ при некотором $m \geq 1$ и множество $\mathcal{Y}$ снабжено борелевской σ-алгеброй $\mathfrak{Y}$. Далее, предположим, что $F(x, y)$ является функцией распределения как функция аргумента x при каждом фиксированном y и $F(x, y)$ измерима по y при каждом фиксированном x, то есть $\{y : \ F(x, y) < c\} \in \mathfrak{Y}$ при каждых $x \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R}$. Пусть Q – вероятностная мера, определенная на измеримом пространстве $(\mathcal{Y}, \mathfrak{Y})$.

Определение 2.2.1. Функция распределения

$$H(x) = \int\limits_{\mathcal{Y}} F(x, y) Q(dy) \tag{2.2.1}$$

называется *смесью* функции распределения $F(x, y)$ по y относительно распределения Q. При этом $F(x, y)$ называется *смешиваемым* распределением, а Q называется *смешивающим* распределением.

Если $F(x, y)$ – распределение Пуассона с параметром y, то распределение $H(x)$ называется *смешанным пуассоновским.* Такие распределения будут подробно рассмотрены в главе 6. Здесь же мы сконцентрируем внимание на ситуации, в которой в соотношении (2.2.1) $\mathcal{Y}$ – множество неотрицательных целых чисел, а Q – это распределение Пуассона с некоторым параметром μ. В отличие от пуассоновских распределений мы будем называть такие вероятностные распределения *пуассоновски-смешанными.*

Пример 2.2.1. Предположим, что в (2.2.1) $F(x, y)$ – это распределение Пуассона с параметром λy, λ =const>0, а $Q(y)$ – это функция распределения Пуассона с параметром μ. Если X – случайная величина с функцией распределения H, то для $k = 0, 1, 2, \ldots$, очевидно,

$$\mathsf{P}(X = k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-j\lambda}(j\lambda)^k}{k!} \frac{e^{-\mu}\mu^j}{j!} = \frac{\lambda^k e^{-\mu}}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} (\mu e^{-\lambda})^j \frac{j^k}{j!} =$$

$$= \frac{\lambda^k e^{-\mu+\mu e^{-\lambda}}}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\mu e^{-\lambda}} \frac{(\mu e^{-\lambda})^j}{j!} j^k = \frac{\lambda^k m_k(\mu e^{-\lambda})}{k!} e^{-\mu+\mu e^{-\lambda}}, \qquad (2.2.2)$$

где $m_k(\lambda)$ – k-й момент распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Распределение (2.2.2) было введено Ю. Нейманом в (Neyman, 1939) в связи с некоторыми задачами из области энтомологии и бактериологии. Оно называется *(инфекционным) распределением Неймана типа А.*

Пример 2.2.2. Предположим, что в (2.2.1) F – это гамма-распределение с параметром масштаба y и параметром формы $\alpha > 0$, плотность которого имеет вид

$$p(x) = \frac{y^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-yx} x^{\alpha-1}, \quad x > 0.$$

Тогда плотность, соответствующая функции распределения H имеет вид

$$q(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp\{-\mu + \mu e^{-x}\} m_\alpha(\mu e^{-x}), \quad x > 0. \qquad (2.2.3)$$

В работе (Consael, 1952) приведено выражение для $H(x)$ в терминах бесселевых функций. Более того, если $\alpha = 1$, то $p(x)$ становится плотностью экспоненциального распределения с параметром y и соответственно, плотность (2.2.3) становится плотностью *распределения Гумбеля* (*распределения экстремальных значений типа III*)

$$q(x) = \mu \exp\{\mu - x + e^{-x}\}, \quad x > 0.$$

Другие примеры пуассоновски-смешанных распределений можно найти, например, в книге (Haight, 1967).

В данной главе мы в основном будем иметь дело с частным случаем соотношения (2.2.1), когда $\mathcal{Y}$ – это множество неотрицательных целых чисел, а $F(x,y) = G^{*y}(x)$ для некоторой функции распределения G. Здесь символ G^{*k} обозначает k-кратную свертку функции распределения G с самой собой: $G^{*0}(x)$ – это функция распределения с единственным единичным скачком в нуле, и $G^{*k} = G * G^{*(k-1)}$ для $k \geq 1$. В таком случае соотношение (2.2.1), очевидно, трансформируется в

$$H(x) = e^{-\mu}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mu^j}{j!}G^{*j}(x). \tag{2.2.4}$$

Определение 2.2.2. Распределения вида (2.2.4) называются *обобщенными пуассоновскими.*

Легко видеть, что если $g(t)$ – характеристическая функция, соответствующая функции распределения $G(x)$, то характеристическая функция $h(t)$, соответствующая функции распределения $H(x)$, имеет вид

$$h(t) = e^{-\mu}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\mu g(t)^j}{j!} = \exp\{\mu(g(t)-1)\}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.2.5}$$

Сравнивая это выражение с приведенным в п. 1 Теоремы 2.1.2, несложно убедиться, что если if $X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины с общей функцией распределения $G(x)$, а N_μ – пуассоновская случайная величина с параметром μ, независимая от $X_1, X_2, \ldots$, то распределение (2.2.4) соответствует пуассоновской случайной сумме $S_\mu = X_1 + \ldots + X_{N_\mu}$ (для определенности мы полагаем, что если $N_\mu = 0$, то $S_\mu = 0$). Некоторые элементарные свойства обобщенных пуассоновских распределений были рассмотрены в разделе 1.4.

Обобщенные пуассоновские распределения играют важную роль как в само́й теории вероятностей, так и в ее приложениях. Чтобы подтвердить это, рассмотрим некоторые примеры.

Пример 2.2.3. В 1939 г. в теории суммирования независимых случайных величин был произошел существенный прорыв. Б. В. Гнеденко предложил метод *сопровождающих безгранично делимых законов*, который позволил получить общие необходимые и достаточные условия сходимости распределений сумм независимых равномерно предельно малых случайных слагаемых. Пусть m_n – натуральное число, а $\{X_{n,k}\}_{k\geq 1}$, $n = 1, 2, \ldots$, – последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин. Положим

$$S_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,m_n}. \tag{2.2.6}$$

Каждому слагаемому $X_{n,k}$, характеристическую функцию которого обозначим $f_{n,k}(t)$, поставим в соответствие "сопровождающую"случайную величину $Y_{n,k}$ с характеристической функцией $g_{n,k}(t) = \exp\{f_{n,k}(t) - 1\}$. Несложно убедиться, что случайные величины $Y_{n,k}$ безгранично делимы. Построим новую сумму "сопровождающих"случайных величин

$$\bar{S}_n = Y_{n,1} + \ldots + Y_{n,m_n}, \tag{2.2.7}$$

В которой слагаемые считаются независимыми. Б. В. Гнеденко доказал, что распределения сумм (2.2.6) слабо сходятся при $m_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ к некоторому распределению том и только в том случае, когда существует предельное распределение сумм (2.2.7), причем оба предельных закона совпадают. Доказательство этого утверждения основано на том, что

$$\exp\{f_{n,k}(t) - 1\} = e^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_{n,k}^j(t)}{j!},$$

и мы видим, что характеристическая функция сопровождающей суммы является одновременно характеристической функцией пуассоновской случайной суммы изначальных независимых слагаемых, в которой количество слагаемых имеет распределение Пуассона с параметром 1. В частности, если при каждом n слагаемые $X_{n,k}$, $k \geq 1$, распределены одинаково, то

$$\bar{S}_n \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{N_i} Y_{n,j}^{(i)} \tag{2.2.8}$$

где N_i – независимые случайные величины с одним и тем же распределением Пуассона с параметром 1, независимые от случайных величин $Y_{n,j}^{(i)}$, $Y_{n,j}^{(i)} \stackrel{d}{=} Y_{n,1}$. Но в соответствии с видом характеристической функции суммы (2.2.8) мы можем заключить, что

$$\bar{S}_n \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{N^{(n)}} Y_{n,j},$$

где величина $N^{(n)}$ имеет распределение Пуассона с параметром m_n и независима от $Y_{n,j}$, $j \geq 1$.

Пример 2.2.4. Круг явлений, моделируемых обобщенными пуассоновскими распределениями, довольно широк. Ф. Эггенбергер показал, что числа летальных исходов при скарлатине и оспе в Швейцарии, а также при взрывах паровых котлов имеют обобщенное распределение

Пуассона (Eggenberger, 1924). Согласно типичной модели (Pollaczek-Geiringer, 1928), вспышки болезней или аварии с паровыми котлами происходят независимо друг от друга, и число вспышек или аварий, вызвавших ровно j летальных исходов (случайная величина Z_j) имеет распределение Пуассона с некоторым параметром λ_j, $j = 1, 2, \ldots$ Аналогичная модель использовалась для описания числа жертв катастроф на транспорте (Kupper, 1965). В такой модели общее число жертв всех аварий или вспышек болезней имеет вид

$$Z = Z_1 + 2Z_2 + 3Z_3 + \ldots + kZ_k, \tag{2.2.9}$$

где параметр k называется *максимальной множественностью* и, вообще говоря, может быть бесконечным. Такие модели использовались в эпидемиологии, энтомологии и бактериологии (Greenwood and Yule, 1920), при изучении пространственного распределения особей различных видов в биологии и экологии (Skellam, 1952). Модели вида (2.2.9) очень важны, в частности, в ядерной физике при экспериментальном определении частичных сечений ядерных реакций (см., например, (Белов, Галкин и Уфимцев, 1985)).

Рассмотрим распределение случайной величины Z в (2.2.9). Можно предположить, что случайная величина Z_j имеет распределение Пуассона с некоторым параметром λ_j. Это предположение основано на теореме Пуассона, применение которой вполне разумно, к примеру, при описании числа жертв аварий на транспорте, ввиду малости вероятности отдельной аварии и огромному числу транспортных средств. Параметр λ_j при этом имеет смысл среднего числа несчастных случаев, приведших ровно к j жертвам, в единицу времени. Можно предположить, что случайные величины Z_j независимы. Поскольку характеристическая функция случайной величины jZ_j имеет вид

$$\mathsf{E}e^{itjZ_j} = \exp\{\lambda_j(e^{itj} - 1)\}, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

а характеристическая функция суммы независимых случайных слагаемых равна произведению характеристических функций слагаемых, обозначив $\lambda = \sum_j \lambda_j$, мы приходим к следующему представлению для характеристической функции суммы (2.2.9):

$$\mathsf{E}e^{itZ} = \prod_j \exp\{\lambda_j(e^{itj} - 1)\} = \exp\Big\{\sum_j \lambda_j(e^{itj} - 1)\Big\} = \exp\{\lambda(f(t) - 1)\}, \tag{2.2.10}$$

где

$$f(t) = \sum_j \frac{\lambda_j}{\lambda} e^{itj}$$

– характеристическая функция случайной величины, принимающей значение j с вероятностью λ_j/λ. Таким образом,

$$Z \stackrel{d}{=} X_1 + \ldots + X_N, \tag{2.2.11}$$

где X_j, $j \geq 1$, – независимые случайные величины с общей характеристической функцией $f(t)$, а N – случайная величина с пуассоновским распределением с параметром λ, независимая от $\{X_j\}_{j\geq 1}$.

При разных конкретных значениях максимальной множественности k и параметров λ_j распределения с характеристическими функциями (2.2.10) трансформируются в такие хорошо известные распределения как пуассон-биномиальное, Эрмита, Неймана, Стирлинга–Эрмита и другие (см., например, (Johnson and Kotz, 1969)). Некоторые из этих распределений будут рассмотрены в разделе 4.1.

Пример 2.2.5. В теории массового обслуживания (иначе называемой теорией очередей), если входящий поток клиентов (заявок, клиентов, требований) не является ординарным (то есть допускается возможность одновременного появления нескольких клиентов), моменты появления клиентов образуют пуассоновский точечный процесс $N_\lambda(t)$ с интенсивностью λ (см. раздел 6.2), число клиентов, появившихся в j-й момент равно X_j, то случайная величина $S_\lambda = X_1 + \ldots + X_{N_\lambda(t)}$, имеющая смысл общего количества клиентов, появившихся в течение интервала времени $[0, t]$, имеет обобщенное пуассоновское распределение.

Пример 2.2.6. Рассмотрим следующую модель одномерного броуновского движения – так называемого теплового движения частицы, вызванного соударениями частицы с молекулами вещества, заполняющего среду, в которой движется частица. Пусть $N(t)$ – число соударений частицы с молекулами на интервале времени $[0, t]$. Если среда однородна и свойства частицы остаются неизменными во времени, то вполне естественно считать, что $N(t)$ – это однородный пуассоновский процесс (см. раздел 6.2). Тогда, обозначив перемещение частицы, вызванное j-м соударением, через X_j, мы приходим к заключению, что процесс $S(t) = X_1 + \ldots + X_{N(t)}$ описывает изменение координаты частицы во времени, и $S(t)$ имеет обобщенное пуассоновское распределение.

Ниже мы рассмотрим другие примеры обобщенных пуассоновских распределений.

2.3 Дискретные обобщенные пуассоновские распределения.

В этом разделе мы будем рассматривать дискретные обобщенные пуассоновские распределения. Более того, мы будем иметь дело лишь с обобщенными пуассоновскими распределениями неотрицательных целочисленных случайных величин. Пусть $p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ – производящая функция, соответствующая функции распределения $G(x)$ в (2.2.4). Тогда, вместо (2.2.5) для неотрицательных целочисленных случайных величин удобнее иметь дело с производящей функцией

$$q(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n = \exp\{\mu(p(z)-1)\}, \quad |z| \leq 1, \tag{2.3.1}$$

которая соответствует функции распределения (2.2.4) и характеристической функции (2.2.5). В некоторых случаях проще иметь дело с другой записью (2.3.1), а именно

$$q(z) = \exp\Big\{\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z^j - 1)\Big\}, \tag{2.3.2}$$

где $a_j = \mu p_j$.

2.3.1 Примеры дискретных обобщенных пуассоновских распределений

Рассмотрим некоторые конкретные примеры дискретных обобщенных пуассоновских распределений.

Пример 2.3.1. Прежде всего, это само пуассоновское распределение. Этому распределению в (2.3.1) соответствует $p(z) \equiv z$.

Пример 2.3.2 (продолжение Примера 2.2.4). Пусть в Примере 2.2.4 (точнее, в соотношении (2.2.9)) $k = 2$. В таком случае представление (2.3.2) принимает вид

$$q(z) = \exp\{a_1(z-1) + a_2(z^2-1)\}, \quad |z| \leq 1, \tag{2.3.3}$$

($a_1 = p_1\mu$, $a_2 = p_2\mu 1$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_1 + p + 2 = 1$, так что $a_1 + a_2 = \mu$). Несложно убедиться, что вероятности q_n удовлетворяют соотношениям

$$q_n = e^{-\mu} \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{a_1^{n-2j} a_2^j}{(n-2j)!j!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.3.4}$$

Распределение (2.3.4) известно как *распределение Эрмита*, см., например, (Kemp and Kemp, 1965). В (Белов, Галкин и Уфимцев, 1985) рассмотрены дальнейшие обобщения распределения Эрмита на случаи большей множественности $k > 2$.

Пример 2.3.3. Производящая функция (инфекционного) распределения Неймана типа A (см. Пример 1.4.1) может быть записана в виде (2.3.2) с $a_j = \mu e^{-\lambda}\lambda^j/j!$. Для соответствующих вероятностей мы имеем

$$q_n = e^{-\mu+\mu e^{-\lambda}}\frac{\lambda^n}{n!}m_n(\mu e^{-\lambda}) = q_0\frac{\lambda^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}(\mu e^{-\lambda})^j\sigma_n^{(j)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Здесь $q_0 = \exp\{\mu(e^{-\lambda} - 1)\}$ and $\sigma_n^{(j)}$ – числа Стирлинга второго рода (см., например, (Riordan, 1968)).

Пример 2.3.4. Пусть $0 < p < 1$, $m = -\mu/\log p$. Для $j \geq 1$ в (2.3.2) положим $a_j = m(1-p)^j/j$. Тогда, как показано в (Quenouille, 1949), (Gurland, 1957), полученное распределение (2.3.2) оказывается отрицательным биномиальным (распределением Паскаля) с вероятностями

$$q_n = C_{n+m-1}^n p^m(1-p)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Отметим, что мы уже встречались с распределением, называемым *фишеровским распределением логарифмического ряда* или логарифмическим распределением

$$p_j = -\frac{(1-p)^j}{j\log p}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

с производящей функцией

$$p(z) = \frac{\log(1-(1-p)z)}{\log p}$$

в Лемме 2.2.2.

Как мы уже отмечали, если в (2.2.1) $F(x, y)$ – функция распределения Пуассона, то независимо от распределения $Q(y)$, распределение $H(x)$ называется смешанным пуассоновским. Такие распределения более подробно будут рассмотрены в главе 6. Здесь же мы лишь ограничимся замечанием, что пример распределения Неймана типа A убеждает нас в том, что некоторые распределения могут одновременно быть смешанными пуассоновскими и пуассоновски-смешанными. Более того, Как мы убедимся в главе 6, если в (2.2.1) $F(x, y)$ – функция распределения Пуассона, а $Q(y)$ – функция гамма-распределения, то итоговая смесь является отрицательным биномиальным распределением. Вместе с Примером 2.3.4 это дает убедительное свидетельство существования вероятностных распределений, которые одновременно являются обобщенными пуассоновскими и смешанными пуассоновскими.

2.3.2 Рекуррентные соотношения для дискретных обобщенных пуассоновских распределений

Точно так же, как мы получили рекуррентные соотношения для моментов обобщенных пуассоновских распределений в разделе 1.5, мы можем получить рекуррентные соотношения для вероятностей, определяющих дискретные обобщенные пуассоновские распределения и факториальных моментов дискретных обобщенных пуассоновских распределений. Если X – случайная величина, то ее факториальный момент порядка $k \geq 1$, обозначаемый $\mathsf{E}X^{[k]}$, определяется как $\mathsf{E}X^{[k]} = \mathsf{E}X(X-1)\cdot\ldots\cdot(X-k+1)$. В дальнейшем в качестве X мы рассматриваем случайную величину с производящей функцией $q(z)$ и пусть Y – случайная величина с производящей функцией $p(z)$, участвующей в (2.3.1), так что $q_j = \mathsf{P}(X=j)$, $p_j = \mathsf{P}(Y=j)$.

Теорема 2.3.1. *Для любого* $n \geq 0$

$$q_n = \frac{\mu}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)q_{n-k-1}p_{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)q_{n-k-1}a_{k+1}. \tag{2.3.5}$$

Если $\mathsf{E}Y^n$ *существует при некотором* $n \geq 1$, *то*

$$\mathsf{E}X^{[n]} = \mu\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\mathsf{E}X^{[n-k-1]}\cdot\mathsf{E}Y^{[k+1]}. \tag{2.3.6}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\frac{dq(z)}{dz} = \mu\exp\{\mu(p(z)-1)\}\frac{dp(z)}{dz} = \mu q(z)\frac{dp(z)}{dz},$$

так что, применив правило дифференцирования Лейбница для $n \geq 1$, мы получим

$$\frac{d^nq(z)}{dz^n} = \mu\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\frac{d^{n-k-1}q(z)}{dz^{n-k-1}}\cdot\frac{d^{k+1}q(z)}{dz^{k+1}}. \tag{2.3.7}$$

Теперь, чтобы получить (2.3.5), воспользуемся соотношением (2.3.7) и формулами

$$n!q_n = \frac{d^nq(z)}{dz^n}\Big|_{z=0}, \qquad k!p_k = \frac{d^kp(z)}{dz^k}\Big|_{z=0},$$

справедливыми для любых $n \geq 1$ и $k \geq 1$. Чтобы получить (2.3.6), воспользуемся соотношением (2.3.7) и формулами

$$\mathsf{E}X^{[n]} = \frac{d^nq(z)}{dz^n}\Big|_{z=1}, \qquad \mathsf{E}X^{[k]} = \frac{d^kp(z)}{dz^k}\Big|_{z=1}.$$

Теорема доказана. □

2.3.3 Дискретные безгранично делимые законы как обобщенные пуассоновские распределения

Следуя определению, данному в книге (Феллер, 1984), том 1, глава XII, раздел 3, мы можем определить *дискретные безгранично делимые законы* через их производящие функции. А именно, дискретное распределение вероятностей, сосредоточенное в неотрицательных целых точках, называется дискретным безгранично делимым, если для любого $n \geq 1$ его производящая функция $q(z)$ может быть представлена как n-я степень некоторой производящей функции. Другими словами, дискретное распределение вероятностей с производящей функцией $q(z)$ безгранично делимо, если для любого $n \geq 1$ существует производящая функция $h_n(z)$ такая, что $q(z) \equiv (h_n(z))^n$. Легко видеть, что если производящая функция $q(z)$ записана в виде (2.3.1), то она представима в виде $q(z) = (h_n(z))^n$ с $h_n(z) = \exp\{\frac{\mu}{n}(p(z) - 1)\}$ и, следовательно, любое дискретное обобщенное пуассоновское распределение безгранично делимо.

Обратно, в (Феллер, 1984), том 1, глава XII, раздел 3, доказано, что любое дискретное безграничное распределение представимо в виде (2.3.1) (или (2.3.2)). Это означает, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.3.2. *Дискретное распределение, сосредоточенное в неотрицательных целых точках, безгранично делимо тогда и только тогда, когда оно является обобщенным пуассоновским.*

Следствие 2.3.1. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – одинаково распределенные случайные величины. Пусть N – случайная величина с дискретным безгранично делимым распределением. Предположим, что случайные величины $N, X_1, X_2, \ldots$ независимы в совокупности. Тогда распределение случайной суммы $S = X_1 + \ldots + X_N$ является обобщенным пуассоновским.*

Доказательство. В соответствии с Теоремой 2.3.2 распределение случайной величины N является обобщенным пуассоновским с производящей функцией $q(z)$ вида (2.3.1). Как мы видели в разделе 1.4, характеристическая функция $g(t)$ случайной величины S имеет вид $q(f(t))$, где $f(t)$ – характеристическая функция случайной величины X_1. Но тогда, очевидно,

$$g(t) = q(f(t)) = \exp\{\mu(p(f(t)) - 1)\} = \exp\{\mu(\widetilde{g}(t) - 1)\}, \qquad (2.3.8)$$

где $\widetilde{g}(t) = p(f(t))$ – характеристическая функция (точнее, это – характеристическая функция случайной суммы $X_1 + \ldots + X_M$, где M – случайная величина с производящей функцией $p(z)$, независимая от

$X_1, X_2, \ldots$). Требуемое утверждение вытекает из представления (2.3.8). $\square$

2.4 Асимптотическая нормальность пуассоновских случайных сумм

2.4.1 Сходимость распределений пуассоновских случайных сумм к нормальному закону

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть N_λ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ.

Предположим, что случайные величины $N_\lambda, X_1, X_2, \ldots$ независимы при каждом λ. Обозначим

$$S_\lambda = X_1 + \ldots + X_{N_\lambda}$$

(для определенности мы будем считать, что $\sum_{j=1}^{0} = 0$). Случайная величина S_λ называется *пуассоновской случайной суммой.*

Из классической теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин известно, что асимптотическое поведение величины S_λ при $\lambda \to \infty$ совпадает с асимптотическим поведением случайной величины $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ при. Это обстоятельство лежит в основе так называемого метода сопровождающих безгранично делимых распределений, предложенного Б. В. Гнеденко (см., например, (Гнеденко и Колмогоров, 1949)) и эффективно применявшегося многими исследователями.

Сейчас мы сформулируем теорему об асимптотической нормальности пуассоновских случайных сумм. Доказательство этой теоремы можно проводить многими способами. Мы получим нужное утверждение в качестве следствия более общей теоремы. Как обычно, символ $\Phi(x)$ обозначает стандартную нормальную функцию распределения.

Теорема 2.4.1. *Предположим, что* $\mathsf{E}X_1^2 < \infty$. *Пусть* $\mathsf{E}X_1 = a$, $\mathsf{D}X_1 = \sigma^2$. *Тогда*

$$\mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\Big) \longrightarrow \Phi(x) \qquad (\lambda \to \infty)$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения можно получить как следствие следующего утверждения, известного как *теорема переноса* для схемы “нарастающих” случайных сумм. Это утверждение мы оформим в виде леммы, поскольку здесь оно играет вспомогательную роль.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины. Пусть $\{N_n\}_{n\geq 1}$ – целочисленные неотрицательные случайные величины такие, что N_n и $X_1, X_2, \ldots$ независимы при каждом $n \geq 1$. Положим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Лемма 2.4.1. *Пусть числовые последовательности* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ *и* $\{d_n\}$ *таковы, что* $b_n \to \infty, d_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. *Предположим, что существуют случайные величины* Y, U *и* V *такие, что*

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \Longrightarrow Y \tag{2.4.1}$$

и

$$\Big(\frac{b_{N_n}}{d_n}, \frac{a_{N_n} - c_n}{d_n}\Big) \Longrightarrow (U, V) \tag{2.4.2}$$

при $n \to \infty$. *Тогда*

$$\frac{S_{N_n} - c_n}{d_n} \Longrightarrow Y \cdot U + V, \qquad (n \to \infty) \tag{2.4.3}$$

причем в (2.4.3) *случайная величина* Y *и пара* (U, V) *независимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы, представляющей собой частный случай Теоремы 7.8.1 (см. раздел 7.8), можно найти, например, в (Королев, 1994) или (Королев, 1997). □

Продолжим доказательство Теоремы 2.4.1. Поскольку выполнено условие $\sigma^2 < \infty$, слагаемые $X_1, X_2, \ldots$ удовлетворяют центральной предельной теореме, в силу которой в рассматриваемой нами ситуации случайная величина Y в соотношении (2.4.1) имеет нормальное распределение с параметрами $(0, \sigma^2/(a^2 + \sigma^2))$. Далее, поскольку в силу неравенства Чебышева

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{N_\lambda}{\lambda} - 1\Big| > \epsilon\Big) \leq \frac{1}{\lambda\epsilon} \longrightarrow 0$$

при $\lambda \to \infty$ для любого $\epsilon > 0$, случайная величина U в соотношении (2.4.2) с вероятностью единица равна единице. Чтобы найти случайную величину V, нам понадобится еще один вспомогательный результат.

Напомним классическую оценку скорости сходимости в центральной предельной теореме, уставливаемую *неравенством Берри–Эссеена*

$$\sup_x \Big|\mathsf{P}\Big(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\Big) - \Phi(x)\Big| \leq \frac{C_0 L_0^3}{\sqrt{n}} \tag{2.4.4}$$

где
$$L_0^3 = \frac{\mathsf{E}|X_1 - a|^3}{\sigma^3}, \tag{2.4.5}$$
а C_0 – положительная абсолютная постоянная. Как уже было отмечено в разделе 1.6, известно, что
$$0.4097 < \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}} \le C_0 \le 0.7056.$$
Величину L_0^3, определенную в (2.4.5), будем называть *классической ляпуновской дробью.*

Лемма 2.4.2. *При любом* $\lambda > 0$
$$\sup_x \Big|\mathsf{P}\Big(\frac{N_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\Big) - \Phi(x)\Big| \ \le \ \frac{C_0}{\sqrt{\lambda}}. \tag{2.4.6}$$

Доказательство. Пусть n – произвольное натуральное число. Характеристическую функцию случайной величины N_λ можно представить в виде
$$\mathsf{E}\exp\{isN_\lambda\} = \exp\Big\{\lambda\Big(e^{is}-1\Big)\Big\} = \Big(\exp\Big\{\frac{\lambda}{n}\Big(e^{is}-1\Big)\Big\}\Big)^n, \quad s \in \mathbb{R}.$$
Это означает, что $N_\lambda \stackrel{d}{=} N_{n,1}+\ldots+N_{n,n}$, где $N_{n,1},\ldots,N_{n,n}$ – независимые случайные величины с одинаковым пуассоновским распределением с параметром λ/n, так что $\mathsf{E}N_{n,1} = \mathsf{D}N_{n,1} = \lambda/n$. Левую часть неравенства (2.4.6) обозначим $\Delta(\lambda)$. Тогда по неравенству Берри-Эссеена мы имеем
$$\Delta(\lambda) \le \frac{C_0}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\mathsf{E}|N_{n,1} - \lambda/n|^3}{(\mathsf{D}N_{n,1})^{3/2}}. \tag{2.4.7}$$
Поскольку (2.4.7) справедливо при любом $n \ge 1$, играющем роль вспомогательного параметра, мы можем выбрать n так, чтобы $n \ge \lambda$. Но тогда
$$\mathsf{E}\Big|N_{n,1} - \frac{\lambda}{n}\Big|^3 = \mathsf{E}\Big(N_{n,1} - \frac{\lambda}{n}\Big)^3 + 2\Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^3 \exp\Big\{-\frac{\lambda}{n}\Big\} =$$
$$= \frac{\lambda}{n} + 2\Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^3 \exp\Big\{-\frac{\lambda}{n}\Big\} \le \frac{\lambda}{n}\Big[1 + 2\Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^2\Big]. \tag{2.4.8}$$
Подставляя (2.4.8) и выражение для дисперсии случайной величины $N_{n,1}$ в (2.4.7), мы получаем, что для любого $n \ge \lambda$
$$\Delta(\lambda) \le \frac{C_0}{\sqrt{\lambda}}\Big[1 + 2\Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^2\Big],$$

откуда в силу произвольности n вытекает неравенство (2.4.6). Лемма доказана. □

Заметим, что Лемма 2.4.2 не просто устанавливает факт асимптотической нормальности пуассоновского распределения (как мы видели в разделе 1.5, в этом можно было бы убедиться более простым способом, например, рассматривая характеристические функции, см. Теорему 1.5.6), но и непосредственно устанавливает равномерность сходимости к нормальному закону с указанием *скорости* этой сходимости.

Из Леммы 2.4.2 вытекает, что случайная величина V из (2.4.2) имеет нормальное распределение с параметрами $(0, a^2/(a^2+\sigma^2))$. Таким образом, случайная величина, выступающая в качестве предельной в (2.4.3), имеет нормальное распределение (как сумма двух независимых нормально распределенных случайных величин), причем ее математическое ожидание равно нулю, а дисперсия равна

$$\frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}+\frac{a^2}{a^2+\sigma^2}=1.$$

Теорема доказана. □

Пусть $a(\lambda)\in\mathbb{R}$ и $b(\lambda)>0$ – некоторые функции. Из Теоремы 2.4.1 и представления

$$\frac{S_\lambda-a(\lambda)}{b(\lambda)}=\frac{S_\lambda-a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}\cdot\frac{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}{b(\lambda)}+\frac{a\lambda-a(\lambda)}{b(\lambda)}$$

вытекает следующее утверждение, формально более общее, чем Теорема 2.4.1.

Теорема 2.4.1*. *Предположим, что* $\mathsf{E}X_1^2<\infty$. *Пусть* $a(\lambda)\in\mathbb{R}$ *и* $b(\lambda)>0$ *– некоторые функции, обладающие свойствами*

$$\frac{\lambda(a^2+\sigma^2)}{b^2(\lambda)}\longrightarrow 1 \quad \textit{и} \quad \frac{a\lambda-a(\lambda)}{b(\lambda)}\longrightarrow 0$$

при $\lambda\to\infty$, *где* $a=\mathsf{E}X_1$, $\sigma^2=\mathsf{D}X_1$. *Тогда*

$$\mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda-a(\lambda)}{b(\lambda)}<x\Big)\Longrightarrow\Phi(x) \qquad (\lambda\to\infty).$$

2.4.2 Неравенство Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм

Рассмотрим скорость сходимости в Теореме 2.4.1. Всюду ниже мы будем предполагать, что существует $a=\mathsf{E}X_1$ и $\sigma^2=\mathsf{D}X_1<\infty$. В книге

(Круглов и Королев, 1990) приведена теорема, частным случаем которой является следующий результат, оптимизирующий абсолютные константы в оценке Г. Энглунда (Englund, 1983). Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathsf{E}X_1 = a$ и $\mathsf{D}X_1 = \sigma^2$. Пусть N – неотрицательная целочисленная случайная величина, независимая от $X_1, X_2, \ldots$ Положим $S_N = X_1 + \ldots + X_N$.

Лемма 2.4.3. *Предположим, что* $\mathsf{E}|X_1|^3 < \infty$. *Тогда для любого* $q \in (0,1)$

$$\sup_x \Big|\mathsf{P}\Big(\frac{S_N - \mathsf{E}S_N}{\sqrt{\mathsf{D}S_N}} < x\Big) - \Phi(x)\Big| \leq \frac{C_0 L_0^3}{\sqrt{q\mathsf{E}N}} + M(q)\frac{\mathsf{E}|N - \mathsf{E}N|}{\mathsf{E}N} +$$

$$+ \sup_x \Big|\mathsf{P}\Big(\frac{N - \mathsf{E}N}{\sqrt{\mathsf{D}N}} < x\Big) - \Phi(x)\Big|, \tag{2.4.9}$$

где

$$M(q) = \max\Big\{\frac{1}{1-q},\ \frac{1}{\sqrt{2\pi e q}(1+\sqrt{q})}\Big\}. \tag{2.4.10}$$

С помощью неравенства Ляпунова мы получаем

$$\frac{\mathsf{E}|N_\lambda - \mathsf{E}N_\lambda|}{\mathsf{E}N_\lambda} \leq \frac{\sqrt{\mathsf{D}N_\lambda}}{\mathsf{E}N_\lambda} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \tag{2.4.11}$$

Таким образом, подставляя оценки (2.4.11) и (2.4.6) в (2.4.9), из Леммы 2.4.3 мы получаем следующий результат.

Теорема 2.4.2. *Предположим, что* $\mathsf{E}|X_1|^3 < \infty$. *Тогда*

$$\sup_x \Big|\mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\Big) - \Phi(x)\Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big[C_0 + \inf_{0<q<1}\Big(\frac{C_0 L_0^3}{\sqrt{q}} + M(q)\Big)\Big] \tag{2.4.12}$$

где величина $M(q)$ определена в (2.4.10).

На первый взгляд кажется, что правая часть (2.4.12) не может быть меньше правой части неравенства Берри–Эссеена, так как при случайном суммировании возникает новый параметр, играющий роль “шума", – случайный индекс. Именно к такому выводу можно прийти по традиционному пути доказательства оценок скорости сходимости в Теореме 2.4.1, основанному на прямом применении неравенства Эссеена (см. (Bening, Korolev and Shorgin, 1997)). Однако, как только мы замечаем, что фактически мы имеем дело с расстоянием между двумя безгранично делимыми распределениями, мы приходим к довольно неожиданному результату.

Наряду с Теоремой 2.4.2 можно доказать справедливость другой оценки, использующей не классическую ляпуновскую дробь L_0^3, а величину

$$L_1^3 = \frac{\mathsf{E}|X_1|^3}{(a^2+\sigma^2)^{3/2}}. \tag{2.4.13}$$

Поскольку, в отличие от классической ляпуновской дроби, в правой части (2.4.13) задействованы нецентральные моменты случайной величины X_1 (легко видеть, что $a^2+\sigma^2 = \mathsf{E}X_1^2$), величину L_1^3, определяемую соотношением (2.4.13), мы будем называть *нецентральной ляпуновской дробью.*

Теорема 2.4.3. *Предположим, что* $\mathsf{E}|X_1|^3 < \infty$. *Тогда*

$$\sup_x \left|\mathsf{P}\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\right) - \Phi(x)\right| \le \frac{CL_1^3}{\sqrt{\lambda}},$$

где $C \le C_0 \le 0.7056$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть n – произвольное натуральное число, а $f(t)$ – характеристическая функция случайной величины X_1. Характеристическая функция $f_{S_\lambda}(t)$ случайной величины S_λ может быть представлена в виде

$$f_{S_\lambda}(t) = \exp\{\lambda(f(t)-1)\} = [\exp\{\mu(f(t)-1)\}]^n,$$

где $\mu = \lambda/n$. Следовательно,

$$S_\lambda \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^n Z_{n,k},$$

где случайные величины $Z_{n,1}, Z_{n,2}, \ldots$ независимы и одинаково распределены, $Z_{n,k} \stackrel{d}{=} X_1 + \ldots + X_{N_\mu}$, $k \ge 1$. Здесь N_μ – случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром μ и независимая от $X_1, X_2, \ldots$ Обозначим

$$L_0^3(Z_{n,1}) = \frac{\mathsf{E}|Z_{n,1} - \mathsf{E}Z_{n,1}|^3}{(\mathsf{D}Z_{n,1})^{3/2}}.$$

В силу произвольности n, в соответствии с неравенством Берри–Эссеена мы имеем

$$\sup_x \left|\mathsf{P}\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\right) - \Phi(x)\right| \le C_0 \inf_{n\ge1} \frac{L_0^3(Z_{n,1})}{\sqrt{n}}. \tag{2.4.14}$$

Не ограничивая общности, мы будем считать, что $n > \lambda$, то есть $\mu < 1$. Положим $a = \mathsf{E}X$, $\sigma^2 = \mathsf{D}X$, $\beta^3 = \mathsf{E}|X|^3$. Заметим, что $\mathsf{E}Z_{n,1} = \mu a$, $\mathsf{D}Z = \mu(a^2+\sigma^2)$. Рассмотрим $I_n = \mathsf{E}|Z_{n,1} - \mu a|^3$. С учетом вида распределения случайной величины $Z_{n,1}$ по формуле полной вероятности мы имеем

$$I_n \le e^{-\mu}\Big[\mu^3|a|^3 + \mu\mathsf{E}|X_1 - \mu a|^3 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mu^k}{k!}\mathsf{E}|X_1 + \ldots + X_k - \mu a|^3\Big].$$

Используя неравенства

$$|a|^3 \le |a|\mathsf{E}X_1^2 \le \mathsf{E}|X_1|\mathsf{E}X_1^2 \le \beta^3$$

и

$$(x_1 + \ldots + x_r)^3 \le r^2(x_1^3 + \ldots + x_r^3)$$

(последнее справедливо для любого $r \ge 1$ и любого неотрицательного $x_1, \ldots, x_r$), мы получаем

$$I_n \le \beta^3\Big(\mu + 3\mu^2 + 4\mu^3 + \mu^4 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mu^k}{k!}(k+1)^2(k+\mu^3)\Big) \le \beta^3[\mu + (8+K)\mu^2],$$

где

$$K = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k+1)^3}{k!} = 15e - 9 < 32.$$

Поскольку

$$\frac{L_0^3(Z_{n,1})}{\sqrt{n}} = \frac{I_n}{\sqrt{n}[\mu(a^2+\sigma^2)]^{3/2}} \le \frac{\beta^3[1+40\mu]}{\sqrt{\lambda}(a^2+\sigma^2)^{3/2}} = \frac{L_1^3}{\sqrt{\lambda}} + \frac{40\beta^3\sqrt{\lambda}}{n(a^2+\sigma^2)^{3/2}},$$

в силу (2.4.14) и произвольности n мы имеем

$$\sup_x\Big|\mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\Big) - \Phi(x)\Big| \ \le \ \frac{C_0L_1^3}{\sqrt{\lambda}}.$$

Оценка $C_0 \le 0.7056$ уже приводилась в разделе 1.6.2. Теорема доказана. □

Замечание 2.4.1. Несмотря на то, что известна нижняя оценка $C_0 \ge (\sqrt{10}+3)/(6\sqrt{2\pi}) > 0.4097$ для абсолютной константы в неравенстве Берри–Эссеена, нижние оценки для C в Теореме 2.4.3 пока не найдены.

Теорема 2.4.3 имеет интересную историю. По-видимому, впервые оценка

$$\sup_x\Big|\mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\Big) - \Phi(x)\Big| \le \frac{CL_1^3}{\sqrt{\lambda}}$$

была доказана в (Ротарь, 1972) и опубликована в (Ротарь, 1976) с $C = 2.23$ (диссертация (Ротарь, 1972) не опубликована, в то время как в (Ротарь, 1976) не было приведено доказательство этого результата). Позднее, с использованием традиционной техники, основанной на неравенстве Эссеена, эта оценка была доказана в работе (von Chossy and Rappl, 1983) с $C = 2.21$ (причем авторы этой работы в формулировке соответствующей теоремы объявили значение $C = 3$, что, конечно, верно, но фактически по ходу доказательства их результата они получили значение $C = 2.21$) и независимо в работе (Bening, Korolev and Shorgin, 1997) с $C = 1.99$. Наконец, в (Korolev and Shorgin, 1997) было опубликовано доказательство Теоремы 2.4.3 (с $C = C_0 = 0.7655$). И только после этого авторы последней из упомянутых работ узнали о работе (Michel, 1986) с тем же самым результатом, что в (Korolev and Shorgin, 1997) и, естественно, с той же самой идеей доказательства, которая позволяет вместо оценки $C = C_0 = 0.7655$, приведенной в работах (Michel, 1986) и (Korolev and Shorgin, 1997) использовать наилучшую на сегодняшний день оценку $C = C_0 = 0.7056$.

Наконец, рассмотрим неравномерные оценки точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм.

Теорема 2.4.4. *Предположим, что существует функция $Q(x)$ такая, что*
$$\left|\mathsf{P}\Big(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\Big) - \Phi(x)\right| \le Q(x)\frac{L_0^3}{\sqrt{n}}.$$
Тогда верна оценка
$$\left|\mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\Big) - \Phi(x)\right| \le Q(x)\frac{L_1^3}{\sqrt{\lambda}}$$
с той же самой функцией $Q(x)$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству Теоремы 2.4.3. □

Следствие 2.4.1. *Предположим, что $\mathsf{E}|X_1|^3 < \infty$. Тогда*
$$\left|\mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\Big) - \Phi(x)\right| \le \frac{31.94 L_1^3}{\sqrt{\lambda}(1+|x|^3)}.$$

Доказательство. Чтобы получить эту оценку, достаточно применить неравенство
$$\left|\mathsf{P}\Big(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\Big) - \Phi(x)\right| \le \frac{C L_0^3}{\sqrt{n}(1+|x|^3)},$$

доказанное в работе (Нагаев, 1965), с оценкой константы C, полученной в (Paditz, 1989): $C \leq 31.94$, и Теорему 2.4.4. □

Интересно отметить, что Теорема 2.4.3 является частным случаем Теоремы 2.4.4 с $Q(x) \equiv C_0$.

2.4.3 Нецентральные ляпуновские дроби

Вопрос о том, какая из двух оценок, представленных в Теоремах 2.4.2 и 2.4.3, является лучшей, не столь прост. Если $a = 0$, то $L_0^3 = L_1^3$. Поэтому в таком случае оценка, определенная в Теореме 2.4.3, лучше. Сейчас мы приведем некоторые аргументы из работы (Shorgin, 1996) в пользу этой оценки и для случая $a \neq 0$. Для определенности мы будем использовать обозначения

$$L_0^3(X) = \frac{\mathsf{E}|X - \mathsf{E}X|^3}{(\mathsf{D}X)^{3/2}}, \qquad L_1^3(X) = \frac{\mathsf{E}|X|^3}{(\mathsf{E}X^2)^{3/2}}.$$

Теорема 2.4.4. (a) *Существует абсолютная положительная постоянная C такая, что для любой невырожденной случайной величины X, имеющей три первых конечных момента, справедливо неравенство*

$$L_1^3(X) \leq C L_0^3(X).$$

Более того, $C \leq 2\sqrt{2} < 2.8285$.
(b) *Существует последовательность случайных величин $\{Z_n\}_{n\geq 1}$, имеющих три первых конечных момента, такая, что*

$$L_1^3(Z_n) = o(L_0^3(Z_n)).$$

Доказательство. (a) Пусть $\mathsf{E}X = a$, $\mathsf{D}X = \sigma^2$, $X_0 = X - a$. Не ограничивая общность, предположим, что $a > 0$. Тогда

$$L_1^3(X) = \frac{\mathsf{E}|X_0 + a|^3}{(\sigma^2 + a^2)^{3/2}} \leq \frac{\mathsf{E}|X_0|^3 + 3a\sigma^2 + 3a^2\mathsf{E}|X_0| + a^3}{(\sigma^2 + a^2)^{3/2}} \leq$$

$$\leq \mathsf{E}|X_0|^3 \frac{\sigma^3 + 3a\sigma^2 + 3a^2\sigma + a^3}{\sigma^3(\sigma^2 + a^2)^{3/2}}. \tag{2.4.15}$$

Поскольку

$$L_1^3(X) = \frac{\mathsf{E}|X_0|^3}{\sigma^3},$$

из (2.4.15) мы получаем

$$L_1^3(X) \le L_0^3(X) \sup_{x\ge 0} \frac{(1+x)^3}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Супремум в правой части последнего неравенства достигается при $x = 1$ и равен $2\sqrt{2}$, так что первое утверждение теоремы доказано.

(b) Чтобы доказать вторую часть теоремы, рассмотрим последовательность случайных величин $\{Z_n\}_{n\ge 1}$ таких, что $\mathsf{P}(Z_1 = 1) = 1$ и

$$Z_n = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } 1 - \frac{1}{n}, \\ 2 & \text{с вероятностью } \frac{1}{n}, \end{cases} \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Тогда для всех $n \ge 2$ мы будем иметь

$$L_0^3(Z_n) > 0.68\sqrt{n},$$

в то время как

$$L_1^3(Z_n) < 1.2,$$

что и означает справедливость второго утверждения теоремы. Теорема доказана. □

2.4.4 Точность нормальной аппроксимации для распределений случайных сумм с безгранично делимым индексом

Введем, прежде всего, некоторые условные обозначения, упрощающие запись результатов данного раздела и их доказательств.

Предположим, что все рассматриваемые в данном разделе случайные величины заданы на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Совпадение распределений случайных величин X и Y, как и ранее, будем обозначать $X \stackrel{d}{=} Y$. Функцию распределения и характеристическую функцию любой случайной величины X обозначим $F_X(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ и $f_X(t)$ $(t \in \mathbb{R})$, соответственно, а производящую функцию любой неотрицательной целочисленной случайной величины N обозначим $\psi_N(z)$ $(|z| \le 1)$.

Пусть N – некоторая неотрицательная целочисленная случайная величина, X – произвольная случайная величина. Обозначим случайную величину, характеристическая функция которой равна $\psi_N(f_X(t))$, символом $\{N, X\}$. Очевидно, что случайная величина $\{N, X\}$ может быть представлена в виде $\{N, X\} \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^N X_j$ (для определенности полагаем, что $\sum_{j=1}^{0} = 0$), где $X_1, X_2, \ldots$ – одинаково распределенные случайные величины, причем $X_j \stackrel{d}{=} X$ и случайные величины $N, X_1, X_2, \ldots$ независимы в совокупности. Будем называть при этом случайную величину $\{N, X\}$ случайной суммой, случайную величину N – индексом, а случайную величину X – случайным слагаемым. Очевидно, что, если X – неотрицательная целочисленная случайная величина, то и $\{N, X\}$ – неотрицательная целочисленная случайная величина. При этом ее производящая функция удовлетворяет соотношению

$$\psi_{\{N,X\}}(z) = \psi_N(\psi_X(z))$$

(см. раздел 1.4).

Для произвольной случайной величины X, имеющей два конечных первых момента, символом $\widetilde{X}$ или $X^{\sim}$ обозначим нормированную случайную величину:

$$\widetilde{X} \stackrel{d}{=} \frac{X - \mathsf{E}X}{(\mathsf{D}X)^{1/2}}.$$

Если невырожденная в нуле случайная величина X имеет три конечных первых момента, то назовем *отношением Ляпунова* (или *ляпуновской дробью*) величину

$$L(X) = \frac{\mathsf{E}|X|^3}{(\mathsf{E}X^2)^{3/2}}.$$

При $\mathsf{E}(X) = 0$ эта величина совпадает с “классической” ляпуновской дробью $L(X - \mathsf{E}(X))$, фигурирующей в правой части оценки Берри–Эссеена (и содержащей соответствующие центральные моменты). Для любой невырожденной случайной величины X, имеющей три момента, как и ранее, обозначим $L_0(X) = L(X - \mathsf{E}(X))$.

Предположим, что распределение случайной величины N является безгранично делимым в классе распределений неотрицательных целочисленных случайных величин, то есть для любого натурального m существует такая неотрицательная целочисленная случайная величина N'_m, что $N \stackrel{d}{=} \{m, N'_m\}$. Как известно (см. раздел 1.6.3), в этом случае распределение случайной величины N является обобщенным пуассоновским, то есть соответствующая характеристическая функция имеет вид

$$f_N(t) = \exp[\lambda(f_Y(t) - 1)],$$

где $\lambda > 0$, $f_Y(t)$ – характеристическая функция некоторой неотрицательной целочисленной случайной величины Y, иначе говоря,

$$N \stackrel{d}{=} \{\Pi(\lambda), Y\},$$

где $\Pi(\lambda)$ – пуассоновская случайная величина с параметром λ. Пусть существуют первые три момента случайных величин N и X.

В данном разделе мы рассмотрим оценку точности аппроксимации распределения случайной величины $S \stackrel{d}{=} \{N, X\}$ нормальным законом с соответствующими моментами для той ситуации, в которой случайная величина N имеет безгранично делимое распределение. Очевидно, что в этом случае $S \stackrel{d}{=} \{\{\Pi(\lambda), Y\}, X\}$. Положим

$$\Delta = \sup_x |F_{\widetilde{S}}(x) - \Phi(x)|,$$

где, как и ранее, $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения.

Для случая произвольного распределения индекса N известны многие оценки точности нормальной аппроксимации распределений случайных сумм $S \stackrel{d}{=} \{N, X\}$. Оценки из (Королев, 1988) для случая $\mathsf{E}X = 0$ представляются близкими к окончательным. Что же касается общего случая $\mathsf{E}X \neq 0$), то соответствующие оценки точности нормальной аппроксимации, приведенные в работах (Englund, 1983), (Королев, 1988), (Круглов и Королев, 1990) довольно сложны по структуре. При этом в указанные оценки входит компонента, содержащая “классическое” отношение Ляпунова $L_0(X)$ (Круглов и Королев, 1990, теорема 6.2.1, см. неравенство (2.4.21) ниже). В то же время анализ ситуации, когда случайная величина N имеет распределение Пуассона (частный случай рассматриваемой нами задачи, см. раздел 2.4.3), показывает, что при $\mathsf{E}X \neq 0$ более естественным является наличие в оценках для Δ “нецентральных” ляпуновских дробей вида $L(X)$. Оценку величины Δ для $N \stackrel{d}{=} \Pi(\lambda)$ в терминах величин $L(X)$ сформулируем в качестве леммы (см. Теорему 2.4.4).

Лемма 2.4.4. *Если N имеет распределение Пуассона с параметром λ, то*

$$\Delta \leq C_1 \frac{L(X)}{\lambda^{1/2}}, \tag{2.4.16}$$

где C_1 – абсолютная постоянная.

Наша цель – обобщить оценку (2.4.16) на случай, когда индекс N имеет обобщенное пуассоновское распределение. Приводимая ниже оценка (2.4.17) является альтернативой результатам работ (Englund, 1983), (Королев, 1988), (Круглов и Королев, 1990) (хотя и относится к более узкому классу распределений, чем те, которые рассматриваются в этих работах). В случае $N \stackrel{d}{=} \Pi(\lambda)$ оценка (2.4.17) сводится к (2.4.16), причем абсолютная постоянная в (2.4.17) совпадает с C_1 из (2.4.16).

Конечно же, задача оценивания точности аппроксимации распределения случайных сумм с индексами, имеющими обобщенные пуассоновские распределения, имеет существенно менее общий характер по сравнению с ситуацией, когда индекс N может иметь произвольное распределение, рассмотренной, например, в работах (Englund, 1983), (Королев, 1988), (Круглов и Королев, 1990). Но все же и данный частный случай представляет достаточный интерес. Так, целочисленный случайный процесс с независимыми приращениями представляет собой совокупность случайных величин N_t, имеющих безгранично делимое (и, значит, обобщенное пуассоновское) распределение (Феллер, 1984), том 1. Задачи исследования случайных сумм, связанных с такими процессами, возникают при анализе процессов риска в страховой математике и многих других областях. Отметим при этом, что оценки, приведенные ниже, оказываются весьма простыми по форме и в ряде ситуаций более точными, чем общие оценки (Королев, 1988), (Круглов и Королев, 1990).

Пусть случайные величины N и X имеют три конечных первых момента.

Теорема 2.4.6. *Справедлива оценка*

$$\Delta \leq$$

$$\leq \frac{C_1}{\lambda^{1/2}} \cdot \frac{\mathsf{E}[Y(Y-1)(Y-2)](\mathsf{E}|X|)^3 + 3\mathsf{E}[Y(Y-1)]\mathsf{E}|X|\mathsf{E}X^2 + \mathsf{E}Y\mathsf{E}|X|^3}{[\mathsf{E}Y^2(\mathsf{E}X)^2 + \mathsf{E}Y\mathsf{D}X]^{3/2}}, \tag{2.4.17}$$

где C_1 – абсолютная постоянная из неравенства (2.4.16).

Отметим, что для неотрицательной целочисленной случайной величины Y справедливы неравенства $\mathsf{E}[Y(Y-1)(Y-2)] \geq 0$, $\mathsf{E}[Y(Y-1)] \geq 0$.

Важнейшее значение для доказательства Теоремы 2.4.6 имеет следующая простая лемма.

Лемма 2.4.5. *Если Y – неотрицательная целочисленная случайная величина, то*

$$S \stackrel{d}{=} \{\{\Pi(\lambda), Y\}, X\} \stackrel{d}{=} \{\Pi(\lambda), \{Y, X\}\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится к цепочке тождеств

$$f_S(t) = \psi_{\{\Pi(\lambda),Y\}}(f_X(t)) = \psi_{\Pi(\lambda)}(\psi_Y(f_X(t))) =$$

$$= \psi_{\Pi(\lambda)}(f_{\{Y,X\}}(t)) = f_{\{\Pi(\lambda),\{Y,X\}\}}(t).$$

Из Леммы 2.4.5 следует, что случайная величина $S \stackrel{d}{=} \{\{\Pi(\lambda), Y\}, X\}$, являющаяся случайной суммой с обобщенным пуассоновским индексом $\{\Pi(\lambda), Y\}$ и случайным слагаемым X, одновременно является случайной суммой с пуассоновским индексом $\Pi(\lambda)$ и случайным слагаемым $\{Y, X\}$. Благодаря этому анализ распределения случайной величины S можно провести с помощью результатов для случайных сумм с пуассоновским индексом.

Д о к а з а т е л ь с т в о Теоремы 2.4.6. В силу Леммы 2.4.5 имеем $S \stackrel{d}{=} \{\Pi(\lambda), \{Y, X\}\}$. Пусть $U \stackrel{d}{=} \{Y, X\}$. Из Леммы 2.4.4 следует, что

$$|F_{\widetilde{S}}(x) - \Phi(x)| = |F_{\widetilde{\{\Pi(\lambda), U\}}}(x) - \Phi(x)| \leq C_1 \frac{\mathsf{E}|U|^3}{\lambda^{1/2}(\mathsf{E}U^2)^{3/2}}.$$

Очевидно, что

$$\mathsf{E}|U|^3 \leq \mathsf{E}|\{Y, |X|\}|^3 = (\mathsf{E}Y^3 - 3\mathsf{E}Y^2 + 2\mathsf{E}Y)\,(\mathsf{E}|X|)^3 +$$

$$+3(\mathsf{E}Y^2 - \mathsf{E}Y)\,\mathsf{E}|X|\,\mathsf{E}X^2 + \mathsf{E}Y\,\mathsf{E}|X|^3,$$

$$\mathsf{E}U^2 = (\mathsf{E}Y^2 - \mathsf{E}Y)\,(\mathsf{E}X)^2 + \mathsf{E}Y\,\mathsf{E}X^2,$$

откуда и следует утверждение Теоремы 2.4.6.

Неравенство (2.4.17) является самым точным из результатов данного раздела, но имеет достаточно сложный вид. Более наглядная оценка содержится в следующем утверждении.

Следствие 2.4.1. *Справедлива оценка*

$$\Delta \leq \frac{C_1}{\lambda^{1/2}} \cdot \frac{\mathsf{E}Y^3\mathsf{E}|X|^3}{[\mathsf{E}Y^2(\mathsf{E}X)^2 + \mathsf{E}Y\mathsf{D}X]^{3/2}} =$$

$$= C_1 \frac{L(X)\,L(Y)}{\lambda^{1/2}} \cdot \left[\frac{\mathsf{E}X^2\mathsf{E}Y^2}{\mathsf{E}Y^2(\mathsf{E}X)^2 + \mathsf{E}Y\mathsf{D}X}\right]^{3/2}. \qquad (2.4.18)$$

Неравенство (2.4.18) вытекает из (2.4.17) в силу того, что

$$(\mathsf{E}|X|)^3 \leq \mathsf{E}|X|^3, \quad \mathsf{E}|X|\mathsf{E}X^2 \leq \mathsf{E}|X|^3$$

и

$$Y(Y-1)(Y-2) + 3Y(Y-1) + Y = Y^3.$$

Правая часть (2.4.18) совпадает с правой частью (2.4.17) в случае, когда либо случайная величина X является вырожденной, либо случайная величина Y вырождена в единице. Очевидно, что в остальных случаях неравенство (2.4.18) “хуже", чем (2.4.17).

Обозначим

$$L_0'(N) = \frac{\mathsf{E}(N - \mathsf{E}N)^3}{(\mathsf{D}N)^{3/2}}.$$

Так как

$$\mathsf{E}\{\Pi(\lambda), Y - \mathsf{E}Y\}^3 = \lambda \mathsf{E}Y^3,$$

то

$$L_0'(N) = L(Y)/\lambda^{1/2}.$$

Неравенство (2.4.18) может быть переписано эквивалентным образом с использованием только моментов случайных величин N и X (то есть для вычисления значения оценки не обязательно знать величину λ и моменты случайной величины Y).

Следствие 2.4.2. *Справедлива оценка*

$$\Delta \le C_1 \frac{\mathsf{E}(N - \mathsf{E}N)^3 \mathsf{E}|X|^3}{[\mathsf{D}N(\mathsf{E}X)^2 + \mathsf{E}N\mathsf{D}X]^{3/2}} =$$

$$= C_1\, L(X)\, L_0'(N) \left[\frac{\mathsf{E}X^2 \mathsf{E}N^2}{(\mathsf{E}X)^2 \mathsf{E}N^2 + \mathsf{E}N\mathsf{D}X}\right]^{3/2}. \qquad (2.4.19)$$

Данное следствие вытекает из (2.4.18) и свойств моментов случайной величины N.

Так как $\mathsf{E}Y^2 \ge \mathsf{E}Y$, то для выражения $\mathsf{E}Y^2\,(\mathsf{E}X)^2 + \mathsf{E}Y\,\mathsf{D}X$, присутствующего в знаменателе правой части неравенства (2.4.18), можно выписать следующие нижние оценки:

$$\mathsf{E}Y^2(\mathsf{E}X)^2 + \mathsf{E}Y\,\mathsf{D}X \ge \mathsf{E}Y^2\,(\mathsf{E}X)^2$$

и

$$\mathsf{E}Y^2\,(\mathsf{E}X)^2 + \mathsf{E}Y\,\mathsf{D}X \ge \mathsf{E}Y\,\mathsf{E}X^2.$$

Значит, из (2.4.18) вытекает следующий результат.

Следствие 2.4.3. *Справедлива оценка*

$$\Delta \le \frac{C_1}{\lambda^{1/2}} \min\left\{L(Y)\,\frac{\mathsf{E}|X|^3}{|(\mathsf{E}X)^3|},\ L(X)\,\frac{\mathsf{E}Y^3}{(\mathsf{E}Y)^{3/2}}\right\}.$$

Очевидно, что данное неравенство (как и все приведенные выше) является обобщением (2.4.16) (с сохранением абсолютной постоянной). Чтобы из Теоремы 2.4.6 и следствий 2.4.1 – 2.4.3 получить оценку (2.4.16), достаточно положить $Y \stackrel{d}{=} 1$ или, что то же самое, $N \stackrel{d}{=} \Pi(\lambda)$.

Отметим, что, если распределение случайной величины X фиксировано, причем $\mathsf{E}X \ne 0$, то необходимым и достаточным условием сходимости правой части соотношения (2.4.19) к нулю является $L_0'(N) \to 0$.

В терминах моментов случайной величины Y это условие выглядит так:
$$\frac{L(Y)}{\lambda^{1/2}} \to 0. \tag{2.4.20}$$

Очевидно, что данное условие выполняется, если $\lambda \to \infty$, а распределение случайной величины Y, являющейся случайным слагаемым для случайной суммы N, фиксировано. Однако при рассмотрении произвольной последовательности обобщенных пуассоновских случайных величин $N_k \stackrel{d}{=} \{\Pi(\lambda_k), Y_k\}$ даже с неограниченно растущим параметром λ_k, но с различными распределениями случайных величин Y_k, выполнение условия (2.4.20) не гарантировано.

С целью сравнить приведенные выше оценки с аналогичными оценками, полученными с помощью других методов в (Королев, 1988), (Круглов и Королев, 1990), предположим, что $\lambda \to \infty$.

В (Круглов и Королев, 1990) доказано следующее утверждение, уточняющее оценку из (Englund, 1983): если случайные величины X и N имеют три конечных момента, то для любого $q \in (0, 1)$
$$\Delta \le C_0 \frac{L_0(X)}{q^{1/2}(\mathsf{E}N)^{1/2}} + w(q) \frac{\mathsf{E}|N - \mathsf{E}N|}{\mathsf{E}N} + \sup_x |F_{\widetilde{N}}(x) - \Phi(x)|, \tag{2.4.21}$$
где C_0 – постоянная из оценки Берри–Эссеена для одинаково распределенных слагаемых (см. Лемму 2.4.4),
$$w(q) = \max\left[\frac{1}{1-q},\ \frac{1}{cq^{1/2}(1+q^{1/2})}\right], \qquad c = (2\pi e)^{1/2}.$$

Для того, чтобы сравнить неравенство (2.4.21) с Теоремой 2.4.6 и следствиями из нее, следует выяснить, как выглядит (2.4.21) в ситуации, когда случайная величина N имеет обобщенное пуассоновское распределение. Для этого нужно, прежде всего, заменить в правой части (2.4.21) величину $\sup_x |F_{\widetilde{N}}(x) - \Phi(x)|$ на ее оценку, получаемую с помощью методов (Королев, 1988), (Круглов и Королев, 1990). Такая оценка приведена в (Bening, Korolev and Shorgin, 1997):
$$\sup_x |F_{\widetilde{N}}(x) - \Phi(x)| \le \lambda^{-1/2}\Big[C_0 + \inf_{0<p<1}\Big\{\frac{C_0 L_0(Y)}{p^{1/2}} + w(p)\Big\}\Big].$$

Кроме того, в случае, когда $N \stackrel{d}{=} \{\Pi(\lambda), Y\}$, в силу неравенства Ляпунова $\mathsf{E}|N - \mathsf{E}N| \le (\mathsf{D}N)^{1/2} = \lambda^{1/2}(\mathsf{E}Y^2)^{1/2}$. В результате заключаем, что для случайной величины N, имеющей обобщенное пуассоновское распределение,
$$\Delta \le \lambda^{-1/2}\Big\{\inf_{0<q<1}\Big\{C_0 \frac{L_0(X)}{q^{1/2}(\mathsf{E}Y)^{1/2}} + w(q)\, \frac{(\mathsf{E}Y^2)^{1/2}}{\mathsf{E}Y}\Big\} +$$

$$+C_0 + \inf_{0<p<1}\left\{\frac{C_0L_0(Y)}{p^{1/2}} + w(p)\right\}\bigg\}.$$

В силу Леммы 3 из (Bening, Korolev and Shorgin, 1997) данное неравенство можно переписать так:

$$\Delta \le \lambda^{-1/2}\left\{\frac{(\mathsf{E}Y^2)^{1/2}}{\mathsf{E}Y}\, M(r_1) + C_0 + M(r_2)\right\}, \tag{2.4.22}$$

где

$$M(r) = \begin{cases} \dfrac{1+s^2(r/2)}{(1-s^2(r/2))^2} & \text{при} \quad r \ge \dfrac{2(1+c)}{(2c+c^2)^2}, \\ r\,(1+c) + \dfrac{(1+c)^2}{2c+c^2} & \text{при} \quad r \le \dfrac{2(1+c)}{(2c+c^2)^2}, \end{cases}$$

$s(u)$ – решение уравнения

$$\frac{s^3(u)}{(1-s^2(u))^2} = u$$

(которое существует и единственно при любом $u > 0$),

$$r_1 = C_0\sqrt{\mathsf{E}(Y)/\mathsf{E}(Y^2)}\, L(X), \quad r_2 = C_0L_0(Y).$$

Отметим, что $r_2 \ge 2(1+c)/(2c+c^2)^2$.

Точное решение вопроса, в каких случаях лучше оценка из (2.4.17), а в каких – оценка из (2.4.22), представляется затруднительным в силу сложности выражений, стоящих в правых частях этих неравенств. Поэтому для практического применения можно рекомендовать “объединенную"оценку:

$$\Delta \le \min\{P,\, Q\},$$

где P – правая часть неравенства (2.4.17), Q – правая часть (2.4.22).

Для корректной постановки задачи сравнения асимптотического поведения этих оценок при $\lambda \to \infty$ рассмотрим следующую схему серий. Пусть при каждом n заданы положительный параметр λ_n, случайная величина M_n, имеющая пуассоновское распределение с параметром λ_n, последовательность одинаково распределенных неотрицательных целочисленных случайных величин $Y_{1n}, Y_{2n}, \ldots$ и последовательность одинаково распределенных случайных величин $X_{1n}, X_{2n}, \ldots$, причем при каждом n все перечисленные случайные величины независимы в совокупности. При различных n как случайные величины Y_{in}, так и случайные величины X_{in} могут быть распределены по-разному. Рассмотрим последовательности случайных сумм $N_n \stackrel{d}{=} Y_{1n} + \cdots + Y_{M_nn}$, $S_n \stackrel{d}{=} X_{1n} + \cdots + X_{M_nn}$ и последовательность величин $\Delta_n = \sup_x |F_{\widetilde{S}_n}(x) - \Phi(x)|$.

Предположим, что $Y_n \stackrel{d}{=} Y_{1n}$, $X_n \stackrel{d}{=} X_{1n}$. Тогда $N_n \stackrel{d}{=} \{\Pi(\lambda_n), Y_n\}$ и $S_n \stackrel{d}{=} \{N_n, X_n\}$. Отметим, что значение Δ_n определяется тройкой $(\lambda_n,\, Y_n,\, X_n)$ (естественно, имеются в виду распределения случайных величин Y_n и X_n).

Итак, справедливы неравенства $\Delta_n \le P_n$, $\Delta_n \le Q_n$, где P_n – правая часть неравенства (2.4.17) для $\lambda = \lambda_n$, $Y \stackrel{d}{=} Y_n$, $X \stackrel{d}{=} X_n$, Q_n – правая часть неравенства (2.4.22) при этих же λ, Y, X. Конечно, значения P_n и Q_n также зависят от тройки $(\lambda_n,\, Y_n,\, X_n)$, поэтому при необходимости будет использоваться запись $P_n(\lambda_n, Y_n, X_n)$ и $Q_n(\lambda_n, Y_n, X_n)$.

Следующая теорема показывает, что существует некоторое естественное множество распределений случайных величин Y_n (см. условие (2.4.23)), такое, что для всех случайных величин X_n, имеющих три момента, и для Y_n, удовлетворяющих (2.4.23), оценка P_n в определенном смысле более точна, чем оценка Q_n.

Теорема 2.4.7. *Рассмотрим случайные величины Y_n, удовлетворяющие условию*

$$\mathsf{E}Y_n^3\,(\mathsf{E}Y_n)^{1/2} \le K(\mathsf{E}Y_n^2)^{3/2}, \tag{2.4.23}$$

где $K \ge 1$ есть абсолютная постоянная. Существует абсолютная постоянная R (зависящая от K) такая, что для любых $\lambda_n > 0$, любых случайных величин Y_n, удовлетворяющих (2.4.23), *и любых случайных величин X_n, имеющих три конечных момента, выполнено неравенство*

$$P_n/Q_n \le R.$$

В то же время существует такая последовательность троек $(\lambda_n^0, Y_n^0, X_n^0)$, где случайные величины Y_n^0 удовлетворяют (2.4.23), *а случайные величины X_n^0 имеют три конечных момента, что*

$$P_n(\lambda_n^0, Y_n^0, X_n^0) \longrightarrow 0 \quad (\lambda_n \to \infty),$$

но $Q_n(\lambda_n^0, Y_n^0, X_n^0)$ не стремится к нулю.

Замечание 2.4.1. Из этой теоремы следует, что (в рамках описанного класса распределений случайных величин Y_n и X_n) для всех тех последовательностей распределений случайных величин S_n, асимптотическую нормальность которых гарантирует оценка Q_n, оценка P_n также сообщает об их асимптотической нормальности (и имеет “не худший"порядок скорости сходимости к нулю, чем P_n). В то же время наличие такой последовательности троек $(\lambda_n^0, Y_n^0, X_n^0)$, что оценка P_n “улавливает"асимптотическую нормальность соответствующей последовательности распределений случайных величин S_n, но оценка Q_n этого не “улавливает", означает, что в рамках данного класса распределений случайных величин Y_n и X_n оценка вида P_n является асимптотически более точной, чем оценка вида Q_n. Естественно, можно выделить и такой класс распределений случайных величин Y_n и X_n, в рамках которого асимптотически более точной является оценка Q_n, однако в данном разделе этот вопрос рассматриваеться не будет.

Замечание 2.4.2. Отметим, что условиям (2.4.23) удовлетворяют, в частности, случайные величины Y_n, удовлетворяющие условию

$$\mathsf{E}Y_n^3 \leq K\mathsf{E}Y_n^2$$

(K – абсолютная постоянная). Это следует из того, что

$$\mathsf{E}Y_n^3\,(\mathsf{E}Y_n)^{1/2} \leq K\mathsf{E}Y_n^2\,(\mathsf{E}Y_n)^{1/2} \leq K(\mathsf{E}Y_n^2)^{3/2}.$$

В частности, этому условию удовлетворяют все случайные величины, равномерно ограниченные величиной K.

Замечание 2.4.3. Неравенство $K \geq 1$ вытекает из (2.4.25).

Доказательство Теоремы 2.4.7 основывается на следующем утверждении.

Лемма 2.4.6. *Для любой невырожденной случайной величины Z, имеющей три конечных момента, $L(Z) \leq C_2 L_0(Z)$, причем можно положить $C_2 = 2\sqrt{2} < 2.83$.*

Доказательство. Пусть $\mathsf{E}Z = \alpha$, $\mathsf{D}Z = \sigma^2$, $Z_0 = Z - \alpha$. Не ограничивая общности, предположим, что $\alpha > 0$. Тогда

$$L(Z) = \frac{\mathsf{E}|Z_0 + \alpha|^3}{(\sigma^2 + \alpha^2)^{3/2}} \leq \frac{\mathsf{E}|Z_0|^3 + 3\sigma^2\alpha + 3\mathsf{E}|Z_0|\alpha^2 + \alpha^3}{(\sigma^2 + \alpha^2)^{3/2}} \leq$$

$$\leq \mathsf{E}|Z_0|^3\,\frac{\sigma^3 + 3\sigma^2\alpha + 3\sigma\alpha^2 + \alpha^3}{\sigma^3(\sigma^2 + \alpha^2)^{3/2}}.$$

Поскольку $L_0(Z) = \mathsf{E}|Z_0|^3/\sigma^3$, то

$$L(Z) \leq L_0(Z)\max_{x\geq 0}\frac{(1+x)^3}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Максимум в правой части последнего неравенства достигается при $x = 1$ и равен $2\sqrt{2}$, откуда и следует утверждение леммы.

Доказательство Теоремы 2.4.7. Во-первых, докажем, что существует такая абсолютная постоянная R, что $P_n/Q_n \leq R$ для любой последовательности (λ_n, Y_n, X_n), где Y_n удовлетворяют (2.4.23), а X_n имеют три момента. Отметим, что при $r \leq 2(1+c)/(2c+c^2)^2$

выполняется неравенство $M(r) \geq R_1 r$, где $R_1 = 1+c+(1+c)\,(2c+c^2)/2$. Далее, при $r \geq 2(1+c)\,(2c+c^2)^2$ имеем

$$\frac{M(r)}{r} = \frac{1+s^2(r/2)}{2(1-s^2(r/2))^2(r/2)} = \frac{1+s^2(r/2)}{2s^3(r/2)}.$$

Последняя дробь – монотонно убывающая функция от r, значит,

$$\frac{M(r)}{r} \geq R_2 = \frac{1+s^2((1+c)/(2c+c^2)^2)}{2s^3((1+c)/(2c+c^2)^2)}.$$

При $r \geq 0$ выполняется неравенство $M(r) \geq R_3 r$, где $R_3 = \min\{R_1, R_2\}$. Имеем:

$$\lambda_n^{1/2} Q_n > \frac{(\mathsf{E}Y_n^2)^{1/2}}{\mathsf{E}Y_n} M(r_1) \geq \frac{C_0 R_3}{(\mathsf{E}Y_n)^{1/2}} L_0(X_n). \tag{2.4.24}$$

Рассмотрим теперь оценку P_n, которую мы возьмем из Следствия 2.4.1:

$$\lambda_n^{1/2} P_n = C_1 L(X_n)\, L(Y_n) \left[\frac{\mathsf{E}X_n^2}{(\mathsf{E}X_n)^2 + \mathsf{E}Y_n \mathsf{D}X_n/\mathsf{E}Y_n^2}\right]^{3/2}.$$

Из неравенства Ляпунова $(\mathsf{E}Y_n^2)^2 \leq \mathsf{E}Y_n^3\,\mathsf{E}Y_n$ и (2.4.23) следует, что

$$1 \leq \frac{(\mathsf{E}Y_n^2)^{1/2}}{(\mathsf{E}Y_n)^{1/2}} \leq \frac{\mathsf{E}Y_n^3}{(\mathsf{E}Y_n^2)^{3/2}} (\mathsf{E}Y_n)^{1/2} \leq K. \tag{2.4.25}$$

Значит,

$$\lambda_n^{1/2} P_n \leq \frac{K C_1 L(X_n)}{(\mathsf{E}Y_n)^{1/2}} \left[\frac{(\mathsf{E}X_n)^2 + \mathsf{D}X_n}{(\mathsf{E}X_n)^2 + K^{-2}\mathsf{D}X_n}\right]^{3/2} \leq \frac{C_1 K^4 L(X_n)}{(\mathsf{E}Y_n)^{1/2}}. \tag{2.4.26}$$

Итак,

$$\frac{P_n}{Q_n} \leq \frac{C_1 K^4}{C_0 R_3} \cdot \frac{L(X)}{L_0(X)}.$$

В силу Леммы 2.4.6

$$\frac{P_n}{Q_n} \leq R = \frac{C_1 C_2 K^4}{C_0 R_3}.$$

Первое из утверждений Теоремы 2.4.7 доказано. Для доказательства второго утверждения рассмотрим $\lambda_n^0 = n$, случайные величины $Y_n^0 \stackrel{d}{=} 1$ и случайные величины X_n^0, принимающие два значения: 2 с вероятностью $1/n$ и 1 с вероятностью $1 - 1/n$, $n = 2, 3, \ldots$. Тогда при всех $n \geq 2$ справедливы оценки

$$L_0(X_n^0) > 0.68\, n^{1/2}$$

и

$$L(X_n^0) < 1.2.$$

Очевидно, при таком выборе $\{Y_n^0\}$ условие (2.4.23) выполняется с $K = 1$, в силу (2.4.26)

$$P_n < 1.2\, C_1/n^{1/2} \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$, в то же время из (2.4.24) следует, что

$$Q_n > 0.68\, C_0 R_3.$$

Теорема доказана.

2.4.5 Уточнения неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм

В данном разделе, основанном на работе (Шевцова, 2006a) мы представим результаты, обобщающие и уточняющие приведеное в разделе 2.4.2 неравенство Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм. Эти результаты по духу аналогичны уточнениям классического неравенства Берри–Эссеена, приведенным в разделе 1.6.3. При этом, в отличие от раздела 1.6.3, где рассматривались стандартизованные слагаемые, мы рассмотрим пуассоновские суммы независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, удовлетворяющих условиям

$$\mathsf{E}X_1 = m, \qquad \mathsf{D}X_1 = \sigma^2. \tag{2.4.27}$$

Это делается для сохранения общности – ведь при случайном суммировании центрирование слагаемых константами оказывается эквивалентным центрированию самих сумм случайными величинами, что, вообще говоря, порождает некоторые проблемы при построении асимптотических аппроксимаций для распределений случайных сумм. Результаты данного раздела проясняют реальную точность оценок, приведенных выше.

Пусть λ – положительное число, N_λ – пуассоновская случайная величина с параметром λ, распределение которой имеет вид

$$\mathsf{P}(N_\lambda = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Мы будем предполагать, что для каждого $\lambda > 0$ случайные величины $N_\lambda, X_1, X_2, \ldots$ независимы. Как и ранее, обозначим

$$S_\lambda = X_1 + \ldots + X_{N_\lambda}$$

(для определенности мы полагаем $\sum_{j=1}^{0} = 0$).

В этом разделе мы уточним приведенные выше результаты и распространим результаты, приведенные в разделе 1.6.3, на пуассоновские случайные суммы, построим оценки скорости сходимости функции распределения

$$F_\lambda(x) \equiv \mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - \lambda m}{\sqrt{\lambda(m^2+\sigma^2)}} < x\Big)$$

к стандартной нормальной функции распределения $\Phi(x)$, которые позволят оценить асимптотически правильные константы в неравенстве Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм.

При построении оценок равномерного расстояния

$$\rho(F_\lambda, \Phi) = \sup_x |F_\lambda(x) - \Phi(x)|$$

мы рассмотрим два случая: общий, когда мы не располагаем никакой информацией о распределении слагаемых, кроме условия (2.4.27) и существования абсолютного момента порядка $2+\delta$

$$\beta_{2+\delta} \equiv \mathsf{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty \tag{2.4.28}$$

с $\delta \in (0, 1]$ и "гладкий" – когда вдобавок к условиям (2.4.27) и (2.4.28) мы предполагаем абсолютную интегрируемость характеристической функции $f(t)$ случайной величины X_1:

$$Q \;\equiv\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < \infty. \tag{2.4.29}$$

Заметим, что из последнего условия согласно теореме Римана–Лебега вытекает абсолютная непрерывность случайной величины X_1 и, более того, ограниченность ее плотности $p(x)$ числом $Q/2\pi$:

$$A \equiv \sup_x p(x) = \frac{1}{2\pi}\sup_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t)dt \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt = \frac{Q}{2\pi}.$$

При этом из доказанного в работе (Прохоров, 1963) неравенства $A \geq (2\sqrt{3})^{-1}$, справедливого для всех абсолютно непрерывных случайных величин с нулевым ожиданием, единичной дисперсией и ограниченной плотностью $p(x)$, следует, что при условиях (2.4.27) число Q также не может быть сколь угодно близко к нулю, а именно, всегда выполнено неравенство

$$Q \ \geq \ \frac{\pi}{\sigma\sqrt{3}}.$$

Обозначим

$$m_2^2 = \mathsf{E}X_1^2 \ \ (= m^2 + \sigma^2).$$

Характеристическую функцию нормированной суммы

$$\xi_\lambda \equiv \frac{S_\lambda - \lambda m}{m_2\sqrt{\lambda}}$$

будем обозначать $f_\lambda(t)$,

$$f_\lambda(t) = \mathsf{E}e^{it\xi_\lambda} = \mathsf{E}\exp\left\{it\frac{S_\lambda - \lambda m}{\sqrt{\lambda(m^2+\sigma^2)}}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\lambda\Big[f\Big(\frac{t}{m_2\sqrt{\lambda}}\Big) - \frac{imt}{m_2\sqrt{\lambda}} - 1\Big]\right\}.$$

Вспомогательные результаты

Следующая лемма устанавливает связь между распределениями пуассоновских сумм и сумм случайных величин с неслучайным числом слагаемых. Это утверждение является основным инструментом, который мы будем использовать, применяя известные результаты, справедливые в классической ситуации, к пуассоновским случайным суммам.

Обозначим

$$\nu = \frac{\lambda}{n}.$$

Лемма 2.4.7. *Распределение пуассоновской случайной суммы S_λ совпадает с распределением неслучайной суммы n независимых одинаково распределённых случайных величин, каким бы ни было натуральное число $n \geq 1$:*

$$X_1 + \ldots + X_{N_\lambda} \ \stackrel{d}{=} \ Y_{\nu,1} + \ldots + Y_{\nu,n}, \tag{2.4.30}$$

где при каждом n случайные величины $Y_{\nu,1}, \ldots, Y_{\nu,n}$ независимы и одинаково распределены. При этом, если случайная величина X_1 удовлетворяет условиям (2.4.27) и (2.4.28) с $0 < \delta \leq 1$, то для моментов случайной величины $Y_{\nu,1}$ имеют место соотношения:

$$\mathsf{E}Y_{\nu,1} = m \cdot \nu, \quad \mathsf{D}Y_{\nu,1} = m_2^2 \cdot \nu,$$

$$\mathsf{E}|Y_{\nu,1} - m\nu|^{2+\delta} \le \nu\beta_{2+\delta}(1 + 40\nu) \quad \text{при} \quad n \ge \lambda.$$

Доказательство. В основе доказательства лежит безграничная делимость пуассоновского распределения, из которой следует, что для любого натурального $n \ge 1$ характеристическая функция $f_{S_\lambda}(t)$ пуассоновской суммы S_λ может быть представлена в виде

$$f_{S_\lambda}(t) = \exp\{\lambda(f(t) - 1)\} = [\exp\{\nu(f(t) - 1)\}]^n \equiv [f_{Y_{\nu,1}}(t)]^n,$$

где $\nu = \lambda/n$, а $f_{Y_{\nu,1}}$ – характеристическая функция случайной величины $Y_{\nu,1}$. Из её вида вытекает, что распределение каждого из слагаемых $Y_{\nu,1}, \ldots, Y_{\nu,n}$ совпадает с распределенем случайной суммы исходных случайных величин

$$Y_{\nu,k} \stackrel{d}{=} X_1 + \ldots + X_{N_\nu}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где N_ν – случайная величина, распределённая по закону Пуассона с параметром ν и независимая от последовательности $X_1, X_2, \ldots$ Отсюда непосредственно вытекают соотношения между первым и вторым моментами случайных величин $Y_{\nu,1}$ и X_1. Докажем соотношение между абсолютными моментами порядка $2+\delta$. По формуле полной вероятности

$$\mathsf{E}|Y_{\nu,1} - m\nu|^{2+\delta} \le e^{-\nu}\Big(\nu^{2+\delta}|m|^{2+\delta} + \nu\mathsf{E}|X_1 - m\nu|^{2+\delta} + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!}\mathsf{E}|X_1 + \ldots + X_k - m\nu|^{2+\delta}\Big).$$

Второе и третье слагаемые в этой сумме рассмотрим по отдельности. Для этого, не ограничивая общности, будем считать, что $n \ge \lambda$, то есть $\nu \le 1$. В силу неравенства Минковского мы имеем

$$\Big(\mathsf{E}|X_1 - m\nu|^{2+\delta}\Big)^{\frac{1}{2+\delta}} \le (\beta_{2+\delta})^{\frac{1}{2+\delta}} + |m|\nu = (\beta_{2+\delta})^{\frac{1}{2+\delta}}\left(1 + \frac{|m|\nu}{(\beta_{2+\delta})^{1/(2+\delta)}}\right).$$

Пользуясь тем, что $\nu \le 1$ и $0 < \delta \le 1$, а также тем, что в силу неравенства Ляпунова отношение $|m|/\beta_{2+\delta}^{1/(2+\delta)}$ не превосходит 1, получаем

$$\mathsf{E}|X_1 - m\nu|^{2+\delta} \le \beta_{2+\delta}(1+\nu)^{2+\delta} \le \beta_{2+\delta}(1+\nu)^3 \le \beta_{2+\delta}(1 + 7\nu).$$

Для оценивания третьего слагаемого заметим, что из неравенства Ляпунова несложно получить следующее неравенство (см., например, (Бхаттачария и Ранга Рао, 1982), с. 62):

$$\Big|\sum_{i=1}^{k} x_i\Big|^r \le k^{r-1}\sum_{i=1}^{k}|x_i|^r, \quad x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \ldots, k, \ r \ge 1.$$

При $r = 2+\delta$ из этого неравенства вытекает, что

$$\mathsf{E}|X_1 + \ldots + X_k - m\nu|^{2+\delta} \le \mathsf{E}(|X_1| + \ldots + |X_k| + |m|\nu)^{2+\delta} \le$$
$$\le (k+1)^{1+\delta}(k\beta_{2+\delta} + (|m|\nu)^{2+\delta}) \le \beta_{2+\delta}(k+1)^3$$

(здесь мы воспользовались тем, что $0 < \delta \le 1$, $|m|^{2+\delta} \le \beta_{2+\delta}$ и $\nu \le 1$). Таким образом

$$\mathsf{E}|Y_{\nu,1} - m\nu|^{2+\delta} \le \nu\mathsf{E}|X_1 - m\nu|^{2+\delta} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\nu^k}{k!}\mathsf{E}|X_1 + \ldots + X_k - m\nu|^{2+\delta} +$$
$$+\nu^{2+\delta}|m|^{2+\delta} \le \nu\beta_{2+\delta}[1 + (8+K)\nu],$$

где

$$K = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k+1)^3}{k!} = 15e - 9 < 32$$

(см. доказательство Теоремы 2.4.3), откуда и следует утверждение леммы.

Пусть X – произвольная случайная величина. Обозначим

$$\Lambda_0^{2+\delta}(X) = \frac{\mathsf{E}|X - \mathsf{E}X|^{2+\delta}}{(\mathsf{D}X)^{(2+\delta)/2}}, \quad \Lambda_1^{2+\delta}(X) = \frac{\mathsf{E}|X|^{2+\delta}}{(\mathsf{E}X^2)^{(2+\delta)/2}}.$$

Величины $\Lambda_0^{2+\delta}(X)$ и $\Lambda_1^{2+\delta}(X)$ будем называть соответственно *центральным* и *нецентральным ляпуновскими отношениями.*

Очевидно, что

$$\Lambda_0^{2+\delta} \equiv \Lambda_0^{2+\delta}(X_1) = \frac{\mathsf{E}|X_1 - m|^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}},$$

$$\Lambda_1^{2+\delta} \equiv \Lambda_1^{2+\delta}(X_1) = \frac{\beta_{2+\delta}}{m_2^{2+\delta}} = \frac{\beta_{2+\delta}}{(m^2+\sigma^2)^{(2+\delta)/2}}.$$

Величину

$$L_\lambda^{2+\delta} = \frac{\Lambda_1^{2+\delta}}{\lambda^{\delta/2}} = \frac{\beta_{2+\delta}}{m_2^{2+\delta}\lambda^{\delta/2}} = \frac{\beta_{2+\delta}}{(m^2+\sigma^2)^{(2+\delta)/2}\lambda^{\delta/2}}$$

мы будем называть *нецентральной ляпуновской дробью* порядка $2+\delta$.

Из леммы 2.4.7 вытекает

Следствие 2.4.1. *В предположениях* (2.4.27) *и* (2.4.28) *распределение стандартизованной пуассоновской случайной суммы*

$$\widetilde{S}_\lambda = \frac{S_\lambda - \lambda m}{m_2\sqrt{\lambda}}$$

совпадает с распределением нормированной неслучайной суммы n независимых одинаково распределённых стандартизованных случайных величин, каким бы ни было натуральное число $n \geq 1$:

$$\widetilde{S}_\lambda \stackrel{d}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} Z_{\nu,k},$$

где при каждом n случайные величины $Z_{\nu,1}, \ldots, Z_{\nu,n}$ независимы, одинаково распределены и имеют нулевое среднее и единичную дисперсию. Кроме того, при всех $n \geq \lambda$ их абсолютный момент порядка $2+\delta$ ограничен величиной

$$\mathsf{E}|Z_{\nu,1}|^{2+\delta} \leq \Lambda_1^{2+\delta}(X_1)(1+40\nu)\left(\frac{n}{\lambda}\right)^{\delta/2}, \quad \nu = \frac{\lambda}{n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 2.4.7, для любого натурального n справедливо представление

$$\widetilde{S}_\lambda = \frac{S_\lambda - \lambda m}{m_2\sqrt{\lambda}} \stackrel{d}{=} \frac{Y_{\nu,1} + \ldots + Y_{\nu,n} - nm\nu}{m_2\sqrt{n\nu}} \equiv \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} Z_{\nu,k},$$

в котором случайные величины

$$Z_{\nu,k} \equiv \frac{Y_{\nu,k} - m\nu}{m_2\sqrt{\nu}} = \frac{Y_{\nu,k} - \mathsf{E}Y_{\nu,k}}{\sqrt{\mathsf{D}Y_{\nu,k}}}$$

независимы, одинаково распределены и имеют нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию, причем в силу той же леммы при всех $n \geq \lambda$ имеет место соотношение

$$\mathsf{E}|Z_{\nu,1}|^{2+\delta} = \Lambda_0^{2+\delta}(Y_{\nu,1}) = \frac{\mathsf{E}|Y_{\nu,1} - \mathsf{E}Y_{\nu,1}|^{2+\delta}}{(\mathsf{D}Y_{\nu,1})^{(2+\delta)/2}} \leq$$

$$\leq \frac{\beta_{2+\delta}(1+40\nu)}{m_2^{2+\delta}\nu^{\delta/2}} = (1+40\nu) \cdot \frac{\Lambda_1^{2+\delta}(X_1)}{\nu^{\delta/2}}. \tag{2.4.31}$$

Неравенство Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм слагаемых с моментами порядка $2+\delta$.

В этом разделе мы докажем аналог неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм, в которых слагаемые $X_1, X_2, \ldots$ удовлетворяют условиям (2.4.27) и (2.4.28). Прежде всего заметим, что, используя тот же метод, которым была доказана Теорема 2.4.3, мы можем легко получить следующее утверждение

Теорема 2.4.8. *Пусть выполнены условия* (2.4.27) *и* (2.4.28) *с* $0 < \delta \le 1$. *Тогда*

$$\rho(F_\lambda, \Phi) \le C_\delta \cdot L_\lambda^{2+\delta},$$

где C_δ *– абсолютная положительная константа из неравенства Берри–Эссеена для неслучайных сумм. При этом для* C_δ *имеют место оценки*

$\delta =$	$C_\delta \le$	$\delta =$	$C_\delta \le$	$\delta =$	$C_\delta \le$	$\delta =$	$C_\delta \le$	$\delta =$	$C_\delta \le$
0.1	1.102	0.2	1.076	0.3	1.008	0.4	0.950	0.5	0.902
0.6	0.863	0.7	0.833	0.8	0.812	0.9	0.802	1.0	0.706

Доказательство. В силу представления (2.4.30) и неравенства Берри–Эссеена для неслучайных сумм (1.6.3) при каждом $n \ge 1$ справедлива оценка

$$\rho(F_\lambda, \Phi) \le \frac{C_\delta}{n^{\delta/2}} \mathsf{E}|Z_{\nu,1}|^{2+\delta},$$

из которой с использованием неравенства (2.4.31) мы получаем

$$\rho(F_\lambda, \Phi) \le \frac{C_\delta}{n^{\delta/2}} \Lambda_1^{2+\delta} \Big(\frac{n}{\lambda}\Big)^{\delta/2} \Big(1 + \frac{40\lambda}{n}\Big),$$

откуда вследствие произвольности n вытекает требуемый результат. Приведенная в формулировке теоремы таблица оценок констант C_δ отличается от полученной в работе (Tysiak, 1983) и приведенной также в работе (Paditz, 1996) только значением, соответствующим $\delta = 1.0$, подробности см. в разделах 1.6.2 и 1.6.3. Теорема доказана.

Уточнение неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм

В данном разделе мы покажем, что на самом деле, неравенство, устанавливаемое Теоремой 2.4.8, по крайней мере для $\delta \in (0, 1)$ является слишком грубым и может быть существенно уточнено. Более того, мы уточним и неравенство Берри–Эссеена при $\delta = 1$ для гладких распределений слагаемых.

Теорема 2.4.9. *Пусть выполнены условия* (2.4.47) *и* (2.4.48) *для некоторого* $0 < \delta < 1$. *Тогда для всех* $\lambda > 0$ *справедлива оценка*

$$\rho(F_\lambda, \Phi) \le C(\delta) \cdot L_\lambda^{2+\delta},$$

где

$$C(\delta) = \frac{2^{1-\delta/2}\Gamma(\frac{2+\delta}{2})}{\pi(1+\delta)(2+\delta)}$$

Доказательство этой теоремы основано на оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме для сумм случайных величин с *неслучайным* числом слагаемых, приведенной в разделе 1.6.3 (см. Теорему 1.6.2). Для удобства ссылок мы сформулируем соответствующее утверждение еще раз.

Пусть d – некоторое число, лежащее в интервале $(0, \sqrt{2})$. Введем функции

$$a(\delta, d) = \frac{d^{2-\delta}}{4}\left[\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{d^2}{2}\right)^{r-2}\right] + \frac{2^{1-\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)}, \tag{2.4.32}$$

$$b(\delta, d) = \frac{1}{2} - d^{\delta/2}a(\delta, d). \tag{2.4.33}$$

Несложно видеть, что

$$\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{d^2}{2}\right)^{r-2} = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j+2}\left(\frac{d^2}{2}\right)^{j} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{d^2}{2}\right)^{j} = \frac{1}{2} + \frac{d^2}{3(2-d^2)},$$

так что

$$\lim_{d\to 0+} a(\delta, d) = \frac{2^{1-\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)}, \qquad \lim_{d\to 0+} b(\delta, d) = \frac{1}{2}. \tag{2.4.34}$$

Более того, можно убедиться, что функция $b(\delta, d)$ монотонно убывает при $d \in (0, \sqrt{2})$, причем на интервале $(0, \sqrt{2})$ лежит единственный нуль этой функции, который мы обозначим $\overline{d}(\delta)$. Пусть

$$K(\delta, d) = \frac{\Gamma(\frac{2+\delta}{2})}{2\pi}\cdot\frac{a(\delta, d)}{[b(\delta, d)]^{1+\delta/2}}. \tag{2.4.35}$$

Учитывая соотношения (2.4.34), легко видеть, что на интервале $(0, \overline{d}(\delta))$ функция $K(\delta, d)$ монотонно и непрерывно возрастает, причем

$$\lim_{d\to 0+} K(\delta, d) = \lim_{d\to 0+}\frac{\Gamma(\frac{2+\delta}{2})a(\delta, d)}{2\pi\,[b(\delta, d)]^{1+\delta/2}} = \frac{2^{1-\delta/2}\Gamma(\frac{2+\delta}{2})}{\pi(1+\delta)(2+\delta)} \equiv C(\delta),$$

$$\lim_{d\to \overline{d}(\delta)-} K(\delta, d) = +\infty.$$

Поэтому для любого $0 < \varepsilon < +\infty$ существует единственный корень $d(\delta, \varepsilon)$ уравнения

$$K(\delta, d) = C(\delta) + \varepsilon, \tag{2.4.36}$$

лежащий в интервале $(0, \overline{d}(\delta))$. При этом $d(\delta, \varepsilon)$ как функция ε монотонно и непрерывно возрастает от 0 до $\overline{d}(\delta)$ при ε, изменяющемся от 0 до $+\infty$.

Обозначим $\widetilde{d}(\delta) = \min\{\overline{d}(\delta),\, (\beta_{2+\delta})^{-2(1-\delta)/2}\}$,

$$F_n(x) = \mathsf{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right)$$

Лемма 2.4.8. *Пусть выполнены условия* (2.4.27) *и* (2.4.28) *для некоторого* $0 < \delta \leq 1$. *Предположим, что* $m = 0$ *и* $\sigma^2 = 1$. *Тогда для любого* $n \geq 1$ *справедлива оценка*

$$\rho(F_n,\, \Phi) \equiv \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq C_n(\delta) \cdot \frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}},$$

где

$$C_n(\delta) = \inf_{\substack{\gamma_0<\gamma<\infty \\ 0<d<\widetilde{d}(\delta)}} \left\{\frac{1}{2\alpha(\gamma) - 1}\left[K(\delta, d) + \frac{\gamma\alpha(\gamma)}{\sqrt{2\pi}dn^{(1-\delta)/2}}\right]\right\},$$

$$\alpha(\gamma) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\gamma/2} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 dy \left(= \frac{2}{\pi\gamma}(\gamma \mathrm{Si}(\gamma) + \cos\gamma - 1)\right),$$

а γ_0 *– решение уравнения* $\alpha(\gamma) = 1/2$ *(можно вычислить, что* $\gamma_0 \approx 1.69958$*). Функция* $K(\delta, d)$ *определена в* (2.4.35).

Доказательство леммы см. в разделе 1.6.3.

Доказательство Теоремы 2.4.9. Представим распределение стандартизованной пуассоновской суммы, согласно следствию 2.4.1, в виде нормированной суммы независимых одинаково распределённых случайных величин $Z_{\nu,k}$, $k = \overline{1,n}$, каково бы ни было натуральное число $n \geq \lambda$ (напомним, что $\nu = \lambda/n$):

$$\widetilde{S}_\lambda \stackrel{d}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n Z_{\nu,k}, \quad \mathsf{E}Z_{\nu,k} = 0, \quad \mathsf{D}Z_{\nu,k} = 1,$$

$$\mathsf{E}|Z_{\nu,1}|^{2+\delta} \leq (1 + 40\nu)\Lambda_1^{2+\delta}(X_1)\left(\frac{n}{\lambda}\right)^{\delta/2}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\rho(F_\lambda, \Phi) \leq \inf_{n\geq\lambda} \rho(F_n, \Phi),$$

где

$$F_n(x) = \mathsf{P}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n Z_{\nu,k} < x\Big).$$

Для случайных величин $Z_{\nu,k}$, $k = 1, \ldots, n$ выполнены все условия Леммы 2.4.8, поэтому для правой части последнего соотношения справедливо неравенство

$$\inf_{n\geq\lambda} \rho(F_n, \Phi) \leq \inf_{n\geq\lambda} C_n(\delta) \cdot \frac{\mathsf{E}|Z_{\nu,1}|^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} C_n(\delta) \cdot \frac{\Lambda_1^{2+\delta}(X_1)(1+40\lambda/n)}{\lambda^{\delta/2}} \leq$$

$$\leq L_\lambda^{2+\delta} \cdot \inf_{\substack{\gamma_0<\gamma\leq\infty \\ 0<d<\widetilde{d}(\delta)}} \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2\alpha(\gamma)-1} \left[K(\delta, d) + \frac{\gamma\alpha(\gamma)}{\sqrt{2\pi} d n^{(1-\delta)/2}} \right] \right\}.$$

Поскольку $\delta < 1$, второе слагаемое под знаком предела в последнем соотношении стремится к нулю при $n \to \infty$, а значит

$$\rho(F_\lambda, \Phi) \leq L_\lambda^{2+\delta} \cdot \inf_{\substack{\gamma_0<\gamma\leq\infty \\ 0<d<\widetilde{d}(\delta)}} \frac{K(\delta, d)}{2\alpha(\gamma)-1} =$$

$$= L_\lambda^{2+\delta} \cdot \lim_{\substack{\gamma\to\infty \\ d\to 0}} \frac{K(\delta, d)}{2\alpha(\gamma)-1} = C(\delta) \cdot L_\lambda^{2+\delta},$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Заметим, что оценка, устанавливаемая Теоремой 2.4.9, “лучше”, чем аналогичные (при $m = 0$ и $\sigma^2 = 1$) оценки для сумм случайных величин с неслучайным числом слагаемых, приведенные в разделе 1.6.3 как для общей, так и для “гладкой” ситуации. Действительно, коэффициент $C_n(\delta)$ при ляпуновской дроби порядка $2+\delta$ при всех $\delta \in (0, 1)$ строго больше, чем коэффициент $C(\delta)$ при $L_\lambda^{2+\delta}$. В “гладком” случае (когда слагаемые имеют ограниченную плотность) оценка в классической ситуации имеет вид суммы двух слагаемых, одно из которых медленнее всего убывает по n и представляет собой произведение ляпуновской дроби порядка $2+\delta$ на сумму $C(\delta)$ и сколь угодно малой положительной “добавки” ε, а второе убывает экспоненциально быстро с ростом числа слагаемых, но бесконечно возрастает при $\varepsilon \to 0$. В том же разделе было показано, что от положительной “добавки” ε в коэффициенте при первом слагаемом можно избавиться, но за счет существенного ухудшения скорости убывания второго слагаемого: с экспоненциальной до степенной; в случае же пуассоновских сумм при $L_\lambda^{2+\delta}$ мы сразу имеем $C(\delta)$ без каких бы то ни было “добавок”, и второе слагаемое при этом просто равно нулю.

Теорема 2.4.9 довольно существенно уточняет неравенство $\rho(F_\lambda, \Phi) \leq C_\delta L_\lambda^{2+\delta}$, составляющее утверждение Теоремы 2.4.8. Для C_δ

при $\delta = 0.1,\ 0.2, \ldots, 0.9$, известны оценки, значения которых изменяются от 0.8 при $\delta = 0.9$ до 1.1 при $\delta = 0.1$ (см. таблицу, приведенную в Теореме 2.4.8). Из Теоремы 2.4.9 вытекает неравенство

$$C_\delta \leq C(\delta),$$

справедливое для $\delta \in (0, 1)$.

Значения $C(\delta)$ при некоторых δ приведены в следующей таблице:

δ	$C(\delta)$	δ	$C(\delta)$	δ	$C(\delta)$
0.05	0.2867	0.40	0.1515	0.75	0.0907
0.10	0.2592	0.45	0.1399	0.80	0.0850
0.15	0.2352	0.50	0.1294	0.85	0.0797
0.20	0.2141	0.55	0.1201	0.90	0.0750
0.25	0.1955	0.60	0.1116	0.95	0.0706
0.30	0.1791	0.65	0.1040	1.00	0.0665
0.35	0.1645	0.70	0.0970		

Сопоставляя эту таблицу с таблицей значений константы C_δ, приведенной в Теореме 2.4.8, мы замечаем, что при всех значениях $\delta \in (0, 1)$ величина $C(\delta)$ существенно меньше C_δ. При этом отношение $C_\delta / C(\delta)$ изменяется от 4 (при малых δ) до примерно 11 (при δ, близких к единице).

Несложно убедиться, что

$$\sup_{0<\delta<1} C(\delta) = \lim_{\delta \to 0+} \frac{2^{1-\delta/2} \Gamma\left(\frac{2+\delta}{2}\right)}{\pi(1+\delta)(2+\delta)} = \frac{1}{\pi} < 0.31831,$$

поэтому мы получаем следующую равномерную по δ оценку постоянной $C(\delta)$ в аналоге неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм слагаемых в случае, когда слагаемые не имеют третьих моментов.

Следствие 2.2.2. *В условиях* (2.4.27) *и* (2.4.28) *с* $\delta \in (0, 1)$ *выполнено неравенство* $C(\delta) \leq 1/\pi$. *Другими словами,*

$$\rho(F_\lambda, \Phi) \leq \frac{1}{\pi} \cdot L_\lambda^{2+\delta}.$$

"Гладкий" случай

В этом разделе мы сосредоточися на случае $\delta = 1$, то есть будем считать, что

$$\beta_3 \equiv \mathsf{E}|X_1|^3 < \infty. \tag{2.4.37}$$

Нашей целью будет уточнение неравенства Берри–Эссеена, устанавливаемого Теоремой 2.4.3, при дополнительном условии гладкости распределений слагаемых.

Асимптотические свойства пуассоновских случайных сумм сходны с соответствующими свойствами сумм случайных величин с неслучайным числом слагаемых. Однако эта аналогия не абсолютна. Например, в отличие от распределений сумм с неслучайным числом абсолютно непрерывных случайных величин, распределение определенной выше пуассоновской случайной суммы не является абсолютно непрерывным из-за атома в нуле. Функцию распределения центрированной и нормированной пуассоновской суммы

$$\widetilde{S}_\lambda = \frac{S_\lambda - \lambda m}{\sqrt{\lambda(m^2+\sigma^2)}} = \frac{S_\lambda - \lambda m}{m_2\sqrt{\lambda}}$$

можно представить в виде смеси двух функций распределения: вырожденной в нуле и абсолютно непрерывной, то есть

$$F_\lambda(x) \equiv \mathsf{P}(S_\lambda < \lambda m + m_2\sqrt{\lambda}x) =$$

$$= e^{-\lambda}E_0(\lambda m + m_2\sqrt{\lambda}x) + (1-e^{-\lambda})H_\lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.4.38}$$

где $E_0(x)$ – функция распределения с единственным единичным скачком в нуле, а $H_\lambda(x)$ – абсолютно непрерывная функция распределения,

$$H_\lambda(x) = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}F^{*k}(\lambda m + m_2\sqrt{\lambda}x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где F^{*k} – k-кратная свертка функции распределения $F(x)$ случайной величины X_1 с самой собой. Поскольку $e^{-\lambda} \to 0$ при $\lambda \to \infty$, функция распределения $F_\lambda(x)$ становится "все более и более" абсолютно непрерывной при возрастании λ. С другой стороны, как мы уже убедились, при $\lambda \to \infty$ функция распределения $F_\lambda(x)$ асимптотически нормальна (см. раздел 2.4.1). Следовательно, абсолютно непрерывная компонента H_λ функции распределения F_λ асимптотически нормальна. В этом разделе мы распространим результаты, приведенные в разделе 1.6.3, на пуассоновские случайные суммы и построим оценки скорости сходимости функций распределения $F_\lambda(x)$ к стандартной нормальной функции распределения $\Phi(x)$ при условии абсолютной непрерывности распределений слагаемых.

Характеристическую функцию, соответствующую функции распределения $H_\lambda(x)$, обозначим $h_\lambda(t)$. Чтобы получить её явное выражение, запишем характеристическую функцию $f_\lambda(t)$ в виде смеси характеристических функций вырожденного в точке $(-m\sqrt{\lambda}/m_2)$ распределения, вес которого равен $e^{-\lambda}$, и абсолютно непрерывного H_λ с весом $1-e^{-\lambda}$:

$$f_\lambda(t) = \exp\left\{-\lambda\left(\frac{imt}{m_2\sqrt{\lambda}}+1\right)\right\} + (1-e^{-\lambda})h_\lambda(t),$$

откуда находим, что

$$h_\lambda(t) \ = \ \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\exp\Big\{-it\cdot\frac{m\sqrt{\lambda}}{m_2}\Big\}\left[\exp\left\{\lambda f\left(\frac{t}{m_2\sqrt{\lambda}}\right)\right\}-1\right].$$

Заметим, что характеристические функции $h_\lambda(t)$ и $f_\lambda(t)$ связаны соотношением

$$h_\lambda(t)-f_\lambda(t) \ = \ \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\Big(f_\lambda(t)-\exp\Big\{-it\cdot\frac{m\sqrt{\lambda}}{m_2}\Big\}\Big). \tag{2.4.39}$$

В этом разделе мы будем предполагать, что характеристическая функция $f(t)$ случайной величины X_1 абсолютно интегрируема, то есть выполнено условие (2.4.29). Как уже было сказано выше, последнее условие гарантирует абсолютную непрерывность случайной величины X_1, и, более того, ограниченность ее плотности $p(x)$ числом $A \le Q/(2\pi)$, где число Q определено соотношением (2.4.29).

Теорема 2.4.10. *Предположим, что выполнены условия* (2.4.27), (2.4.37) *и* (2.4.29). *Тогда для любого $\lambda>0$ справедлива оценка*

$$\rho(F_\lambda,\Phi) \equiv \sup_x |F_\lambda(x)-\Phi(x)| \le$$

$$\le \inf_{0<d<\sqrt{2}}\Big\{\frac{(1-d/3)^{-3/2}}{6\sqrt{2\pi}}\cdot L_\lambda^3 + U_\lambda(Q,m_2,\beta_3,d)\Big\},$$

где

$$U_\lambda(Q,m_2,\beta_3,d) = e^{-\lambda}+\frac{e^{-\lambda}}{\pi(1-e^{-\lambda})}\Big(\frac{d^2\lambda}{4\Lambda_1^6}+\frac{d\sqrt{\lambda}}{\Lambda_1^3}\Big)+\frac{\Lambda_1^6}{\pi d^2\lambda}\exp\Big\{-\frac{d^2\lambda}{2\Lambda_1^6}\Big\}+$$

$$+\frac{Qm_2\Lambda_1^3\lambda}{2\pi d(1-e^{-\lambda})}\exp\left\{-\frac{4d^2\lambda}{3Q^2m_2^2\Lambda_1^6}\Big(1-\Big(\frac{2d}{\pi\Lambda_1^2}\Big)^3\Big)^3\right\}.$$

Заметим, что для любого $0<d<\sqrt{2}$ второе слагаемое $U_\lambda(Q,m_2,\beta_3,d)$ убывает экспоненциально быстро с ростом λ.

Поскольку основной вклад в оценку, устанавливаемую Теоремой 2.4.10, вносит первое слагаемое под знаком инфимума в правой части, медленнее других убывающее по λ, существенную роль играет абсолютная константа в этом слагаемом. С целью сделать вид этой константы более наглядным, мы приведём еще одну, эквивалентную, но, на наш взгляд, более удобную формулировку Теоремы 2.4.10. Для этого заметим, что функция $(1-d/3)^{-3/2}$ непрерывно и монотонно возрастает на интервале $(0, \sqrt{2})$, так что её инфимум совпадает с предельным значением в нуле и равен единице. Поэтому для любого положительного ε найдется единственный корень $d = d_\varepsilon$ уравнения

$$(1 - d/3)^{-3/2} = 1 + 6\sqrt{2\pi}\varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

лежащий в интервале $(0, \sqrt{2})$. Легко видеть, что корень указанного уравнения равен

$$d_\varepsilon = 3(1 - (1 + 6\sqrt{2\pi}\varepsilon)^{2/3}). \tag{2.4.40}$$

С учетом сказанного Теорема 2.4.10 приобретает следующий вид.

Теорема 2.4.11. *Предположим, что выполнены условия* (2.4.27), (2.4.37) *и* (2.4.29). *Тогда для любого* $\lambda > 0$ *справедлива оценка*

$$\rho(F_\lambda, \Phi) \le \inf_{\varepsilon>0} \left\{ \left(\frac{1}{6\sqrt{2\pi}} + \varepsilon\right) \cdot L_\lambda^3 + U_\lambda(Q, m_2, \beta_3, d_\varepsilon)\right\},$$

где d_ε *определено в* (2.4.40), *а* $U_\lambda(Q, m_2, \beta_3, d_\varepsilon)$ *– в формулировке Теоремы* 2.4.10.

Для доказательства Теоремы 2.4.10 нам понадобится пара вспомогательных утверждений.

Лемма 2.4.9. *Пусть выполнены условия* (2.4.27) *и* (2.4.37). *Тогда для любого* $t \in \mathbb{R}$

$$\left| f(t) - 1 - imt + \frac{m_2^2 t^2}{2} \right| \le \frac{1}{6} \cdot \beta_3 |t|^3.$$

Доказательство можно найти, например, в работе (Королев и Шевцова, 2005a).

Лемма 2.4.9.*Пусть выполнены условия* (2.4.27) *и* (2.4.37). *Тогда для любого* $\lambda > 0$, *и любого* $d \in (0, \sqrt{2})$ *при* $|t| \le T_\lambda \equiv d\sqrt{\lambda}/\Lambda_1^3$ *справедлива оценка*

$$\left| f_\lambda(t) - e^{-t^2/2} \right| \;\le\; \frac{|t|^3}{6} \cdot L_\lambda^3 \cdot e^{-b(d)t^2}, \quad \text{где} \quad b(d) = \frac{1}{2} - \frac{d}{6}.$$

Доказательство. Характеристическая функция $f_\lambda(t)$ стандартизованной пуассоновской суммы $\widetilde{S}_\lambda$ равна

$$f_\lambda(t) = \exp\left\{\lambda\left(f\left(\frac{t}{m_2\sqrt{\lambda}}\right) - \frac{imt}{m_2\sqrt{\lambda}} - 1\right)\right\}.$$

Поэтому

$$\left|f_\lambda(t) - e^{-t^2/2}\right| = e^{-t^2/2}\left|\exp\left\{\lambda\left(f\left(\frac{t}{m_2\sqrt{\lambda}}\right) - \frac{imt}{m_2\sqrt{\lambda}} - 1\right) + \frac{t^2}{2}\right\} - 1\right| \le$$

$$\le e^{-t^2/2}|h(t)|e^{|h(t)|}, \tag{2.4.41}$$

где

$$h(t) = \lambda\left(f\left(\frac{t}{m_2\sqrt{\lambda}}\right) - \frac{imt}{m_2\sqrt{\lambda}} - 1\right).$$

Оценим $h(t)$. Из Леммы 2.4.8 вытекает, что существует такое комплексное число θ, $|\theta| \le 1$, что

$$f(t) = 1 + imt - \frac{m_2^2 t^2}{2} + \frac{\theta}{6}\cdot\beta_3|t|^3,$$

поэтому $h(t)$ можно представить в виде

$$h(t) = \lambda\left(-\frac{t^2}{2\lambda} + \theta\cdot\frac{\beta_3|t|^3}{6m_2^3\lambda^{3/2}}\right) + \frac{t^2}{2} = \theta\cdot\frac{\Lambda_1^3|t|^3}{6\sqrt{\lambda}},$$

откуда вытекают справедливые для всех действительных t и для $|t| \le d\sqrt{\lambda}/\Lambda_1^3$, соответственно, оценки

$$|h(t)| \le \frac{\Lambda_1^3|t|^3}{6\sqrt{\lambda}} \quad \text{и} \quad |h(t)| \le \frac{dt^2}{6}.$$

Подставляя их в соотношение (2.4.41), получаем утверждение леммы.

Доказательство Теоремы 2.4.10. Из разложения (2.4.38) функции распределения $F_\lambda(x)$ на дискретную $E_0(x)$ и абсолютно непрерывную $H_\lambda(x)$ компоненты вытекает, что равномерное расстояние между F_λ и Φ связано с расстоянием между H_λ и Φ неравенством

$$\rho(F_\lambda, \Phi) \le e^{-\lambda} + \rho(H_\lambda, \Phi), \tag{2.4.42}$$

так как

$$\sup_x |E_0(\lambda m + m_2\sqrt{\lambda}x) - \Phi(x)| \le 1.$$

Оценим величину $\rho(H_\lambda, \Phi) = \sup_x |H_\lambda(x) - \Phi(x)|$.

Из определения характеристической функции $h_\lambda(t)$ с учетом неравенства $|e^z - 1| \le |z|e^{|z|}$, справедливого для любого комплексного z, вытекает оценка

$$|h_\lambda(t)| \le \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}} \left| f\left(\frac{t}{m_2\sqrt{\lambda}}\right)\right|,$$

из которой в силу абсолютной интегрируемости характеристической функции $f(t)$ следует абсолютная интегрируемость и характеристической функции $h_\lambda(t)$. Это свойство $h_\lambda(t)$, а также моментные условия, налагаемые на распределение слагаемых, позволяют воспользоваться замечанием к Лемме 12.2 из книги (Бхаттачария и Ранга Рао, 1982), связывающим равномерное расстояние между двумя функциями распределения и разность соответствующих им характеристических функций. Имеем

$$2\pi\rho(H_\lambda, \Phi) \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|h_\lambda(t) - e^{-t^2/2}|}{|t|} dt \le I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int\limits_{-T_\lambda}^{+T_\lambda} \frac{|h_\lambda(t) - e^{-t^2/2}|}{|t|} dt, \quad I_2 = \int\limits_{|t|>T_\lambda} |t|^{-1} e^{-t^2/2} dt,$$

$$I_3 = l|t| > T_\lambda |t|^{-1} |h_\lambda(t)| dt, \quad T_\lambda = \frac{d\sqrt{\lambda}}{\Lambda_1^3} = \frac{dm_2^3\sqrt{\lambda}}{\beta_3}.$$

Оценим интегралы I_1, I_2, I_3. Имеем

$$I_1 \le \int\limits_{-T_\lambda}^{+T_\lambda} \frac{|h_\lambda(t) - f_\lambda(t)|}{|t|} dt + \int\limits_{-T_\lambda}^{+T_\lambda} \frac{|f_\lambda(t) - e^{-t^2/2}|}{|t|} dt \equiv I_{11} + I_{12}.$$

Заметим, что поскольку $\mathsf{E}\widetilde{S}_\lambda = 0$ и $\mathsf{D}\widetilde{S}_\lambda = 1$, то для характеристической функции f_λ случайной величины $\widetilde{S}_\lambda$ при всех $t \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|f_\lambda(t) - e^{-itm\sqrt{\lambda}/m_2}| \le |f_\lambda(t) - 1| + |e^{-itm\sqrt{\lambda}/m_2} - 1| \le \frac{t^2}{2} + \frac{|m|\sqrt{\lambda}}{m_2}|t| \le \frac{t^2}{2} + \sqrt{\lambda}|t|,$$

откуда с учетом соотношения (2.4.39) для интеграла I_{11} вытекает оценка

$$I_{11} = \int\limits_{-T_\lambda}^{+T_\lambda} \frac{|h_\lambda(t) - f_\lambda(t)|}{|t|} dt \le \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \int\limits_{-T_\lambda}^{+T_\lambda} |t|^{-1} \left| f_\lambda(t) - e^{-itm\sqrt{\lambda}/m_2} \right| dt \le$$

$$\leq \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \int\limits_{-T_\lambda}^{+T_\lambda} \Big(\frac{|t|}{2} + \sqrt{\lambda} \Big) dt = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \Big(\frac{T_\lambda^2}{2} + 2T_\lambda \sqrt{\lambda} \Big) =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \Big(\frac{d^2\lambda}{2\Lambda_1^6} + \frac{2d\sqrt{\lambda}}{\Lambda_1^3} \Big).$$

Величину I_{12} оценим при помощи Леммы 2.4.9. Поскольку при всех $0 < d < \sqrt{2}$ функция $b(d) = 1/2 - d/6$ строго положительна, I_{12} мажорируется следующим *сходящимся* интегралом.

$$I_{12} \leq \frac{L_\lambda^3}{6} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t|^2 e^{-b(d)t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{12[b(d)]^{3/2}} \cdot \frac{\Lambda_1^3}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{6(1-d/3)^{3/2}} \cdot \frac{\Lambda_1^3}{\sqrt{\lambda}}.$$

Интеграл I_2 оценивается непосредственно:

$$I_2 \leq \frac{2}{T_\lambda^2} \int\limits_{T_\lambda}^{\infty} t e^{-t^2/2} dt = \frac{2}{T_\lambda^2} \int\limits_{T_\lambda^2/2}^{\infty} e^{-y} dy = \frac{2\Lambda_1^6}{d^2\lambda} \exp\Big\{ -\frac{d^2\lambda}{2\Lambda_1^6} \Big\}.$$

Очевидно, что

$$I_3 \leq \frac{1}{T_\lambda} \int\limits_{|t|>T_\lambda} |h_\lambda(t)| dt = \frac{m_2\sqrt{\lambda} e^{-\lambda}}{T_\lambda(1-e^{-\lambda})} \int\limits_{m_2\sqrt{\lambda}|t|>T_\lambda} |\exp\{\lambda f(t)\} - 1| \, dt \leq$$

$$\leq \frac{m_2 \Lambda_1^3 \lambda e^{-\lambda}}{d(1-e^{-\lambda})} \int\limits_{|t|>d(\Lambda_1^3 m_2)^{-1}} |f(t)| e^{\lambda |f(t)|} dt.$$

Для оценки подынтегральной функции мы воспользуемся Следствием 2.5.1 из книги (Ushakov, 1999), согласно которому, если существует $\mathsf{E}\,|X_1|^3 \equiv \beta_3$ и $\sup\limits_x p(x) = A < \infty$, то для любого $\gamma \in (0,1)$

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{(1-\gamma)^3 \gamma^{2/3}}{12A^2(\beta_3)^{2/3}}, \quad \text{при } |t| > \frac{\pi \gamma^{1/3}}{2(\beta_3)^{1/3}} \equiv t_\gamma.$$

Так как $\Lambda_1^3 = \beta_3/m_2^3 \geq 1$, то в качестве γ можно взять

$$\gamma = \Big(\frac{2d}{\pi \Lambda_1^2} \Big)^3 \leq \Big(\frac{2d}{\pi} \Big)^3 < \Big(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \Big)^3 < 1.$$

При таком выборе γ граница интегрирования $d(\Lambda_1^3 m_2)^{-1}$ в точности совпадает с t_γ, и с учетом того, что $A \leq Q/(2\pi)$, мы можем продолжить цепочку оценок для I_3 следующим образом:

$$I_3 \leq \frac{m_2 \Lambda_1^3 \lambda}{d(1-e^{-\lambda})} \exp\left\{ -\frac{\lambda(1-\gamma)^3 \gamma^{2/3}}{12A^2 \beta_3^{2/3}} \right\} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, dt \leq$$

$$\leq \frac{Qm_2\Lambda_1^3\lambda}{d(1-e^{-\lambda})}\exp\left\{-\frac{4d^2\lambda}{3Q^2m_2^2\Lambda_1^6}\Big(1-\Big(\frac{2d}{\pi\Lambda_1^2}\Big)^3\Big)^3\right\}.$$

Теперь, объединяя оценки для интегралов I_{11}, I_{12}, I_2, I_3, подставляя их в (2.4.42) и замечая, что получившаяся правая часть не зависит от x, мы приходим к утверждению теоремы. Теорема доказана

Пусть ε_λ, $\lambda > 0$ – положительная функция, монотонно убывающая к нулю при $\lambda \to \infty$. Выберем эту функцию так, чтобы при всех Q, m_2 и β_3

$$U_\lambda(Q, m_2, \beta_3, d_\varepsilon) = o(\lambda^{-1/2}), \quad (\lambda \to \infty)$$

(такой выбор возможен в силу экспоненциально быстрого убывания функции $U_\lambda(Q, m_2, \beta_3, d)$ при $\lambda \to \infty$, а также её монотонной и непрерывной зависимости от аргумента d). Тогда, подставляя указанную функцию ε_λ в оценку из Теоремы 2.4.11, мы приходим к заключению о справедливости следующего утверждения.

Следствие 2.4.3. *В условиях* (2.4.27), (2.4.37) *и* (2.4.29) *при* $\lambda \to \infty$

$$\rho(F_\lambda,\,\Phi) \leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\cdot L_\lambda^3 + o(L_\lambda^3),$$

где $C(\delta)$ *определено в формулировке Теоремы* 2.4.9, *причем для величины* $o(L_n^{2+\delta})$ *справедливо представление*

$$o(L_\lambda^3) = \frac{\beta_3\varepsilon_\lambda}{m_2^3\sqrt{\lambda}} + U_\lambda(Q, m_2, \beta_3, d_{\varepsilon_\lambda}).$$

Отсюда вытекает следующая оценка асимптотически наилучшей постоянной $\underline{C}(1)$.

Следствие 2.4.4. *В условиях* (2.4.27), (2.4.37) *и* (2.4.29) *справедливо соотношение*

$$\underline{C}(1) = \sup\limsup_{\lambda\to\infty}\frac{m_2^3\sqrt{\lambda}}{\beta_3}\rho(F_\lambda, \Phi) \leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} < 0.0665,$$

где супремум берется по всем распределениям F, *удовлетворяющим условиям* (2.4.27), (2.4.37) *и* (2.4.29), *что означает, что для распределений с интегрируемой характеристической функцией* $\underline{C}(\delta)$ *непрерывна в точке* $\delta = 1$.

Результат, объявленный в Следствии 2.4.4, полностью согласуется с асимптотическим разложением функции распределения F_λ стандартизованной пуассоновской случайной суммы $\widetilde{S}_\lambda$ (см. раздел 2.5), из которого, в частности, вытекает, что он неулучшаем.

Рассмотрим подробнее структуру оценки точности нормальной аппроксимации для случая гладких распределений. Стремясь избавиться от присутствия ε в формулировке Теоремы 2.4.11, попытаемся уточнить вид члена $o(L_\lambda^3)$ в следствии 2.4.3. С этой целью заметим, что для $\varepsilon = \varepsilon(d) = ((1-d/3)^{-3/2}-1)/(6\sqrt{2\pi})$ как функции параметра $d \in (0, \sqrt{2})$ справедлива оценка

$$\varepsilon(d) \leq 0.1637 \cdot d.$$

В самом деле, поскольку $d/3 < \sqrt{2}/3 < 1$,

$$(1-d/3)^{-3/2} = 1 + R_1, \quad R_1 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\theta d}{3}\right)^{-5/2} \cdot \frac{d}{3}, \quad 0 < \theta < 1,$$

так что при всех $d \in (0, \sqrt{2})$

$$|R_1| \leq \frac{d}{2}\left(1 - \frac{d}{3}\right)^{-5/2} \leq \frac{d}{2}\Big(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\Big)^{-5/2} < 2.4613 \cdot d,$$

поэтому

$$\varepsilon(d) \leq \frac{|R_1|}{6\sqrt{2\pi}} < \frac{2.4613 \cdot d}{6\sqrt{2\pi}} < 0.1637 \cdot d.$$

Очевидно, что порядок, устанавливаемый этой оценкой, правильный, то есть

$$0 \; < \; \lim_{d \to 0} \frac{\varepsilon(d)}{d} \; < \; \infty.$$

Кроме того заметим, что из Теоремы 2.4.11 вытекает существование таких не зависящих от λ и d положительных конечных констант k_1, k_2, K_1, и K_2, что

$$\rho(F_\lambda, \Phi) \leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\Lambda_1^3}{\sqrt{\lambda}} + \varepsilon(d) \cdot \frac{\Lambda_1^3}{\sqrt{\lambda}} + \frac{K_1 \lambda}{d(1-e^{-\lambda})} e^{-k_1 d^2 \lambda} + \frac{K_2}{d^2 \lambda} e^{-k_2 d^2 \lambda} +$$
$$+ \Big(\frac{d^2 \lambda}{4\pi \Lambda_1^6 (1-e^{-\lambda})} + \frac{d\sqrt{\lambda}}{\pi \Lambda_1^3 (1-e^{-\lambda})} + 1\Big) e^{-\lambda}. \tag{2.4.43}$$

В качестве k_1, k_2, K_1, и K_2, очевидно, можно взять

$$k_1 = \frac{4}{3Q^2 m_2^2 \Lambda_1^6}\Big(1 - \Big(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\Big)^3\Big)^3 = \frac{0.0263}{Q^2 m_2^2 \Lambda_1^6}, \quad k_2 = \frac{1}{2\Lambda_1^6},$$

$$K_1 = \frac{Q m_2 \Lambda_1^3}{2\pi}, \quad K_2 = \frac{\Lambda_1^6}{\pi}.$$

Выберем функцию $d = d_\lambda$ так, чтобы порядки убывания всех слагаемых, начиная со второго, в соотношении (2.4.43) были бы максимально близки. Очевидно, медленнее всех из этих слагаемых убывает третье, поэтому будем подбирать функцию $d = d_\lambda$ таким образом, чтобы порядки второго и третьего слагаемых совпадали с точностью до логарифмического множителя в некоторой степени. С учетом соотношения $\varepsilon(d) \sim d,\ d \to 0$, мы приходим к заключению о том, что в этом случае функция d_λ должна удовлетворять соотношению

$$\lambda d_\lambda^2 = \frac{5\ln\lambda}{2\min(k_1,k_2)} = \frac{5\ln\lambda}{2k_1} = \frac{5Q^2m_2^2\Lambda_1^6\ln\lambda}{2\cdot 0.0263} = 95.0570\cdot Q^2m_2^2\Lambda_1^6\ln\lambda.$$

Отсюда

$$d_\lambda = \left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}\right)^{1/2}\left(\frac{5}{2\min(k_1,k_2)}\right)^{1/2} = 9.7497\cdot Qm_2\Lambda_1^3\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}\right)^{1/2}.$$

Подставим выбранную таким образом функцию d_λ в слагаемые из соотношения (2.4.43) и получим оценки

$$\varepsilon(d_\lambda)\cdot\frac{\Lambda_1^3}{\sqrt{\lambda}} \le 1.5961\cdot Qm_2\Lambda_1^6\frac{\sqrt{\ln\lambda}}{\lambda},$$
$$\frac{K_1\lambda}{d_\lambda(1-e^{-\lambda})}e^{-k_1d_\lambda^2\lambda} \le \frac{0.0164}{(1-e^{-\lambda})\lambda\sqrt{\ln\lambda}},$$
$$\frac{K_2}{d_\lambda^2\lambda}e^{-k_2d_\lambda^2\lambda} \le \frac{1.2104}{Q^2m_2^2\lambda^{5/2}\ln\lambda}.$$

Подставляя последние три оценки в (2.4.43), мы приходим к следующему утверждению.

Следствие 2.4.5 *В условиях* (2.4.27), (2.4.37) *и* (2.4.29)

$$\rho(F_\lambda,\Phi) \le \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\Lambda_1^3}{\sqrt{\lambda}} + 1.5961\cdot Qm_2\Lambda_1^6\frac{\sqrt{\ln\lambda}}{\lambda} + \frac{0.0164}{(1-e^{-\lambda})\lambda\sqrt{\ln\lambda}} +$$
$$+\frac{1.2104}{Q^2m_2^2\lambda^{5/2}\ln\lambda} + \Big(\frac{7.5644\cdot Q^2m_2^2\ln\lambda}{1-e^{-\lambda}} + \frac{3.1035\cdot Qm_2\sqrt{\ln\lambda}}{1-e^{-\lambda}} + 1\Big)e^{-\lambda}.$$

Оценка из этого следствия лучше, чем аналогичная оценка для сумм случайных величин с неслучайным числом слагаемых: если второе по скорости убывания слагаемое в классическом случае убывало, как

$$\frac{(\ln n)^{1/4}}{n^{3/4}},$$

(n – число слагаемых), то здесь оно убывает, как

$$\frac{(\ln\lambda)^{1/2}}{\lambda},$$

то есть гораздо быстрее.

2.5 Асимптотические разложения для обобщенных пуассоновских распределений

В этом разделе, следуя работам (Cramér, 1955) и (von Chossy and Rappl, 1983), мы приведем асимптотические разложения Эджворта для функций распределения пуассоновских случайных сумм.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть N_λ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ. Предположим, что при каждом $\lambda > 0$ случайные величины $N_\lambda, X_1, X_2, \ldots$ независимы. Обозначим через

$$S_\lambda = X_1 + \ldots + X_{N_\lambda}$$

пуассоновскую случайную сумму. Предположим, что существуют $\mathsf{E}X_1 = a$ и $\mathsf{D}X_1 = \sigma^2 > 0$. Для целых $k \geq 0$ обозначим $\mathsf{E}X_1^k = \alpha_k$. Естественно, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = a$ и $\alpha_2 = \sigma^2 + a^2$. Характеристическую функцию случайных величин X_1 и S_λ будем соответственно обозначать $f(t)$ и $h_\lambda(t)$. Хорошо известно, что если $f(z)$ r раз непрерывно дифференцируема, то при $t \to 0$

$$f(t) = 1 + iat - \frac{\alpha_2 t^2}{2} + (it)^2 \sum_{k=1}^{r-2} \frac{(it)^k \alpha_{k+2}}{(k+2)!} + o(t^r). \tag{2.5.1}$$

Напомним следующие определения.

Определение 2.5.1. Будем говорить, что случайная величина X имеет *решетчатое распределение*, если все числа x_n такие, что

$$\sum_{n \geq 1} \mathsf{P}(X = x_n) = 1,$$

принадлежат множеству $\{b + nh,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ при некоторых $b \in \mathbb{R}$ и $h > 0$.

Хорошо известно, что распределение случайной величины X решетчато тогда и только тогда, когда существует $t_0 \neq 0$ такое, что

$$\mathsf{E}\exp\{it_0 X\} = 1. \tag{2.5.2}$$

Более того, если (2.5.2) выполнено при некотором $t_0 \neq 0$, то в качестве *шага распределения* случайной величины X можно выбрать $h = 2\pi/t_0$ (см., например, (Лукач, 1979)).

Определение 2.5.2. Будем говорить, что случайная величина X_1 удовлетворяет *условию Крамéра* (C), если

$$\limsup_{|t|\to\infty} |f(t)| < 1. \tag{2.5.3}$$

Стандартную нормальную функцию распределения и соответствующую ей плотность как всегда будем соответственно обозначать $\Phi(x)$ и $\phi(x)$.

Определение 2.5.3. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$ определим функцию $H_k(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ как

$$H_k(x) \equiv (-1)^k \frac{\phi^{(k)}(x)}{\phi(x)}.$$

Функция $H_k(x)$, $x \in \mathbb{R}$, определенная таким образом, очевидно, является полиномом степени k. Назовем $H_k(x)$ *полиномом Эрмита* порядка k.

Легко убедиться, что

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x, \quad H_2(x) = x^2 - 1, \quad H_3(x) = x^3 - 3x,$$

$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3, \ H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x, \ H_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15.$$

Пусть m – целое неотрицательное число и $q_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, m$. Рассмотрим полином

$$q(x) = \sum_{k=0}^{m} q_k x^k.$$

Пусть $H_0(x), \ldots, H_m(x)$ – полиномы Эрмита. Положим

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m} q_k H_k(x).$$

Тогда легко видеть, что функция

$$\psi(t) = q(it) \exp\{-t^2/2\}$$

является преобразованием Фурье функции

$$\Psi(x) = Q(x)\phi(x).$$

Всюду в этом разделе мы будем считать, что $r \geq 3$ – фиксированное целое число.

Для комплексных z положим

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{k=1}^{r-2} \frac{\alpha_{k+2} z^k}{(k+2)!}.$$

Очевидно, что $\widetilde{f}(z)$ – полином степени $\le r-2$ с вещественными коэффициентами, причем $\widetilde{f}(0)=0$. Из (2.5.1) вытекает, что при $t\to 0$ справедливо соотношение

$$f(t)-1-iat+\frac{\alpha_2 t^2}{2}=(it)^2\widetilde{f}(it)+o(t^r).$$

Для $\lambda>0$ и комплексного z положим

$$p_\lambda(z)=\sum_{k=1}^{r-2}\frac{1}{k!}\Big[\frac{z^2}{\alpha_2}\widetilde{f}\Big(\frac{z}{\sqrt{\lambda\alpha_2}}\Big)\Big]^k. \tag{2.5.4}$$

Можно убедиться, что существуют целое $m\ge 3$ и полиномы $q_k(z)$ с вещественными коэффициентами, $k=3,\dots,m$, не зависящие от λ, такие, что

$$p_\lambda(z)=\sum_{k=3}^{m}\lambda^{-k/2+1}q_k(z) \tag{2.5.5}$$

при всех $\lambda>0$ и комплексных z. При этом полиномы $q_k(z)$ определяются соотношениями (2.5.4) и (2.5.5) единственным образом. Пусть

$$q_k(z)=\sum_{j=3}^{L_k}q_{k,j}z^j \tag{2.5.6}$$

– соответствующее представление $q_k(z)$ с $q_{k,j}\in\mathbb{R}$ $(j=3,\dots,L_k)$, $L_k\ge 3$ $(k=3,\dots,m)$. Пусть $H_j(x)$ – полиномы Эрмита. Для $x\in\mathbb{R}$ и $k=3,\dots,m$ положим

$$R_k(x)=-\sum_{j=3}^{L_k}q_{k,j}H_{j-1}(x). \tag{2.5.7}$$

Замечание 2.5.1. С помощью элементарных вычислений из (2.5.4) и (2.5.5) для $\lambda>0$ и комплексного z получаем

$$p_\lambda(z)=\sum_{k=3}^{(r-2)^2+2}\lambda^{-k/2+1}\sum_{\frac{k-2}{r-2}\le j\le k-2}\alpha_{k,j}z^{k+2(j-1)},$$

где

$$j!\alpha_{k,j}=\sum_{\substack{3\le n_1\le\dots\le n_j\le r\\ n_1+\dots+n_j=k+2(j-1)}}\frac{\alpha_{n_1}\cdot\ldots\cdot\alpha_{n_j}}{n_1!\cdot\ldots\cdot n_j!}\alpha_2^{-k/2-j+1}.$$

Таким образом, в (2.5.5) и (2.5.6) следует положить $m=(r-2)^2+2$ и $L_k=3(k-2)$ $(k=3,\dots,m)$.

Определение 2.5.4. Функция $R_k(x)$, определяемая соотношением (2.5.7), называется *полиномом Эджворта* порядка k.

Для $x \in \mathbb{R}$ положим

$$G_{\lambda,r}(x) = \Phi(x) + \phi(x)\sum_{k=3}^{r} \lambda^{-k/2+1} R_k(x).$$

Замечание 2.5.2. При $r = 3$ имеем

$$R_3(x) = -\frac{\alpha_3}{6\alpha_2^{3/2}} H_2(x),$$

$$G_{\lambda,3}(x) = \Phi(x) - \frac{\alpha_3}{6\alpha_2^{3/2}\sqrt{\lambda}}(x^2-1)\phi(x). \tag{2.5.8}$$

Для $r = 4$ имеем

$$R_4(x) = -\frac{\alpha_4}{24\alpha_2^2} H_3(x) - \frac{\alpha_3^2}{72\alpha_2^3} H_5(x),$$

$$G_{\lambda,4}(x) = \Phi(x) - \frac{\alpha_3}{6\alpha_2^{3/2}\sqrt{\lambda}}(x^2-1)\phi(x) -$$

$$-\frac{\phi(x)}{\lambda}\Big[\frac{\alpha_4}{24\alpha_2^2}(x^3-3x) - \frac{\alpha_3^2}{72\alpha_2^3}(x^5-10x^3+15x)\Big]. \tag{2.5.9}$$

Более того, пусть $\text{æ}_3(S_\lambda)$ и $\text{æ}_4(S_\lambda)$ – соответственно коэффициенты асимметрии и эксцесса случайной величины S_λ,

$$\text{æ}_3(S_\lambda) \equiv \mathsf{E}\Big(\frac{S_\lambda - \mathsf{E}S_\lambda}{\sqrt{\mathsf{D}S_\lambda}}\Big)^3 = \mathsf{E}\Big(\frac{S_\lambda - \alpha_1\lambda}{\sqrt{\lambda\alpha_2}}\Big)^3 = \frac{\alpha_3}{\sqrt{\lambda}\alpha_2^{3/2}},$$

$$\text{æ}_4(S_\lambda) \equiv \mathsf{E}\Big(\frac{S_\lambda - \mathsf{E}S_\lambda}{\sqrt{\mathsf{D}S_\lambda}}\Big)^4 - 3 = \mathsf{E}\Big(\frac{S_\lambda - \alpha_1\lambda}{\sqrt{\lambda\alpha_2}}\Big)^4 - 3 = \frac{\alpha_4}{\lambda\alpha_2^2}.$$

Тогда (2.5.8) и (2.5.9) можно переписать в виде

$$G_{\lambda,3}(x) = \Phi(x) - \frac{\text{æ}_3(S_\lambda)}{6}\Phi^{(3)}(x)$$

и

$$G_{\lambda,4}(x) = \Phi(x) - \frac{\text{æ}_3(S_\lambda)}{6}\Phi^{(3)}(x) + \frac{\text{æ}_4(S_\lambda)}{24}\Phi^{(4)}(x) + \frac{\text{æ}_3^2(S_\lambda)}{72}\Phi^{(6)}(x).$$

Введем функции

$$\widetilde{G}_{\lambda,r}(x) = \Phi(x) + \phi(x)\sum_{k=3}^{m} \lambda^{-k/2+1} R_k(x),$$

$$\widetilde{g}_{\lambda,r}(x)=\frac{d\widetilde{G}_{\lambda,r}(x)}{dx}.$$

Легко видеть, что

$$\widetilde{g}_{\lambda,r}(x)=\phi(x)+\phi(x)\sum_{k=3}^{m}\lambda^{-k/2+1}\sum_{j=3}^{L_k}q_{k,j}H_j(x). \tag{2.5.10}$$

С учетом сказанного выше о полиномах $q(x)$ и $Q(x)$, замечаем, что преобразованием Фурье функции $\widetilde{g}_{\lambda,r}(x)$ является функция

$$\widetilde{\chi}_{\lambda,r}(z)=(1+p_\lambda(iz))\exp\{-u^2/2\}. \tag{2.5.11}$$

Мы будем использовать следующее известное утверждение, известное как фундаментальное *неравенство Эссеена*

Лемма 2.5.1. *Пусть $F(x)$ – функция распределения, которой соответствует характеристическая функция $f(t)$. Пусть вещественная функция $G(x)$ непрерывно дифференцируема, причем*

$$\lim_{x\to-\infty}G(x)=0,\qquad \lim_{x\to\infty}G(x)=1,\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}|G'(x)|dx<\infty$$

и

$$A\equiv\sup_x|G'(x)|<\infty.$$

Предположим, что преобразование Фурье $\chi(t)$ функции $G'(x)$ непрерывно дифференцируемо и $\chi(0)=1$. Тогда для любого $T>0$ справедливо неравенство

$$\sup_x|F(x)-G(x)|\le\frac{1}{\pi}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-\chi(t)}{t}\right|dt+\frac{24A}{\pi T} \tag{2.5.12}$$

Доказательство см. в (Феллер, 1984), с. 538.

Обозначим

$$\widetilde{h}_\lambda(t)=\mathsf{E}\exp\Big\{it\frac{S_\lambda-\mathsf{E}S_\lambda}{\sqrt{\mathsf{D}S_\lambda}}\Big\}=\mathsf{E}\exp\Big\{it\frac{S_\lambda-a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}\Big\}.$$

Легко видеть, что

$$\widetilde{h}_\lambda(t)=\exp\Big\{-\frac{ita\sqrt{\lambda}}{\sqrt{a^2+\sigma^2}}\Big\}h_\lambda\Big(\frac{t}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}\Big).$$

Поскольку функции $\widetilde{G}_{\lambda,r}(x)$ и $\chi_{\lambda,r}(t)$ удовлетворяют условиям Леммы 2.5.1, причем $A_{\lambda,r} \equiv \sup_x \widetilde{g}_\lambda(t) < \infty$, то

$$\sup_x \left| \mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x \Big) - \widetilde{G}_{\lambda,r}(x) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-T}^{T} \left| \frac{\widetilde{h}_\lambda(t) - \chi_{\lambda,r}(t)}{t} \right| dt + \frac{24A_{\lambda,r}}{\pi T} \tag{2.5.13}$$

Неравенство (2.5.13) будет играть ключевую роль в доказательстве следующего результата.

Теорема 2.5.1. *Пусть $r = 3$ и распределение случайной величины X_1 не является решетчатым или пусть $r > 3$ и распределение случайной величины X_1 удовлетворяет условию Крамéра (С) (2.5.3). Тогда*

$$\sup_x \left| \mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x \Big) - G_{\lambda,r}(x) \right| = o(\lambda^{-r/2+2}),$$

то есть

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{r/2-1} \sup_x \left| \mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x \Big) - G_{\lambda,r}(x) \right| = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$. Положим

$$A = A(\epsilon) = \frac{48A_{\lambda,r}}{\pi\epsilon}, \qquad T = T(\lambda,\epsilon) = A(\epsilon)\lambda^{r/2-1}.$$

Тогда в силу (2.5.13) справедлива оценка

$$\lambda^{r/2-1} \sup_x \left| \mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x \Big) - \widetilde{G}_{\lambda,r}(x) \right| \leq$$

$$\leq \frac{\lambda^{r/2-1}}{\pi} \int\limits_{-T}^{T} \left| \frac{\widetilde{h}_\lambda(t) - \chi_{\lambda,r}(t)}{t} \right| dt + \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.5.14}$$

Покажем, что, каким бы ни было ϵ, существует $\delta > 0$ такое, что

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{r/2-1} \int\limits_{|t|\leq\delta\sqrt{\lambda\alpha_2}} \left| \frac{\widetilde{h}_\lambda(t) - \chi_{\lambda,r}(t)}{t} \right| dt \leq \epsilon. \tag{2.5.15}$$

Действительно, поскольку существует $\mathsf{E}X_1$, мы имеем $|\widetilde{f}(t)| = O(|t|)$ при $t \to 0$, то есть существуют такие $C \in (0,\infty)$ и $t_0 > 0$ такие, что

$$|\widetilde{f}(t)| \leq C|t| \tag{2.5.16}$$

при $|t| \leq t_0$. Положим

$$c_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^{r-1} \exp\{-t^2/4\} dt,$$

$$c_2 = \frac{C^{r-1}}{(r-1)! \alpha_2^{3(r-1)/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^{3(r-1)-1} \exp\{-t^2/4\} dt.$$

Обе эти константы, очевидно, конечны. Пусть

$$h(t) = f(t) - 1 - iat$$

Так как в силу (2.5.1) при $t \to 0$ мы имеем

$$h(t) + \frac{\alpha_2 t^2}{2} = o(t^2)$$

и

$$h(t) + \frac{\alpha_2 t^2}{2} - (it)^2 \widetilde{f}(it) = o(t^r),$$

то найдется $\delta \in (0, \min\{t_0, \alpha_2/4C\})$ такое, что для $|t| \leq \delta$ выполняются неравенства

$$\left| h(t) + \frac{\alpha_2 t^2}{2} \right| \leq \frac{\alpha_2 t^2}{4} \tag{2.5.17}$$

и

$$\left| h(t) + \frac{\alpha_2 t^2}{2} - (it)^2 \widetilde{f}(it) \right| \leq \frac{\epsilon}{c_1} \alpha_2^{r/2} |t|^r. \tag{2.5.18}$$

Тогда для $\lambda > 0$ и $|t| \leq \delta\sqrt{\lambda \alpha_2}$, обозначив $u = t/\sqrt{\lambda \alpha_2}$, в силу (2.5.17) мы имеем

$$\left| \lambda \left(h(u) + \frac{t^2}{2\lambda} \right) \right| = \lambda \left| h(u) + \frac{\alpha_2 u^2}{2} \right| \leq \frac{\lambda \alpha_2 u^2}{4} = \frac{t^2}{4}, \tag{2.5.19}$$

а вследствие (2.5.16) имеет место оценка

$$\frac{|(it)^2 \widetilde{f}(iu)|}{\alpha_2} \leq \frac{C\delta t^2}{\alpha_2} = \frac{t^2}{4}. \tag{2.5.20}$$

Поскольку

$$\widetilde{h}_\lambda(t) = \exp\left\{ \lambda \left[f\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda \alpha_2}} \right) - 1 - \frac{i\alpha_1 t}{\sqrt{\lambda \alpha_2}} \right] \right\},$$

из (2.5.19) и (2.5.20) с учетом (2.5.4) для $|t| \leq \delta\sqrt{\lambda \alpha_2}$ мы имеем

$$|\widetilde{h}_\lambda(t) - \chi_{\lambda,r}(t)| = \exp\{t^2/2\} \left| \exp\left\{ \lambda \left(h(u) + \frac{t^2}{2\lambda} \right) - (1 + p_\lambda(it)) \right\} \right| \leq$$

$$\leq \exp\{-t^2/2\}\exp\{t^2/4\}\Big[\lambda\Big|h(u)+\frac{\alpha_2 u^2}{2}-(iu)^2\widetilde{f}(iu)\Big|+\frac{t^{2(r-1)}|\widetilde{f}(iu)|^{r-1}}{(r-1)!\alpha_2^{r-1}}\Big]=$$

$$=\exp\{-t^2/4\}\Big[\lambda\alpha_2^{r/2}\frac{\epsilon|u|^r}{c_1(\lambda\alpha_2)^{r/2}}+\frac{C^{r-1}|t|^{3(r-1)}}{(r-1)!\alpha_2^{3(r-1)/2}\lambda^{(r-1)/2}}\Big].$$

Следовательно, для любого $\lambda > 0$

$$\lambda^{r/2-1}\int\limits_{|t|\leq\delta\sqrt{\lambda\alpha_2}}\Big|\frac{\widetilde{h}_\lambda(t)-\chi_{\lambda,r}(t)}{t}\Big|dt\leq$$

$$\leq\frac{\epsilon}{c_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|u|^{r-1}e^{-t^2/4}dt+\frac{C^{r-1}}{(r-1)!\alpha_2^{3(r-1)/2}\sqrt{\lambda}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|^{3(r-1)-1}e^{-t^2/4}dt=\epsilon+\frac{c_2}{\sqrt{\lambda}},$$

откуда вытекает (2.5.15). Из (2.5.15) вытекает существование такого $\delta > 0$, что

$$\limsup_{\lambda\to\infty}\lambda^{r/2-1}\int\limits_{|t|\leq\delta\sqrt{\lambda\alpha_2}}\Big|\frac{\widetilde{h}_\lambda(t)-\chi_{\lambda,r}(t)}{t}\Big|dt\leq\frac{\pi\epsilon}{2}.$$

Следовательно, с учетом (2.5.14) мы имеем

$$\lambda^{r/2-1}\sup_x\Big|\mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda-a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}<x\Big)-\widetilde{G}_{\lambda,r}(x)\Big|\leq$$

$$\leq\epsilon+\frac{1}{\pi}\limsup_{\lambda\to\infty}\Big[\lambda^{r/2-1}\int\limits_{\delta\sqrt{\lambda\alpha_2}<|t|\leq A\lambda^{r/2-1}}\Big|\frac{\widetilde{h}_\lambda(t)}{t}\Big|dt+$$

$$+\lambda^{r/2-1}\int\limits_{|t|>\delta\sqrt{\lambda\alpha_2}}\Big|\frac{\chi_{\lambda,r}(t)}{t}\Big|dt\Big].\qquad(2.5.21)$$

Для $\lambda\geq 1$, используя (2.5.11), (2.5.5) и (2.5.6), мы получаем оценку

$$|\chi_{\lambda,r}(t)|=e^{-t^2/2}|1+p_\lambda(it)|\leq e^{-t^2/2}\Big[1+\sum_{k=3}^{m}\sum_{j=3}^{L_k}|q_{k,j}||t|^j\Big],$$

откуда вытекает, что

$$\lambda^{r/2-1}\int\limits_{|t|>\delta\sqrt{\lambda\alpha_2}}\Big|\frac{\chi_{\lambda,r}(t)}{t}\Big|dt\leq$$

$$\leq \frac{\lambda^{(r-3)/2}}{\delta\sqrt{\alpha_2}} \int\limits_{|t|>\delta\sqrt{\lambda\alpha_2}} e^{-t^2/2}\Big[1+\sum_{k=3}^{m}\sum_{j=3}^{L_k}|q_{k,j}||t|^j\Big]dt \to 0 \qquad (2.5.22)$$

при $\lambda \to \infty$, поскольку для любых $k \geq 0$, $d > 0$ и $\gamma \geq 0$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{|x|>d\sqrt{\lambda}} |x|^k e^{-x^2/2}dx = 0.$$

Наконец, убедимся, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{r/2-1} \int\limits_{\delta\sqrt{\lambda\alpha_2}<|t|\leq A\lambda^{r/2-1}} \Big|\frac{\widetilde{h}_\lambda(t)}{t}\Big|dt = 0. \qquad (2.5.23)$$

Действительно, если $r = 3$ и распределение случайной величины X_1 не является решётчатым, то существует $p > 0$ такое, что $\mathrm{Re}f(t) - 1 \leq -p$ при $\delta < |t| \leq A/\sqrt{\alpha_2}$. Таким образом, при $\delta\sqrt{\lambda\alpha_2} < |t| \leq A\lambda^{r/2-1}$ выполнено неравенство

$$\mathrm{Re}f\Big(\frac{t}{\sqrt{\lambda\alpha_2}}\Big) - 1 \leq -p. \qquad (2.5.24)$$

Если же $r > 3$, то существование $p > 0$, гарантирующего справедливость (2.5.24), вытекает из условия Крамéра (C) (2.5.3). Таким образом, в обоих случаях при $\delta\sqrt{\lambda\alpha_2} < |t| \leq A\lambda^{r/2-1}$ справедливо соотношение

$$|\widetilde{h}_\lambda(t)| = \Big|\exp\Big\{\lambda\Big[f\Big(\frac{t}{\sqrt{\lambda\alpha_2}}\Big)-1\Big]\Big\}\Big| = \exp\Big\{\lambda\Big[\mathrm{Re}f\Big(\frac{t}{\sqrt{\lambda\alpha_2}}\Big)-1\Big]\Big\} \leq e^{-\lambda p}.$$

Следовательно,

$$\lambda^{r/2-1} \int\limits_{\delta\sqrt{\lambda\alpha_2}<|t|\leq A\lambda^{r/2-1}} \Big|\frac{\widetilde{h}_\lambda(t)}{t}\Big|dt \leq 2A\lambda^{r/2-1}e^{-\lambda p}\frac{\lambda^{r/2-1}}{\delta\sqrt{\lambda\alpha_2}} =$$

$$= 2Ae^{-\lambda p}\frac{\lambda^{r-5/2}}{\delta\sqrt{\alpha_2}} \to 0$$

при $\lambda \to \infty$, то есть имеет место (2.5.23). Из (2.5.21), (2.5.22) и (2.5.23) мы получаем

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{r/2-1} \sup_x \Big|\mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\Big) - \widetilde{G}_{\lambda,r}(x)\Big| \leq \epsilon,$$

и так как ϵ произвольно,

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{r/2-1} \sup_x \Big| \mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x \Big) - \widetilde{G}_{\lambda,r}(x) \Big| = 0.$$

Теперь утверждение Теоремы вытекает из очевидного соотношения

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{r/2-1} \sup_x |G_{\lambda,r}(x) - \widetilde{G}_{\lambda,r}(x)| = 0.$$

Теорема доказана. □

Область применения Теоремы 2.5.1 может быть расширена. Напомним, что два вещественных числа называются несоизмеримыми, если их отношение является иррациональным числом.

Замечание 2.5.1. В случае $r = 3$ утверждение Теоремы 2.5.1 остается в силе и тогда, когда распределение случайной величины X_1 сосредоточено на решетке вида $\{a + kh,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, в которой числа a и h являются несоизмеримыми. Это вытекает из результатов работы (Эль Сайед, 1993).

2.6 Асимптотические разложения для квантилей обобщенных пуассоновских распределений

Следующее утверждение будет играть основную роль в разделах книги, связанных с асимптотическими разложениями квантилей рассматриваемых обобщений пуассоновских распределений. Пусть $\{Z(t),\ t \geq 0\}$ – случайный процесс. Предположим, что при каждом $t \geq 0$ распределение случайной величины $Z(t)$ непрерывно. Для $\beta \in (0,1)$ и $t \geq 0$ квантиль случайной величины $Z(t)$ порядка β обозначим $u_\beta(t)$:

$$\mathsf{P}(Z(t) < u_\beta(t)) = \beta.$$

Теорема 2.6.1. *Предположим, что для одномерной функции распределения случайного процесса $Z(t)$ при $t \to \infty$ справедливо асимптотическое разложение вида*

$$\mathsf{P}(Z(t) < x) = G_0(x) + t^{-1/2} G_1(x) + t^{-1} G_2(x) + o(t^{-1}),$$

причем функции $G_0''(x)$, $G_1'(x)$ и $G_2(x)$ непрерывны и $G_0'(x) > 0$. Тогда для любого $\beta \in (0,1)$

$$u_\beta(t) \ = \ u_\beta - \frac{G_1(u_\beta)}{G_0'(u_\beta)} t^{-1/2} +$$

$$+\frac{G_0'(u_\beta)G_1(u_\beta)G_1'(u_\beta)-(G_0'(u_\beta))^2G_2(u_\beta)-\frac{1}{2}G_1^2(u_\beta)G_0''(u_\beta)}{(G_0'(u_\beta))^3}t^{-1}+o(t^{-1}),$$

где $G_0(u_\beta)=\beta$.

Доказательство. Будем искать асимптотическое разложение для $u_\beta(t)$ в виде

$$u_\beta(t)=u_\beta+t^{-1/2}h_1+t^{-1}h_2+o(t^{-1}).$$

Тогда несложно видеть, что

$$\mathsf{P}(Z(t)<u_\beta(t))=G_0(u_\beta+h_1t^{-1/2}+h_2t^{-1})+t^{-1/2}G_1(u_\beta+t^{-1/2}h_1)+$$
$$+t^{-1}G_2(u_\beta)+o(t^{-1})=\beta+t^{-1/2}(h_1G_0'(u_\beta)+G_1(u_\beta))+$$
$$+t^{-1}\left(h_2G_0'(u_\beta)+\frac{h_1^2}{2}G_0''(u_\beta)+G_2(u_\beta)\right)+o(t^{-1}).$$

Поэтому, полагая

$$h_1=-\frac{G_1(u_\beta)}{G_0'(u_\beta)},$$
$$h_2=-\frac{1}{G_0'(u_\beta)}\left(G_2(u_\beta)+\frac{G_1^2(u_\beta)G_0''(u_\beta)}{2(G_0'(u_\beta))^2}-\frac{G_1'(u_\beta)G_1(u_\beta)}{G_0'(u_\beta)}\right),$$

получим утверждение Теоремы. Теорема доказана. □

Замечание 2.6.1. Если положить

$$\overline{u}_\beta(t)=u_\beta-\frac{G_1(u_\beta)}{G_0'(u_\beta)}t^{-1/2}+$$
$$+\frac{G_0'(u_\beta)G_1(u_\beta)G_1'(u_\beta)-(G_0'(u_\beta))^2G_2(u_\beta)-\frac{1}{2}G_1^2(u_\beta)G_0''(u_\beta)}{(G_0'(u_\beta))^3}t^{-1},$$

то легко показать, что в условиях Теоремы 2.6.1

$$\mathsf{P}(Z(t)<\overline{u}_\beta(t))=\beta+o(t^{-1}).$$

Применим Теорему 2.6.1 к получению асимптотического разложения для квантилей обобщенных пуассоновских распределений. Пусть $X_1,X_2,\ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть N_λ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ. Предположим, что при каждом $\lambda>0$ случайные величины $N_\lambda,X_1,X_2,\ldots$ независимы. Обозначим через

$$S_\lambda=X_1+\ldots+X_{N_\lambda}$$

пуассоновскую случайную сумму. Предположим, что существуют $\mathsf{E}X_1 = a$ и $\mathsf{D}X_1 = \sigma^2 > 0$. Для целых $k \geq 0$ обозначим $\mathsf{E}X_1^k = \alpha_k$. Естественно, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = a$ и $\alpha_2 = \sigma^2 + a^2$.

Из Теоремы 1.5.1 вытекает, что если $\alpha_4 = \mathsf{E}X_1^4 < \infty$ и случайная величина X_1 удовлетворяет условию Крамера (1.5.3), то

$$\mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\Big) = \Phi(x) + \frac{G_1(x)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{G_2(x)}{\lambda} + o(\lambda^{-1}),$$

где

$$G_1(x) = -\frac{\alpha_3}{6\alpha_2^{3/2}}\phi(x)H_2(x),$$

$$G_2(x) = -\phi(x)\Big[\frac{\alpha_4}{24\alpha_2^2}H_3(x) + \frac{\alpha_3^2}{72\alpha_2^3}H_5(x)\Big].$$

Поэтому, полагая $t = \lambda$, $Z(t) = S_\lambda$, $G_0(x) = \Phi(x)$, из Теоремы 2.6.1 мы получаем следующее утверждение. Для $\beta \in (0,1)$ пусть $w_\beta(\lambda)$ и u_β – соответственно квантили порядка β случайной величины S_λ и стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0,1)$.

Теорема 2.6.2. *Пусть $\mathsf{E}X_1^4 < \infty$, причем случайная величина X_1 удовлетворяет условию Крамера (C) (1.5.3). Тогда при $\lambda \to \infty$*

$$w_\beta(\lambda) = a\lambda + u_\beta\sqrt{\lambda\alpha_2} + \frac{\alpha_3 H_2(u_\beta)}{6\alpha_2} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda\alpha_2^{5/2}}}\Big[\frac{\alpha_3^2}{72}(H_5(u_\beta) - 2H_2(u_\beta)H_3(u_\beta) + 4u_\beta H_2^2(u_\beta)) + \frac{\alpha_4\alpha_2}{24}H_3(u_\beta)\Big] +$$

$$+o(\lambda^{-1/2}),$$

где $H_k(x)$ – полиномы Эрмита.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства достаточно убедиться, что

$$\frac{G_1(x)}{G_0'(x)} = -\frac{\alpha_3 H_2(x)}{6\alpha_2^{3/2}}, \quad G_0'(x)G_1(x)G_1'(x) = -\phi^3(x)\frac{\alpha_3^2}{36\sigma^2\alpha_2^3}H_2(x)H_3(x),$$

$$(G_0'(x))^2 G_2(x) = -\phi^3(x)\Big[\frac{\alpha_4}{24\alpha_2^2}H_3(x) + \frac{\alpha_3^2}{72\alpha_2^3}H_5(x)\Big],$$

$$G_1^2(x)G_0''(x) = -\phi^3(x)\frac{\alpha_3^2}{36\alpha_2^3}xH_2^2(x),$$

заметить, что квантили $w_\beta(\lambda)$ случайной величины S_λ связаны с квантилями $\widetilde{w}_\beta(\lambda)$ случайной величины $(S_\lambda - a\lambda)/\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}$ соотношением

$$w_\beta(\lambda) = \widetilde{w}_\beta(\lambda)\sqrt{\lambda\alpha_2} + a\lambda$$

и воспользоваться Теоремой 2.6.1. Теорема доказана. □

В качестве примера применения Теоремы 2.6.2 рассмотрим задачу об определении оптимальных страховых тарифов в статической модели страхования (модели индивидуального риска).

Предположим, что рассматривается сопровождение одного фиксированного страхового портфеля, содержащего N страховых договоров. На поддержку этого портфеля страховая компания выделяет капитал u. Таким образом, возможный доход страховой компании от работы с этим портфелем составляет

$$R = \sum_{j=1}^{N} Z_j, \tag{2.6.1}$$

где Z_j – доход от j-го договора. Предположим, далее, что доход от каждого договора имеет вид

$$Z_j = rX_j - I_j\widetilde{S}_jX_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{2.6.2}$$

где X_j – размер страховой выплаты (страховая сумма), оговоренный в j-м договоре, r – доля страховой суммы, выплачиваемая клиентом страховой компании при заключении договора (страховой тариф), I_j – индикатор страхового случая ($I_j = 0$, если за оговоренный в j-м контракте срок страховой случай не произошел, и $I_j = 1$, если оговоренный в j-м контракте страховой случай произошел до истечения срока действия контракта), $\widetilde{S}_j$ – доля страховой суммы, выплачиваемая клиенту в результате j-го страхового случая ($0 < \widetilde{S}_j \leq 1$). Для упрощения мы обозначим $S_j = I_j\widetilde{S}_j$, как бы допуская тем самым возможность нулевых выплат. Предположим, что X_j и S_j – случайные величины, причем $X_1, X_2, \ldots$ одинаково распределены и $S_1, S_2, \ldots$ имеют одинаковое распределение. Предположим, что все случайные величины, вовлеченные в представления (2.6.1) и (2.6.2), независимы. Рассмотрим задачу о том, каким должен быть страховой тариф, обеспечивающий требуемую прибыльность данного портфеля с заданной вероятностью, то есть обеспечивающий выполнение условия

$$\mathsf{P}(Z \geq z) \geq 1 - \beta,$$

где z и $\beta \in (0,1)$ – заданные числа. При $z = -u$ данная задача трансформируется в задачу об оптимальном страховом тарифе, обеспечивающем требуемую вероятность неразорения данного портфеля $\mathsf{P}(R \geq -u)$.

Будем считать, что $N = N_\lambda$, то есть число договоров в страховом портфеле является пуассоновской случайной величиной с некоторым параметром $\lambda > 0$. Предположим, что число договоров велико, то есть $\lambda \gg 1$, а случайная величина X_1 имеет конечный четвертый момент и удовлетворяет условию Крамера.

Введем следующие обозначения:

$$a_k = \mathsf{E}X_1^k, \qquad s_k = \mathsf{E}S_1^k, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Тогда, как легко убедиться,

$$\mathsf{E}Z_1 = a_1(r - s_1), \quad \mathsf{E}Z_1^2 = a_2(r^2 + s_2 - 2rs_1),$$
$$\mathsf{E}Z_1^3 = a_3(r^3 - 3r^2 s_1 + 3rs_2 - s_3).$$

Пренебрегая в разложении, устанавливаемом Теоремой 2.6.2, теми членами, которые убывают по абсолютной величине с ростом λ, мы получаем приближенное решение сформулированной выше задачи в следующем виде. Оптимальный страховой тариф удовлетворяет неравенству $r \geq r_\beta(z, \lambda)$, где $r_\beta(z, \lambda)$ – решение уравнения

$$\lambda a_1(r - s_1) + u_\beta\sqrt{\lambda a_2(r^2 + s_2 - 2rs_1)} +$$
$$+ \frac{a_3(r^3 - 3r^2 s_1 + 3rs_2 - s_3)(u_\beta^2 - 1)}{6a_2(r^2 + a_2 - 2rs_1)} = z, \tag{2.6.3}$$

а u_β – как и раньше, β-квантиль стандартного нормального закона $\mathcal{N}(0,1)$. Уравнение (2.6.3) несложно решить с использованием численных процедур.

2.7 Неравенство Бернштейна – Колмогорова для пуассоновских случайных сумм

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – одинаково распределенные случайные величины с $\mathsf{E}X_1 = a$ и $0 < \mathsf{D}X_1 = \sigma^2 < \infty$. Пусть N_λ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Предположим, что случайные величины $N_\lambda, X_1, X_2, \ldots$ независимы при каждом λ. Рассмотрим пуассоновскую случайную сумму

$$S_\lambda = X_1 + \ldots + X_{N_\lambda}.$$

В этом разделе мы докажем аналог неравенства Бернштейна–Колмогорова для вероятностей больших уклонений пуассоновских случайных сумм. Мы будем следовать схеме изложения этого материала в (Ротарь, 1972)

Теорема 2.7.1. *Предположим, что* $\mathsf{P}(|X_1| \le C) = 1$ *для некоторого* $C \in (0, \infty)$. *Тогда для произвольного* $\epsilon > 0$ *и любого* $\lambda > 0$ *справедливо неравенство*

$$\mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} > \epsilon\Big) \le$$

$$\le \begin{cases} \exp\Big\{-\dfrac{\epsilon^2}{2}\Big(1 - \dfrac{\epsilon C}{2\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}\Big)\Big\}, & \text{если } \epsilon \le \dfrac{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}{C}, \\ \exp\Big\{-\dfrac{\epsilon\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}{4C}\Big\}, & \text{если } \epsilon > \dfrac{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}{C}. \end{cases}$$

Следствие 2.7.1. *В условиях Теоремы 2.7.1 для произвольного* $\epsilon > 0$ *и любого* $\lambda > 0$ *справедливо неравенство*

$$\mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} > \epsilon\Big) \le \begin{cases} \exp\Big\{-\dfrac{\epsilon^2}{4}\Big\}, & \text{если } \epsilon \le \dfrac{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}{C}, \\ \exp\Big\{-\dfrac{\epsilon\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}{4C}\Big\}, & \text{если } \epsilon > \dfrac{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}{C}. \end{cases}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Маркова в следующей форме: для любого $u > 0$

$$\mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} > \epsilon\Big) \le e^{-u\epsilon}\mathsf{E}\exp\Big\{\frac{u(S_\lambda - a\lambda)}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}\Big\}. \tag{2.7.1}$$

Оценим математическое ожидание в правой части (2.7.1). С этой целью рассмотрим преобразование Лапласа случайной величины S_λ

$$\phi_\lambda(v) = \mathsf{E}e^{vS_\lambda} = \exp\{\lambda(\psi(v) - 1)\}, \tag{2.7.2}$$

где

$$\psi(v) = \mathsf{E}e^{vX_1}.$$

Так как случайная величина X_1 почти наверное ограничена, то ее преобразование Лапласа $\psi(v)$ существует и является аналитической функцией. Следовательно,

$$\psi(v) = \mathsf{E}e^{vX_1} = \int_0^\infty \Big(1 + \frac{vx}{1!} + \frac{v^2x^2}{2!} + \ldots\Big)dF(x) =$$

$$= 1 + v\mathsf{E}X_1 + \frac{v^2}{2!}\mathsf{E}X_1^2 + \frac{v^3}{3!}\mathsf{E}X_1^3 + \ldots, \qquad (2.7.3)$$

где $F(x)$ – функция распределения случайной величины X_1. Используя неравенства

$$\mathsf{E}X_1^k \le \mathsf{E}|X_1|^k \le C^{k-2}\mathsf{E}X_1^2,$$

справедливые для $k > 0$, мы можем переписать (2.7.3) в виде

$$\psi(v) \le 1 + v\mathsf{E}X_1 + \frac{v^2}{2!}\mathsf{E}X_1^2 + \frac{Cv^3}{3!}\mathsf{E}X_1^2 + \frac{C^2v^4}{4!}\mathsf{E}X_1^2 + \ldots \le$$

$$\le 1 + v\mathsf{E}X_1 + \frac{v^2\mathsf{E}X_1^2}{2}\Big(1 + \frac{vC}{3} + \frac{v^2C^2}{3\cdot 4} + \ldots\Big) \le$$

$$\le 1 + v\mathsf{E}X_1 + \frac{v^2\mathsf{E}X_1^2}{2}\Big(1 + \frac{vC}{2}\Big), \qquad (2.7.4)$$

если $vC < 1$. Таким образом, используя (2.7.4), мы можем оценить преобразование Лапласа $\phi_\lambda(v)$:

$$\phi_\lambda(v) \le \exp\Big\{\lambda\Big[1 + v\mathsf{E}X_1 + \frac{v^2\mathsf{E}X_1^2}{2}\Big(1 + \frac{vC}{2}\Big) - 1\Big]\Big\} =$$

$$= \exp\Big\{\lambda\Big[v\mathsf{E}X_1 + \frac{v^2\mathsf{E}X_1^2}{2}\Big(1 + \frac{vC}{2}\Big)\Big]\Big\}. \qquad (2.7.5)$$

Пусть $v = u/\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}$. Тогда

$$\mathsf{E}\exp\Big\{\frac{u(S_\lambda - a\lambda)}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}\Big\} = \exp\Big\{-\frac{ua\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}\Big\}\cdot\mathsf{E}\exp\Big\{\frac{uS_\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}\Big\}$$

и с помощью (2.7.5) мы получаем оценку

$$\mathsf{E}\exp\Big\{\frac{u(S_\lambda - a\lambda)}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}\Big\} \le \exp\Big\{-\frac{a\lambda u}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}\Big\}\times$$

$$\times\exp\Big\{\lambda\Big[\frac{au}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} + \frac{u^2(a^2+\sigma^2)}{2\lambda(a^2+\sigma^2)}\Big(1 + \frac{uC}{2\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}\Big)\Big]\Big\} =$$

$$= \exp\Big\{\frac{u^2}{2}\Big(1 + \frac{uC}{2\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}\Big)\Big\} \qquad (2.7.6)$$

для $vC \le 1$, то есть для $u \le C^{-1}\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}$. Таким образом, неравенство Маркова (2.7.1) может быть переписано в виде

$$\mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} > \epsilon\Big) \le \exp\Big\{-u\epsilon + \frac{u^2}{2}\Big(1 + \frac{uC}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}\Big)\Big\}. \qquad (2.7.7)$$

Неравенство (2.7.7) справедливо для любого $u > 0$. Найдем минимум правой части (2.7.7) по $u \in (0, C^{-1}\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}]$. Этот минимум достигается при

$$u = \begin{cases} \epsilon, & \text{если } \epsilon \le \dfrac{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}{C}, \\ \dfrac{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}{C}, & \text{если } \epsilon > \dfrac{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}{C}, \end{cases}$$

откуда следует требуемое утверждение. Теорема доказана. □

2.8 Приближение вероятностей больших уклонений пуассоновских сумм с помощью преобразования Эсшера

В этом разделе мы продолжим изучение возможных аппроксимаций для обобщенных пуассоновских распределений.

Во многих практических задачах, связанных с редкими событиями (например, в страховой математике и теории надежности), важное значение имеют вероятности превышения рассматриваемым процессом больших уровней. В данном разделе мы будем изучать погрешности аппроксимации вероятностей больших уклонений обобщенного пуассоновского процесса. Поскольку абсолютные значения погрешности любой разумной аппроксимации вероятностей больших уклонений малы в силу малости самих вероятностей, основное внимание мы уделим *относительным* погрешностям. Изложение этого материала основано на книге (Cramér, 1955) и статье (von Chossy and Rappl, 1983).

Мы будем использовать обозначения, введенные в разделе 1.8.

Определим преобразование Эсшера (Esscher, 1932) обобщенного пуассоновского распределения. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – открытый интевал, содержащий нуль. Функции распределения случайных величин X_1 и S_λ обозначим соответственно $F(x)$ и $H_\lambda(x)$. Пусть

$$m(h) = \mathsf{E}e^{hX_1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{hx} dF(x), \qquad h \in \mathbb{R},$$

– производящая функция моментов случайной величины X_1. Предположим, что $m(h) < \infty$ для всех $h \in I$. Пусть

$$M_\lambda(h) = \mathsf{E}e^{hS_\lambda} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{hx} dH_\lambda(x), \qquad h \in \mathbb{R},$$

– производящая функция моментов случайной величины S_λ. Несложно видеть, что в силу независимости случайных величин N_λ и $X_1, X_2, \ldots$

$$M_\lambda(h) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathsf{E} \exp\{h(X_1 + \ldots + X_k)\} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big(\lambda m(h)\big)^k}{k!} = \exp\{\lambda(m(h) - 1)\}, \qquad \lambda > 0, \tag{2.8.1}$$

откуда вытекает, что $M_\lambda(h)$ также конечна при $h \in I$. Для $h \in I$ введем преобразования Эсшера $\mathcal{E}_{F,h}(x)$ и $\mathcal{E}_{H_\lambda,h}(x)$ соответственно функций распределения F и H_λ, положив

$$d\mathcal{E}_{F,h}(x) = \frac{e^{hx}}{m(h)} dF(x), \qquad d\mathcal{E}_{H_\lambda,h}(x) = \frac{e^{hx}}{M_\lambda(h)} dH_\lambda(x).$$

Несложно видеть, что $\mathcal{E}_{F,h}(x)$ и $\mathcal{E}_{H_\lambda,h}(x)$ являются функциями распределения. Более того, производящая функция моментов $\Psi_{\mathcal{E}_{F,h}}(s)$ функции распределения $\mathcal{E}_{F,h}(x)$ связана с производящей функцией моментов $m(h)$ функции распределения $F(x)$ соотношением

$$\Psi_{\mathcal{E}_{F,h}}(s) = \frac{1}{m(h)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(h+s)x} dF(x) = \frac{m(x+h)}{m(h)}. \tag{2.8.2}$$

Аналогично, для производящей функции моментов $\Psi_{\mathcal{E}_{H_\lambda,h}}(s)$ функции распределения $\mathcal{E}_{H_\lambda,h}(x)$ в силу (2.8.1) и (2.8.2) мы имеем

$$\Psi_{\mathcal{E}_{H_\lambda,h}}(s) = \frac{M_\lambda(h+s)}{M_\lambda(h)} = \frac{\exp\{\lambda[m(h+s) - 1]\}}{\exp\{\lambda[m(h) - 1]\}} =$$

$$= \exp\{\lambda[m(h+s) - m(h)]\} = \exp\Big\{\lambda m(h)\Big[\frac{m(h+s)}{m(h)} - 1\Big]\Big\} =$$

$$= \exp\{\lambda m(h)[\Psi_{\mathcal{E}_{F,h}}(s) - 1]\}, \tag{2.8.3}$$

что соответствует производящей функции моментов обобщенного пуассоновского распределения случайной суммы

$$Z_\lambda(h) = Y_1 + \ldots + Y_{N_{\lambda,h}}, \tag{2.8.4}$$

где случайные величины $Y_1, Y_2 \ldots$ независимы и имеют общую функцию распределения $\mathcal{E}_{F,h}(x)$, а случайная величина $N_{\lambda,h}$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda m(h)$ и независима от $Y_1, Y_2 \ldots$

Рассмотрим семейство чисел $\{x_\lambda\}_{\lambda>0}$ такое, что $x_\lambda \to \infty$ при $\lambda \to \infty$ и

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{x_\lambda}{\sqrt{\lambda}} = 0. \tag{2.8.5}$$

Так как функция $m(h)$ имеет на I непрерывную и строго возрастающую производную $m'(h)$, причем $m'(0) = \alpha_1$, то существует $\lambda_0 > 0$ такое, что для всех $\lambda \geq \lambda_0$

$$\alpha_1 + x_\lambda\sqrt{\alpha_2/\lambda} \in m'(I),$$

где $m'(I) = \{m'(x) |\ x \in I\}$. Таким образом, для каждого $\lambda \geq \lambda_0$ мы можем определить число h_λ как решение уравнения

$$m'(h_\lambda) = \alpha_1 + x_\lambda\sqrt{\alpha_2/\lambda}.$$

При этом $h_\lambda \in I \bigcap (0, \infty)$ и

$$\lambda m'(h_\lambda) = \lambda\alpha_1 + x_\lambda\sqrt{\alpha_2\lambda}. \tag{2.8.6}$$

Для $\lambda \geq \lambda_0$ положим

$$u_\lambda = h_\lambda\sqrt{\lambda m''(h_\lambda)}, \tag{2.8.7}$$

$$C_\lambda = \exp\{\lambda(m(h_\lambda) - 1 - h_\lambda m'(h_\lambda))\}. \tag{2.8.8}$$

Из (2.8.3) и (2.8.4) мы получаем, что

$$\mathsf{E}Z_\lambda(h_\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x d\mathcal{E}_{H_\lambda,h_\lambda}(x) = \Psi'_{\mathcal{E}_{H_\lambda,h_\lambda}}(0) = \lambda\alpha_1 + x_\lambda\sqrt{\alpha_2\lambda}$$

и

$$\mathsf{D}Z_\lambda(h_\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 d\mathcal{E}_{H_\lambda,h_\lambda}(x) - [\mathsf{E}Z_\lambda(h_\lambda)]^2 =$$

$$= \Psi''_{\mathcal{E}_{H_\lambda,h_\lambda}}(0) - [\Psi'_{\mathcal{E}_{H_\lambda,h_\lambda}}(0)]^2 = (u_\lambda/h_\lambda)^2.$$

Пусть

$$R_\lambda(x) = \mathsf{P}\Big(\frac{Z_\lambda(h_\lambda) - \lambda\alpha_1 + x_\lambda\sqrt{\alpha_2\lambda}}{u_\lambda/h_\lambda} < x\Big), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Следуя Герберу (Gerber, 1979), с. 64, назовем функцию

$$E_0(u) = \int\limits_0^{\infty} e^{-uy}\phi(y)dy$$

эсшеровой функцией нулевого порядка. Обозначим

$$\widetilde{H}_\lambda(x) = \mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - \alpha_1\lambda}{\sqrt{\lambda\alpha_2}} < x\Big).$$

Теорема 2.8.1. *Пусть семейство* $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ *определено в соответствии с (2.8.7). Тогда при* $\lambda \to \infty$

$$\frac{1 - \widetilde{H}_\lambda(x_\lambda)}{C_\lambda E_0(u_\lambda)} = 1 + O\Big(\frac{x_\lambda}{\sqrt{\lambda}}\Big).$$

Доказательство. Во-первых, с помощью непосредственных вычислений убеждаемся, что для любого $u \in \mathbb{R}$

$$E_0(u) = e^{u^2/2}(1 - \Phi(u)). \tag{2.8.9}$$

Во-вторых, покажем, что для $\lambda \ge \lambda_0$

$$\sup_{u>0}\Big|\int\limits_0^\infty e^{-uy} dR_\lambda(x) - E_0(u)\Big| \le 2\sup_{x\in\mathbf{R}}|R_\lambda(x) - \Phi(x)|. \tag{2.8.10}$$

Действительно, интегрируя по частям мы получаем

$$\Big|\int\limits_0^\infty e^{-uy} dR_\lambda(y) - \int\limits_0^\infty e^{-uy}\phi(y)dy\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_0^\infty [(R_\lambda(x) - R_\lambda(0)) - (\Phi(x) - \Phi(0))]ue^{-ux}dx\Big| \le$$

$$\le 2\sup_{x\in\mathbf{R}}|R_\lambda(x) - \Phi(x)|\int\limits_0^\infty ue^{-ux}dx = 2\sup_{x\in\mathbf{R}}|R_\lambda(x) - \Phi(x)|\,.$$

В-третьих, покажем, что при $\lambda \ge \lambda_0$

$$\Big|\frac{1 - \widetilde{H}_\lambda(x_\lambda)}{C_\lambda E_0(u_\lambda)} - 1\Big| \le \frac{2}{E_0(u_\lambda)}\sup_{x\in\mathbf{R}}|R_\lambda(x) - \Phi(x)|\,. \tag{2.8.11}$$

Действительно, используя обратное интегральное преобразование, с помощью (2.8.7) и (2.8.8) мы получаем

$$1 - \widetilde{H}_\lambda(x_\lambda) = \int\limits_{\lambda\alpha_1 + x_\lambda\sqrt{\lambda\alpha_2}}^\infty dH_\lambda(x) = M_\lambda(h_\lambda)\int\limits_{\lambda\alpha_1 + x_\lambda\sqrt{\lambda\alpha_2}}^\infty e^{-h_\lambda y} d\mathcal{E}_{H_\lambda, h_\lambda}(y) =$$

$$= \exp\{-h_\lambda(\lambda\alpha_1 + x_\lambda\sqrt{\lambda\alpha_2})\}M_\lambda(h_\lambda)\int\limits_0^\infty e^{-u_\lambda y}dR_\lambda(y) =$$

$$= C_\lambda\int\limits_0^\infty e^{-u_\lambda y}dR_\lambda(y) = C_\lambda E_0(u_\lambda) + C_\lambda\Big[\int\limits_0^\infty e^{-u_\lambda y}dR_\lambda(y) - E_0(u_\lambda)\Big].$$

Теперь (2.8.11) вытекает из (2.8.10).

Убедимся, что в рамках определений (2.8.6) – (2.8.8) с учетом соотношений (2.8.4) и (2.8.5) числа u_λ, h_λ и x_λ при $\lambda\to\infty$ удовлетворяют соотношениям

$$h_\lambda \sim x_\lambda/\sqrt{\lambda\alpha_2}, \tag{2.8.12}$$

$$u_\lambda \sim x_\lambda, \tag{2.8.13}$$

и

$$u_\lambda - x_\lambda = O\Big(\frac{x_\lambda^3}{\lambda}\Big). \tag{2.8.14}$$

Действительно, в силу (2.8.5) мы имеем

$$\lim_{\lambda\to\infty} h_\lambda = 0.$$

В окрестности нуля имеет место представление $m'(h) = \alpha_1 + hf(h)$, где функция f непрерывна в нуле и $f(0) = \alpha_2 > 0$. Поэтому при больших λ справедливо соотношение

$$m'(h_\lambda) = \alpha_1 + hf(h_\lambda).$$

Следовательно, в силу (2.8.6) при $\lambda\to\infty$ мы получаем

$$h_\lambda = \frac{m'(h_\lambda) - \alpha_1}{f(h_\lambda)} = \frac{x_\lambda\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\lambda}f(h_\lambda)} \sim \frac{x_\lambda}{\sqrt{\lambda\alpha_2}},$$

то есть верно (2.8.12). Из (2.8.7) и (2.8.12) мы получаем

$$u_\lambda \sim \frac{x_\lambda\sqrt{m''(h_\lambda)}}{\sqrt{\alpha_2}} \sim x_\lambda,$$

поскольку $m''(0) = \alpha_2$. Таким образом, (2.8.13) верно. Для $h\in I$ положим

$$g(h) = h\sqrt{m''(h)} - \frac{m'(h) - \alpha_1}{\sqrt{\alpha_2}}.$$

Несложно видеть, что $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$. Поэтому для некоторой непрерывной в нуле функции $\overline{g}$ справедливо представление $g(h) = h^3\overline{g}$. Для $\lambda \geq \lambda_0$ вследствие (2.8.6) и (2.8.7) мы имеем

$$u_\lambda - x_\lambda = h_\lambda\sqrt{\lambda m''(h_\lambda)} - \frac{\sqrt{\lambda}(m'(h_\lambda) - \alpha_1)}{\sqrt{\alpha_2}} =$$

$$= \sqrt{\lambda}g(h_\lambda) = \sqrt{\lambda}h_\lambda^3\overline{g}(h_\lambda) \sim \frac{x_\lambda^3\overline{g}(h_\lambda)}{\lambda\alpha_2^{3/2}}$$

в силу (2.8.12), то есть (2.8.14) верно.

Теперь заметим, что в соответствии с (2.8.4) в силу Теоремы 1.4.3 имеет место неравенство

$$\sup_x |R_\lambda(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C\rho_\lambda}{\sqrt{\lambda m(h_\lambda)}}\left[\frac{m''(h_\lambda)}{m(h_\lambda)}\right]^{-3/2},$$

где $C \leq 0.7655$ и

$$\rho_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} |y|^3 d\mathcal{E}_{F,h_\lambda}(y) = \frac{1}{m(h_\lambda)}\int_{-\infty}^{\infty} |y|^3 e^{h_\lambda y} dF(y).$$

Таким образом, при $\lambda \geq \lambda_0$

$$\sup_x |R_\lambda(x) - \Phi(x)| \leq \frac{CA_\lambda}{\sqrt{\lambda}},$$

где

$$A_\lambda = (m''(h_\lambda))^{-3/2}\int_{-\infty}^{\infty} |y|^3 e^{h_\lambda y} dF(y).$$

Следовательно, из (2.8.9), (2.8.11) и (2.8.13) мы получаем

$$\left|\frac{1 - \widetilde{H}_\lambda(x_\lambda)}{C_\lambda E_0(u_\lambda)} - 1\right| \leq \frac{2}{E_0(u_\lambda)}\sup_{x\in\mathbb{R}} |R_\lambda(x) - \Phi(x)| \leq$$

$$\leq \frac{6A_\lambda}{E_0(u_\lambda)\sqrt{\lambda}} \sim 6\sqrt{2\pi}\frac{A_\lambda u_\lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim 6\sqrt{2\pi}\frac{A_\lambda x_\lambda}{\sqrt{\lambda}},$$

поскольку, как известно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{x(1 - \Phi(x))} = 1 \qquad (2.8.15)$$

(см., например, (Феллер, 1984), т. 1, с. 192). Отсюда следует утверждение теоремы, так как

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda = \frac{1}{\alpha_2^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |y|^3 dF(y) < \infty.$$

Теорема доказана. □

Теперь нашей целью будет сопоставление точности аппроксимации обобщенных пуассоновских распределений с помощью разложений Эджворта и преобразования Эсшера.

Лемма 2.8.1. *Пусть* $\{x_\lambda\}_{\lambda>0}$ *и* $\{y_\lambda\}_{\lambda>0}$ *– множества положительных чисел такие, что* $x_\lambda \to \infty$ *при* $\lambda \to \infty$*, причем* $x_\lambda = O(\lambda^{1/4})$, $x_\lambda - y_\lambda = O(x_\lambda^3/\sqrt{\lambda})$*,* $x_\lambda \sim y_\lambda$*. Тогда при* $\lambda \to \infty$*:*

1. $x_\lambda^2 - y_\lambda^2 = O(1)$;
2. $\dfrac{1-\Phi(x_\lambda)}{1-\Phi(y_\lambda)} = 1 + O\Big(\dfrac{x_\lambda^4}{\lambda}\Big)$.

Доказательство. Пункт 1 почти очевиден. Чтобы убедиться в справедливости пункта 2 сначала заметим, что для любых $x, y > 0$

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \le \phi(x)|x-y| \exp\Big\{\frac{|x^2-y^2|}{2}\Big\}$$

и сдедовательно,

$$\Big|\frac{1-\Phi(y_\lambda)}{1-\Phi(x_\lambda)} - 1\Big| = \frac{|\Phi(x_\lambda) - \Phi(y_\lambda)|}{1-\Phi(x_\lambda)} \le \frac{\phi(x_\lambda)}{1-\Phi(x_\lambda)}|x_\lambda - y_\lambda| \exp\Big\{\frac{|x_\lambda^2-y_\lambda^2|}{2}\Big\}.$$

Как мы отмечали выше,

$$\frac{\phi(x_\lambda)}{1-\Phi(x_\lambda)} = O(x_\lambda)$$

при $x \to \infty$. В силу условия леммы $|x_\lambda - y_\lambda| = O(x_\lambda^3/\sqrt{\lambda})$, а вследствие (i)

$$\exp\Big\{\frac{|x_\lambda^2-y_\lambda^2|}{2}\Big\} = O(1).$$

Из этих условий вытекает требуемое утверждение. Лемма доказана. □

Лемма 2.8.2. *Пусть* $r \ge 3$ *– целое и* $\{x_\lambda\}_{\lambda>0}$ *– множество положительных чисел такое, что* $x_\lambda \to \infty$ *при* $\lambda \to \infty$*, причем* $x_\lambda^3 = O(\sqrt{\lambda})$*. Тогда*

$$\frac{1-G_{\lambda,r}(x_\lambda)}{1-\Phi(x_\lambda)} = 1 + O\Big(\frac{x_\lambda^3}{\sqrt{\lambda}}\Big)$$

при $\lambda \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При каждом $k = 3, \ldots, r$ вследствие (4.5.7) и Замечания 4.5.1 мы имеем

$$\lambda^{1-k/2} x_\lambda R_k(x_\lambda) = \lambda^{1-k/2} O(x_\lambda^{L_k}) = \lambda^{1-k/2} O(x_\lambda^{3(k-2)}) =$$

$$= O((x_\lambda^3/\sqrt{\lambda})^{k-2}) = O(x_\lambda^3/\sqrt{\lambda}).$$

Таким образом, по определению функции $G_{\lambda,r}(x)$ при $\lambda \to \infty$

$$\frac{1 - G_{\lambda,r}(x_\lambda)}{1 - \Phi(x_\lambda)} - 1 = -\frac{\phi(x_\lambda)}{x_\lambda(1 - \Phi(x_\lambda))} \sum_{k=3}^{r} \lambda^{1-k/2} x_\lambda R_k(x_\lambda) =$$

$$= -\frac{\phi(x_\lambda)}{x_\lambda(1 - \Phi(x_\lambda))} O(x_\lambda^3/\sqrt{\lambda}).$$

Отсюда в силу (2.8.15) следует требуемое утверждение. Лемма доказана. □

Лемма 2.8.3. *Пусть* $x_\lambda = O(\lambda^{1/6})$ *при* $\lambda \to \infty$*, а* u_λ *определены соотношением (2.8.7). Тогда*

$$\frac{C_\lambda E_0(u_\lambda)}{1 - \Phi(u_\lambda)} = 1 + O\Big(\frac{x_\lambda^3}{\sqrt{\lambda}}\Big) \qquad (\lambda \to \infty).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $h \in I$ определим функцию $f(h)$ как $f(h) = m(h) - 1 - hm'(h) + \frac{1}{2}h^2 m''(h)$. Тогда $f(0) = 0$, $f'(h) = \frac{1}{2}h^2 m'''(h)$. Применение правила Лопиталя дает

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{m'''(h)}{6} = \frac{\alpha_3}{6}. \tag{2.8.16}$$

Используя представление $e^x = 1 + xg(x)$, где функция $g(x)$ непрерывна в нуле, причем $g(0) = 1$, для $\lambda \geq \lambda_0$ мы в силу (2.8.9) и (2.8.8) получаем

$$\frac{C_\lambda E_0(u_\lambda)}{1 - \Phi(u_\lambda)} = {}_\lambda e^{u_\lambda^2/2} = \exp\{\lambda f(h_\lambda)\} = 1 + \lambda f(h_\lambda) g(\lambda f(h_\lambda)). \tag{2.8.17}$$

Вследствие (2.8.16) мы имеем

$$\lambda f(h_\lambda) \sim \frac{\lambda h_\lambda^3 \alpha_3}{6}$$

так что в силу (2.8.12)

$$\lambda f(h_\lambda) \sim \frac{x_\lambda^3 \alpha_3}{6\sqrt{\lambda}\alpha_2^{3/2}},$$

откуда вытекает, что

$$\lambda f(h_\lambda) = O\Big(\frac{x_\lambda^3}{\sqrt{\lambda}}\Big)$$

и

$$g(\lambda f(h_\lambda)) = O(1),$$

поскольку $x_\lambda = O(\lambda^{1/6})$. Теперь требуемое соотношение следует из (2.8.17). Лемма доказана. □

Лемма 2.8.4. *Пусть $x_\lambda = O(\lambda^{1/6})$ при $\lambda \to \infty$, а u_λ определены соотношением (2.8.7). Тогда*

$$\frac{C_\lambda E_0(u_\lambda)}{1-\Phi(x_\lambda)} = 1 + O\Big(\frac{x_\lambda^3}{\sqrt{\lambda}}\Big) \quad (\lambda \to \infty).$$

Доказательство. Положим

$$f(\lambda) = \frac{1-\Phi(u_\lambda)}{1-\Phi(x_\lambda)} - 1, \quad g(\lambda) = C_\lambda e^{u_\lambda^2/2} - 1.$$

Тогда согласно Лемме 2.8.3

$$g(\lambda) = O\Big(\frac{x_\lambda^3}{\sqrt{\lambda}}\Big) \quad (\lambda \to \infty),$$

а вследствие (2.8.14) по Лемме 2.8.1

$$f(\lambda) = O\Big(\frac{x_\lambda^4}{\lambda}\Big) \quad (\lambda \to \infty).$$

В силу (2.8.5) мы также имеем

$$f(\lambda) = O\Big(\frac{x_\lambda^3}{\sqrt{\lambda}}\Big) \quad (\lambda \to \infty)$$

и

$$f(\lambda)g(\lambda) = O\Big(\frac{x_\lambda^3}{\sqrt{\lambda}}\Big) \quad (\lambda \to \infty).$$

Поэтому

$$\frac{C_\lambda E_0(u_\lambda)}{1-\Phi(x_\lambda)} = (1+f(\lambda))(1+g(\lambda)) = 1+f(\lambda)+g(\lambda)+f(\lambda)g(\lambda) = 1+O\Big(\frac{x_\lambda^3}{\sqrt{\lambda}}\Big).$$

Лемма доказана. □

Теорема 2.8.2. *Пусть $r \geq 3$ – фиксированное целое число и $x\lambda = O(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$. Тогда*

$$\frac{1-\widetilde{H}(x_\lambda)}{1-\Phi(x_\lambda)} = 1 + O\Big(\frac{x_\lambda^3}{\sqrt{\lambda}}\Big) \tag{2.8.18}$$

и

$$\frac{1-\widetilde{H}(x_\lambda)}{1-G_{\lambda,r}(x_\lambda)} = 1 + O\Big(\frac{x_\lambda^3}{\sqrt{\lambda}}\Big) \tag{2.8.19}$$

при $\lambda \to \infty$.

Доказательство. Соотношение (2.8.18) вытекает из Теоремы 2.8.1 и Леммы 2.8.4. Соотношение (2.8.19) вытекает из (2.8.18) и Леммы 2.8.1 вследствие элементарного равенства

$$\frac{x}{y} - 1 = \frac{x}{z}\Big(\frac{z}{y} - 1\Big) + \frac{x}{z} - 1.$$

Теорема доказана. □

Сопоставление результатов Теорем 2.8.1 и 2.8.2 приводит нас к выводу о том, что аппроксимация вероятностей больших уклонений пуассоновских случайных сумм с помощью преобразования Эсшера намного точнее, чем с помощью разложения Эджворта или же чем обычная нормальная аппроксимация. Этот факт отмечался многими авторами, см., например, результаты модельных вычислений в (Cramér, 1955), с. 42-43, таблицы Эссшера по страхованию от пожаров, приведенные в (Cramér, 1955), с. 43-45, а также (Gerber, 1979), с. 62, и (Beard, Pentikainen and Pesonen, 1977), с. 79. На самом деле в этом нет ничего необычного. Действительно, для построения нормальной аппроксимации требуется информация лишь о первых двух моментах пуассоновских случайных сумм. Для построения аппроксимации с помощью разложения Эджворта порядка $r \geq 3$ требуется информация уже о первых r моментах. Естественно, больший объем используемой информации позволяет надеяться на большую точность получаемых с помощью этой информации аппроксимаций. Наконец, для построения аппроксимации вероятностей больших уклонений пуассоновских случайных сумм на основе преобразования Эсшера по известным значениям x и λ нужно построить точки u_λ по правилу (2.8.7), но для этого нужно знать производящую функцию моментов $m(h)$, что эквивалентно информации о всех моментах. Поэтому по сути преобразование Эсшера представляет собой лишь один из возможных способов избежать бесконечного числа операций при приближенном вычислении пуассоновских сверток.

2.9 Теорема переноса

Чтобы иметь возможность проследить изменение распределения случайных сумм, когда распределение слагаемых может изменяться вместе с изменением распределения случайного индекса, мы рассмотрим простейший вариант так называемой теоремы переноса для случайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин в схеме серий.

Пусть $\{X_{n,j}\}_{j\geq 1}$, $n = 1, 2, \ldots$ – последовательность серий независимых и одинаково в каждой серии распределенных случайных величин, а N_n, $n = 1, 2, \ldots$ – положительные целочисленные случайные величины такие, что при каждом n случайная величина N_n независима от последовательности $\{X_{n,j}\}_{j\geq 1}$. Для натуральных k обозначим

$$S_{n,k} = X_{n,1} + \ldots + X_{n,k}.$$

Для определенности будем считать, что все функции распределения, о которых пойдет речь ниже, непрерывны справа.

Теорема 2.9.1. *Предположим, что существуют неограниченно возрастающая последовательность натуральных чисел $\{m_n\}_{n\geq 1}$ и функции распределения $H(x)$ и $A(x)$ такие, что*

$$\mathsf{P}(S_{n,m_n} < x) \Longrightarrow H(x), \quad n \to \infty, \tag{2.9.1}$$

и

$$\mathsf{P}(N_n < m_n x) \Longrightarrow A(x), \quad n \to \infty. \tag{2.9.2}$$

Тогда существует функция распределения $F(x)$ такая, что

$$\mathsf{P}(S_{n,N_n} < x) \Longrightarrow F(x), \quad n \to \infty. \tag{2.9.3}$$

При этом функция распределения $F(x)$ соответствует характеристической функции

$$f(t) = \int\limits_0^\infty h^u(t)dA(u), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.9.4}$$

где $h(t)$ – характеристическая функция, соответствующая функции распределения $H(x)$.

Доказательство. Обозначим $g_n(t) = \mathsf{E}e^{itX_{n,1}}$, $h_n(t) = g_n^{m_n}(t)$, $A_n(x) = \mathsf{P}(N_n \leq m_n x)$. По формуле полной вероятности имеем

$$f_n(t) \equiv \mathsf{E}\exp\left\{it\sum_{j=1}^{N_n} X_{n,j}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(N_n = k)\mathsf{E}\exp\left\{it\sum_{j=1}^{k} X_{n,j}\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(N_n = k) g_n^k(t) = \int_0^{\infty} g_n^u(t) d\mathsf{P}(N_n \le u) =$$

$$= \int_0^{\infty} g_n^{m_n u}(t) dA_n(u) = \int_0^{\infty} h_n^u(t) dA_n(u).$$

Соотношение (2.9.3) будет доказано, если мы убедимся, что при каждом $t \in \mathbb{R}$

$$|f_n(t) - f(t)| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{2.9.5}$$

Фиксируем произвольное $t \in \mathbb{R}$. Имеем

$$|f_n(t) - f(t)| = \Big| \int_0^{\infty} h_n^u(t) dA_n(u) - \int_0^{\infty} h^u(t) dA(u) \Big| \le$$

$$\le \Big| \int_0^{\infty} h_n^u(t) dA_n(u) - \int_0^{\infty} h^u(t) dA_n(u) \Big| +$$

$$+ \Big| \int_0^{\infty} h^u(t) dA_n(u) - \int_0^{\infty} h^u(t) dA(u) \Big| \equiv I_1(n) + I_2(n). \tag{2.9.6}$$

Вначале рассмотрим $I_2(n)$. Пусть N – случайная величина с функцией распределения $A(x)$. В силу условия (2.9.2) по определению слабой сходимости для любой непрерывной и ограниченной функции $\phi(u)$ имеет место соотношение

$$\mathsf{E}\phi(N_n/m_n) \to \mathsf{E}\phi(N) \quad (n \to \infty).$$

Следовательно, так как функция $\phi_z(u) = z^u$ ограничена и непрерывна по u при $|z| \le 1$, то, полагая $z = h(t)$ (при таком z имеем $\phi_z(u) = \phi_{h(t)}(u) = h^u(t)$), мы замечаем, что в силу условия (2.9.2) имеет место сходимость $I_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, нам достаточно убедиться, что с помощью выбора большого n можно сделать $I_1(n)$ произвольно малым. Пусть $\epsilon > 0$ – произвольное малое число. Для любого положительного M имеем

$$I_1(n) \le \int_0^{M} |h_n^u(t) - h^u(t)| dA_n(u) + \int_M^{\infty} |h_n^u(t) - h^u(t)| dA_n(u) \equiv$$

$$\equiv I_{11}(n) + I_{12}(n). \tag{2.9.7}$$

В силу слабой компактности семейства функций распределения $\{A_n(x)\}_{n\geq 1}$, обусловленной соотношением (2.9.2), существует такое $M = M(\epsilon) > 0$, что

$$I_{12}(n) \leq 2\int_M^\infty dA_n(u) \leq 2\sup_n[1 - A_n(M)] < \epsilon. \tag{2.9.8}$$

Рассмотрим $I_{11}(n)$. Нам понадобится следующий аналог формулы Лагранжа для комплекснозначных функций (см. Предложение 3.3.1 в (Картан, 1971), с. 47).

Лемма 2.9.1. *Если комплекснозначная функция $\Psi(z)$ дифференцируема на множестве U и отрезок с концами a и b содержится в U, то*

$$|\Psi(a) - \Psi(b)| \leq |b - a| \cdot \sup_{0\leq\alpha\leq 1} |\Psi'(\alpha a + (1-\alpha)b)|.$$

Полагая в Лемме 2.9.1 $\Psi(z) = z^u$, при каждом $u > 0$ мы получаем неравенство

$$|h_n^u(t) - h^u(t)| \leq u|h_n(t) - h(t)| \sup_{0\leq\alpha\leq 1} |\alpha h_n(t) + (1-\alpha)h(t)|^{u-1} \leq$$

$$\leq \frac{u|h_n(t) - h(t)|}{\min\{|h_n(t)|, |h(t)|\}}.$$

Поскольку выполнено условие (2.9.1) и $m_n \to \infty$, характеристическая функция $h(t)$ безгранично делима, и стало быть, ни при каком $t \in \mathbb{R}$ не обращается в нуль. В силу условия (2.9.1) $h_n(t) \to h(t)$ при $n \to \infty$, и стало быть, найдутся такие $\delta > 0$ и n_0, что $\min\{h_n(t), h(t)\} \geq \delta$ для всех $n \geq n_0$. Поэтому для всех n, начиная с n_0, справедливо неравенство

$$I_{11}(n) \leq \frac{M}{\delta}|h_n(t) - h(t)|.$$

Поэтому условие (2.9.1) позволяет выбрать $n_1 = n_1(\epsilon) \geq n_0$ столь большим, чтобы

$$I_{11}(n) < \epsilon \tag{2.9.9}$$

для всех $n \geq n_1$. Из (2.9.8), (2.9.9) и (2.9.7) следует, что $I_1(n) < 2\epsilon$ при $n \geq n_1$. Таким образом, теорема доказана. □

Теорема 2.9.1, приведенная выше, впервые доказана в статье (Гнеденко и Фахим, 1969). В той же работе впервые использован термин "теорема переноса", подчеркивающий, что в этой теореме описывается перенос свойства сходимости с сумм неслучайного числа случайных слагаемых на случайные суммы и сопутствующая трансформация предельного закона. Здесь мы привели новое доказательство этого результата, отличающееся как от приведенного в работе (Гнеденко и Фахим, 1969), так и от доказательств в книгах (Круглов и Королев, 1990), (Gnedenko and Korolev, 1996).

В классической теории суммирования случайных величин безразлично, центрируются суммы или отдельные слагаемые, так как константы, центрирующие сумму, могут быть “распределены"между слагаемыми и наоборот. При случайном суммировании, когда число слагаемых в сумме случайно, центрирование слагаемых приводит к тому, что сама сумма центрируется случайной величиной (случайной суммой констант, центрирующих слагаемые). В то же время, для построения предельных или асимптотических аппроксимаций для распределения случайных сумм необходимо центрировать суммы константами. А это уже новая, более общая схема по сравнению с рассмотренной в Теореме 2.9.1. Следующую более общую теорему переноса, в которой рассматриваются центрированные константами случайные суммы, мы приведем без доказательства. Заинтересованный читатель может найти его в книге (Gnedenko and Korolev, 1996).

Теорема 2.9.2. *Пусть для некоторых случайных величин Y, U и V и последовательностей $\{m_n\}_{n\geq 1}$ натуральных чисел, $\{a_n\}_{n\geq 1}$ и $\{c_n\}_{n\geq 1}$ действительных чисел при $n\to\infty$ выполнены условия*

$$S_{n,m_n} - a_n \implies Y, \tag{2.9.10}$$

$$\frac{N_n}{m_n} \implies U, \tag{2.9.11}$$

$$a_n\frac{N_n}{m_n} - c_n \implies V. \tag{2.9.12}$$

Тогда

$$S_{n,N_n} - c_n \implies Z \quad (n\to\infty),$$

где Z – случайная величина с характеристической функцией

$$f(t) = \mathsf{E}[h^U(t)e^{itV}], \quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.9.13}$$

Будем говорить, что пара случайных величин (U,V) принадлежит к классу $\mathcal{K}_0$, если, во-первых, $\mathsf{P}(U\geq 0) = 1$ и, во-вторых, либо хотя бы одна из двух случайных величин U и V вырождена, либо для некоторых действительных чисел α и β

$$\mathsf{P}(V = \alpha U + \beta) = 1.$$

Если слагаемые $X_{n,j}$ предельно малы, то есть для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(|X_{n,1}| > \varepsilon) = 0,$$

то, согласно теореме Хинчина о сходимости типов (Хинчин, 1938), с. 87 (см. также (Феллер, 1984), т. 2, с. 291, лемма 1), класс предельных законов для центрированных случайных сумм независимых одинаково распределенных слагаемых состоит из тех распределений, характеристические функции которых представимы в виде (2.9.13), где характеристическая функция h безгранично делима, а пара случайных величин (U, V) принадлежит к классу $\mathcal{K}_0$.

Рассмотрим структуру предельных законов (2.9.13) более подробно. Если случайная величина V вырождена, то для некоторого $\beta \in \mathbb{R}$

$$f(t) = e^{it\beta}\mathsf{E}h^U(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.9.14}$$

то есть с точностью до неслучайного сдвига, предельная характеристическая функция представляет собой степенную смесь безгранично делимых характеристических функций. Подобная ситуация рассмотрена в Теореме 2.9.1.

Если обе случайные величины U и V невырождены, то для некоторых α и β

$$f(t) = \mathsf{E}[h^U(t)\exp\{it\alpha U\}\exp\{it\beta\}] = \exp\{it\beta\}\mathsf{E}h_\alpha^U(t),$$

где $h_\alpha = e^{it\alpha}h(t)$, и так как h_α – безгранично делимая характеристическая функция, то мы опять находимся в рамках ситуации (2.9.14).

При рассмотрении неслучайно центрированных случайных сумм ситуация, когда величина U вырождена, занимает особое положение. В таком случае для некоторого $\gamma \geq 0$

$$f(t) = h^\gamma(t)\mathsf{E}\exp\{itV\} \tag{2.9.15}$$

и функция распределения, соответствующая характеристической функции из (2.9.13), принимает вид

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_\gamma(x-z)\,dG(z) = (H_\gamma * G)(x), \tag{2.9.16}$$

где H_γ – функция распределения, соответствующая характеристической функции $h^\gamma(t)$, а $G(z) = \mathsf{P}(V < z)$, то есть $F(x)$ является сдвиговой смесью безгранично делимой функции распределения $H_\gamma(x)$.

Таким образом, если слагаемые $\{X_{n,j}\}$ предельно малы, то предельные распределения центрированных случайных сумм независимых одинаково распределенных слагаемых соответствуют характеристическим функциям вида либо $e^{it\beta}\mathsf{E}g^U(t)$, либо $q(t)g(t)$, где $\mathsf{P}(U \geq 0) = 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, g

– безгранично делимая, а q – произвольная характеристические функции.

Особое положение ситуации (2.9.15) (или (2.9.16)) заключается в следующем. Если случайная величина U вырождена, то из (2.9.15) вытекает возможность представления предельной случайной величины Z в виде $Z = Y_\gamma + V$, где Y_γ – случайная величина с характеристической функцией h^γ, независимая от V. Следовательно, если на массив $\{X_{n,j}\}$ или последовательность $\{N_n\}$ не накладываются никакие другие условия, то предельной для случайных величин $S_{n,N_n} - c_n$ может быть *любая* функция распределения, поскольку вырожденная случайная велина $Y_\gamma = 0$ безгранично делима, и любую функцию распределения можно представить в виде слабого предела решетчатых распределений в (2.9.12).

2.10 Смеси вероятностных распределений

В теореме переноса, приведенной в предыдущем разделе, предельными законами оказываются специальные смеси вероятностных распределений. Например, легко убедиться, что если в Теореме 2.9.1 функция распределения H является стандартной нормальной, то есть $H = \Phi$, то предельная функция распределения F имеет вид

$$F(x) = \int_0^\infty \Phi(x/\sqrt{u})dA(u),$$

то есть функция распределения F является масштабной смесью нормальных законов.

Класс масштабных смесей нормальных законов с нулевыми средними очень богат и содержит много типов распределений с существенно различным поведением хвостов. К примеру, помимо самого́ нормального распределения с очень быстро (как $|x|^{-1}e^{-x^2}$) убывающими (при $|x| \to \infty$) хвостами, этот класс содержит распределение Лапласа (также называемое двойным экспоненциальным распределением), плотность которошо имеет вид $l(x) = \frac{1}{2}\mu e^{-\mu|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ ($\mu > 0$ – параметр), хвосты которого убывают при $|x| \to \infty$ как $e^{-\mu|x|}$, распределение Стьюдента с хвостами, убывающими как $|x|^{-\gamma}$ с произвольным $\gamma > 0$, в частности, распределение Коши, соответствующее случаю $\gamma = 1$, симметричные строго устойчивые законы с таким же степенным убыванием хвостов с $\gamma \in (0, 2)$, симметризованные гамма-распределения, хвосты которых ведут себя как $|x|^a e^{-b|x|}$ с $-1 < a < \infty$, $b > 0$, симметризованное распределение Вейбулла–Гнеденко с хвостами, убывающими как $e^{-|x|^d}$ при $0 < d < 1$, а также много других типов, см., например, (Королев, 2004). Этот пример показывает, что свойства смесей распределений вероятностей могут существенно отличаться от свойств смешиваемых законов.

В дальнейшем мы будем иметь дело с другими специальными смесями распределений вероятностей, которые не обязательно будут чисто масштабными смесями, но также более общими сдвиг/масштабными смесями. В этом разделе будут описаны некоторые основные свойства смесей.

2.10.1 Основные определения

Ниже мы будем интенсивно использовать некоторые специальные свойства смесей распределений вероятностей. Чтобы систематически исследовать эти свойства, сначала надо напомнить строгое определение смеси вероятностных распределений.

Рассмотрим функцию $F(x, \mathbf{y})$, определенную на множестве $\mathbb{R} \times \mathcal{Y}$. Для простоты мы будем предполагать, что $\mathcal{Y}$ – это некоторое подмножество m-мерного евклидова пространства, $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^m$ при некотором $m \geq 1$, причем множество $\mathcal{Y}$ снабжено борелевской σ-алгеброй Σ. Более того, предположим, что при каждом фиксированном $\mathbf{y}$ функция $F(x, \mathbf{y})$ является функцией распределения по x, а при каждом фиксированном x функция $F(x, \mathbf{y})$ измерима по y, то есть для любых $x \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R}$ выполнено условие $\{\mathbf{y} :\ F(x, \mathbf{y}) < c\} \in \Sigma$. Пусть Q – вероятностная мера, определенная на измеримом пространстве $(\mathcal{Y},\, \Sigma)$. Функция распределения

$$H(x) = \int\limits_{\mathcal{Y}} F(x, \mathbf{y}) \mathsf{Q}(d\mathbf{y}), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.10.1}$$

называется *смесью* функции распределения $F(x, \mathbf{y})$ по $\mathbf{y}$ относительно Q. Распределение $F(x, \mathbf{y})$ называется *смешиваемым*, в то время как мера Q задает *смешивающее* распределение. Если $\mathbf{Y}$ – m-мерная тождественная случайная величина (то есть $\mathbf{Y}(y) \equiv y$, $y \in \mathcal{Y}$), определенная на вероятностном пространстве $(\mathcal{Y},\, \Sigma, \mathsf{Q})$, то функция распределения $H(x)$ может быть записана в виде

$$H(x) = \mathsf{E} F(x, \mathbf{Y}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Если $f(x, \mathbf{y})$ – плотность распределения, соответствующая функции распределения $F(x, \mathbf{y})$,

$$f(x, \mathbf{y}) = \frac{d}{dx} F(x, \mathbf{y}),$$

то смеси $H(x)$ соответствует плотность

$$h(x) = \mathsf{E}f(x, \mathbf{Y}) = \int\limits_{\mathcal{Y}} f(x, \mathbf{y})\mathsf{Q}(d\mathbf{y}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Если случайный вектор $\mathbf{Y}$ имеет дискретное распределение и принимает значения $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \ldots$, то мы получаем смесь вида

$$H(x) = \mathsf{E}F(x, \mathbf{Y}) = \sum_{j \geq 1} p_j F(x, \mathbf{y}_j), \quad x \in \mathbb{R},$$

называемую *дискретной.* В таком случае функции распределения $F(x, \mathbf{y}_j)$ называются *компонентами* смеси $H(x)$, а числа p_j называются *весами* соответствующих компонент, $j \geq 1$. Если в дискретной смеси число ненулевых весов конечно (то есть случайный вектор $\mathbf{Y}$ принимает конечное число значений), то дискретная смесь называется *конечной.*

Если в таком случае функции распределения $F(x, \mathbf{y})$ соответствует плотность $f(x, \mathbf{y})$, то дискретной смеси $H(x)$ соответствует плотность

$$h(x) = \mathsf{E}f(x, \mathbf{Y}) = \sum_{j \geq 1} p_j f(x, \mathbf{y}_j), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.10.2}$$

Особо подчеркнем, что при разных значениях параметра $\mathbf{y}$ функции распределения $F(x, \mathbf{y})$ могут относиться к *разным* типам распределения. Например, если смесь дискретна, то есть мера Q приписывает вероятности p_j точкам $\mathbf{y}_j$, $j = 1, 2, \ldots$, причем $F(x, \mathbf{y}_j) = F_j(x)$, где $F_j(x)$ – функции распределения, возможно, соответствующие разным типам при разных j, то

$$H(x) = \mathsf{E}F(x, \mathbf{Y}) = \sum_{j \geq 1} p_j F_j(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Более того, если в таком случае компоненты F_j абсолютно непрерывны и имеют плотности f_j, то смесь $H(x)$ также будет абсолютно непрерывной с плотностью

$$h(x) = \mathsf{E}f(x, \mathbf{Y}) = \sum_{j \geq 1} p_j f_j(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

В дальнейшем особую роль будут играть сдвиг/масштабные смеси. Формально они определяются следующим образом. Пусть в определении, сформулированном выше, $m = 2$. Предположим, что вектор $\mathbf{y}$ имеет вид

$$\mathbf{y} = (u, v),$$

где $u > 0$ и $v \in \mathbb{R}$, так что функция распределения $F(x, \mathbf{y})$ допускает представление
$$F(x, \mathbf{y}) = F\Big(\frac{x-v}{u}\Big), \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Тогда $\mathcal{Y}$ – это положительная полуплоскость, то есть $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, и функция распределения
$$H(x) = \int\limits_{\mathcal{Y}} F\Big(\frac{x-v}{u}\Big)\mathsf{Q}(du, dv), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.10.3}$$
называется *сдвиг/масштабной смесью* функции распределения F относительно Q. Здесь u – это параметр масштаба, а v – параметр сдвига (положения). Если функция распределения F имеет плотность f, то функции распределения $F((x-v)/u)$ соответствует плотность
$$f(x, \mathbf{y}) = \frac{1}{u} f\Big(\frac{x-v}{u}\Big),$$
так что смеси (2.10.3) соответствует плотность
$$h(x) = \int\limits_{\mathcal{Y}} \frac{1}{u} f\Big(\frac{x-v}{u}\Big)\mathsf{Q}(du, dv), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Если X, U и V – случайные величины, заданные на одном и том же достаточно богатом вероятностном пространстве, так что при каждом фиксированном значении (u, v) пары случайных величин (U, V) случайная величина X имеет функцию распределения $F((x-v)/u)$, то смесь (2.10.3) может быть записана в виде
$$H(x) = \mathsf{E}F\Big(\frac{x-V}{U}\Big), \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Более того, в таком случае из теоремы Фубини вытекает, что функция распределения $H(x)$ соответствует случайной величине $X \cdot U + V$, где случайная величина X и случайный вектор $\mathbf{Y} = (U, V)$ стохастически независимы. Кстати, легко убедиться, что в таком контексте чисто сдвиговая смесь $H(x) = \mathsf{E}F(x-V)$ является не чем иным как функцией распределения суммы двух независимых случайных величин X и V, то есть сверткой их функций распределения. В то же время, чисто масштабная смесь $H(x) = \mathsf{E}F(x/U)$ является не чем иным как функцией распределения произведения двух независимых случайных величин X и U.

Чтобы определить дискретную сдвиг/масштабную смесь функции распределения $F(x)$, положим $\mathbf{y}_j = (\sigma_j, a_j)$, где $a_j \in \mathbb{R}$, $\sigma_j > 0$,

$j = 1, \ldots, k$, и в качестве специального случая приведенного выше определения дискретной смеси получим

$$H(x) = \sum_{j=1}^{k} p_j F\Big(\frac{x - a_j}{\sigma_j}\Big), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.10.4}$$

Если при этом $a_j = 0$, $j = 1, \ldots, k$, то мы получаем чисто масштабную конечную смесь

$$H(x) = \sum_{j=1}^{k} p_j F\Big(\frac{x}{\sigma_j}\Big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Если функция распределения F абсолютно непрерывна и имеет плотность $f = F'$, то смеси (2.10.4) функций распределения соответствует смесь плотностей

$$h(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{p_j}{\sigma_j} f\Big(\frac{x - a_j}{\sigma_j}\Big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Физический смысл понятия смеси вероятностных распределений может быть проиллюстрирован на примере дискретной смеси. Рассмотрим некоторую популяцию, которая не является однородной и в свою очередь состоит из некоторого числа, скажем, k суб-популяций. Предположим, что наблюдаемый признак или наблюдаемая характеристика внутри j-й суб-популяции распределен в соответствии с функцией распределения $F_j(x) \equiv F(x, \mathbf{y}_j)$, которую можно интерпретировать как условную вероятность того, что значение наблюдаемого признака у случайно выбранного индивидуума будет меньше, чем x, при условии, что случайно выбранный индивидуум является представителем j-й суб-популяции. Пусть вероятность того, что при случайном выборе индивидуума из всей (генеральной) популяции будет выбран представитель именно j-й суб-популяции, равна p_j ($p_j \geq 0$, $p_1 + \ldots + p_k = 1$). Тогда по формуле полной вероятности безусловная вероятность того, что значение наблюдаемого признака у индивидуума, случайно выбранного из всей генеральной популяции, будет меньше, чем x, окажется равной

$$H(x) = \sum_{j=1}^{k} p_j F_j(x).$$

В определенном смысле операция смешивания вероятностных распределений обеспечивает возможность формально интерпретировать популяции, реально являющиеся неоднородными, как однородные.

Очень часто нельзя непосредственно определить тип суб-популяции, к которой принадлежит очередное наблюдение. Вследствие этого вся (генеральная) популяция вынужденно считается однородной, хотя на самом деле она таковой не является и содержит индивидуумов, принадлежащих к существенно различным типам. Именно такая ситуация типична для анализа многих хаотических стохастических процессов. Поэтому чрезвычайно важно иметь возможность осуществить операцию, в некотором смысле обратную операции смешивания, а именно, операцию разделения (расщепления) смесей. Статистические процедуры, реализующие эту операцию, в значительной степени зависят от свойства идентифицируемости смесей вероятностных распределений.

2.10.2 Идентифицируемость смесей вероятностных распределений

Понятие идентифицируемой смеси интенсивно используется в прикладных задачах, связанных с декомпозицией (разделением, разложением, расщеплением) совокупностей (популяций). В качестве примеров можно упомянуть задачи классификации, распознавания образов или идентификации вероятностных распределений. Библиография по этим вопросам обширна, см., например, обзоры (Исаенко и Урбах, 1976), (Круглов, 1991), или книги (Titterington, Smith and Makov, 1987), (Айвазян, Бухштабер, Енюков и Мешалкин, 1989) и списки литературы в указанных источниках.

Напомним определение идентифицируемых семейств смесей распределений вероятностей. Оно было предложено в работе (Teicher, 1961).

Пусть функция $F(x,\mathbf{y})$ определена на множестве $\mathbb{R}\times\mathcal{Y}$. Для простоты предположим, что $\mathcal{Y}\subseteq\mathbb{R}^m$ при некотором $m\geq 1$ и множество $\mathcal{Y}$ снабжено борелевской σ-алгеброй Σ. Как и ранее, мы предполагаем, что функция $F(x,\mathbf{y})$ измерима по $\mathbf{y}$ при каждом фиксированном x и является функцией распределения как функция аргумента x при каждом фиксированном $\mathbf{y}$. Пусть $\mathcal{Q}$ – семейство случайных величин, принимающих значения во множестве $\mathcal{Y}$. Обозначим

$$\mathcal{H}=\{H_Q(x)=\mathsf{E}F(x,Q),x\in\mathbb{R}:Q\in\mathcal{Q}\}. \tag{2.10.5}$$

Семейство $\mathcal{H}$, определяемое ядром F и множеством $\mathcal{Q}$, называется *идентифицируемым*, если из равенства

$$\mathsf{E}F(x,Q_1)=\mathsf{E}F(x,Q_2),\qquad x\in\mathbb{R},$$

с $Q_1\in\mathcal{Q},\ Q_2\in\mathcal{Q}$ вытекает, что $Q_1\stackrel{d}{=}Q_2$.

К примеру, идентифицируемыми являются конечные смеси нормальных распределений, показательных распределений, пуассоновских распределений и распределений Коши. Однако, легко привести очень простые примеры неидентифицируемых семейств. В частности, в качестве ядра рассмотрим равномерное распределение и связанные с ним смеси

$$\frac{1}{3}\cdot 3\cdot \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{3})}(x)+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\mathbf{1}_{[\frac{1}{3},1)}(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2})}(x)+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1)}(x).$$

Здесь

$$\mathbf{1}_{[a,b)}(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in[a,b),\\ 0, & \text{если } x\notin[a,b)\end{cases}$$

– индикаторная функция отрезка $[a,b)$.

В этой книге мы главным образом рассматриваем сдвиг/-масштабные смеси, в которых $\mathbf{y}=(u,v)$, $F(x,\mathbf{y})=F((x-v)/u)$. Поэтому все, что на самом деле нам нужно, – это результаты об идентифицируемости семейств сдвиг/масштабных смесей одномерных распределений.

Если X, U и V – случайные величины, определенные на одном и том же достаточно богатом вероятностном пространстве так, что случайная величина X стохастически независима от пары (U,V) и для любых фиксированных значений u случайной величины U и v случайной величины V случайная величина X имеет функцию распределения $F((x-v)/u)$, то приведенное выше определение идентифицируемости применительно к сдвиг/масштабным смесям сводится к следующему. сдвиг/масштабная смесь $H(x)=\mathsf{E}F((x-V)/U)$, порожденная ядром F (сдвиг/масштабная смесь функции распределения F) идентифицируема, если из соотношения

$$X_1\cdot U_1+V_1\stackrel{d}{=}X_2\cdot U_2+V_2,$$

где (X_i,U_i,V_i), $i=1,2$, – тройки случайных величин, обладающих точно такими же свойствами, что присущи описанным выше случайным величинам X,U,V, вытекает, что

$$(U_1,V_1)\stackrel{d}{=}(U_2,V_2).$$

Сужение определения идентифицируемости на класс конечных сдвиг/-масштабных смесей сводится к следующему.

Семейство смесей

$$\mathcal{H}=\Big\{\sum_{j=1}^{k}p_jF\Big(\frac{x-a_j}{\sigma_j}\Big):$$

$$k \geq 1;\, p_j \geq 0,\, p_1 + \ldots + p_k = 1;\, a_j \in \mathbb{R},\, \sigma_j > 0,\, j = \overline{1,k} \Big\}$$

порожденное ядром F, идентифицируемо, если из равенства

$$\sum_{j=1}^{k} p_j F\Big(\frac{x - a_j}{\sigma_j}\Big) = \sum_{i=1}^{m} q_i F\Big(\frac{x - b_i}{\delta_i}\Big)$$

вытекает, что
(i) $k = m$;
(ii) для каждого индекса $j \in \{1, \ldots, k\}$ существует индекс $i \in \{1, \ldots, k\}$ такой, что

$$p_j = q_i, \quad a_j = b_i, \quad \sigma_j = \delta_i.$$

Теперь мы перейдем к рассмотрению условий идентифицируемости. Сначала рассмотрим условия идентифицируемости смесей, в которых смешивание производится либо по параметру сдвига, либо по параметру масштаба. Другими словами, сначала мы рассмотрим семейства однопараметрических смесей. Условия идентифицируемости таких семейств хорошо известны. Напомним некоторые из них.

Семейство функций распределения $\{F(x, y) : y > 0\}$ называется *аддитивно замкнутым*, если для любых $y_1 > 0, y_2 > 0$ справедливо соотношение

$$F(x, y_1) * F(x, y_2) \equiv F(x, y_1 + y_2). \tag{2.10.6}$$

Здесь символ $*$ обозначает свертку распределений: если F_1 и F_2 – функции распределения, то

$$F_1(x) * F_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x - y) dF_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x - y) dF_1(y).$$

Иногда свойство (2.10.6) семейств распределений вероятностей называется *воспроизводимостью* по параметру y.

Семейство нормальных законов с нулевым математическим ожиданием $\mathcal{N}_0 = \{\Phi(x/\sqrt{s}),\, s > 0\}$ является очевидным примером аддитивно замкнутого семейства (относительно дисперсии s).

Следующие результаты принадлежат Г. Тейчеру (Teicher, 1961).

Теорема 2.10.1. *Семейство смесей* (2.10.5) *функций распределения* $F(x, \cdot)$ *из аддитивно замкнутого семейства является идентифицируемым.*

Отсюда немедленно вытекает, что семейство $\mathcal{N}_0$ масштабных смесей нормальных законов с нулевым средним идентифицируемо.

Смеси, порождаемые ядрами из аддитивно замкнутых семейств, конечно же не исчерпывают все примеры идентифицируемых смесей. Рассмотрим масштабные смеси распределений, сосредоточенных на неотрицательной полупрямой.

Теорема 2.10.2. *Пусть* $F(x,y) = F(xy)$, $y \geq 0$, $F(0) = 0$. *Предположим, что преобразование Фурье функции* $G^*(y) = F(e^y)$, $y \geq 0$, *нигде не обращается в нуль. Тогда семейство смесей*

$$\mathcal{H} = \{H_Q(x) = \mathsf{E}F(xQ), x \geq 0 : \mathsf{P}(Q > 0) = 1\}$$

идентифицируемо.

Аналогичное свойство присуще некоторым семействам сдвиговых смесей распределений вероятностей.

Теорема 2.10.3. *Пусть* $\mathcal{Q}$ – *множество всех случайных величин. Семейство сдвиговых смесей*

$$\mathcal{H} = \{H_Q(x) = \mathsf{E}F(x - Q),\ x \in \mathbb{R} : Q \in \mathcal{Q}\},$$

идентифицируемо, если характеристическая функция, соответствующая функции распределения $F(x)$, *нигде не обращается в нуль.*

Теорема 2.10.1 гарантирует, что наряду со смесями нормальных законов с нулевым средним, идентифицируемыми являются семейства масштабных смесей любых строго устойчивых законов.

Теорема 2.10.3 гарантирует идентифицируемость семейств сдвиговых смесей любых безгранично делимых (в том числе устойчивых) законов.

Здесь мы упомянули только некоторые идентифицируемые семейства, которые так или иначе рассматриваются в данной книге. Многочисленные примеры других идентифицируемых семейств можно найти в работах (Medgyessy, 1961), (Teicher, 1961), (Teicher, 1963), (Yakowitz and Spragins, 1968).

Некоторые критерии (то есть необходимые и достаточные условия идентифицируемости семейств смесей доказаны в работе (Tallis, 1969), также см. обзор (Kruglov, 1991).

К сожалению, примеры ядер, порождающих идентифицируемые семейства сдвиг/масштабных смесей в общей ситуации (то есть без каких-либо дополнительных условий на смешивающие распределения) неизвестны. Такие примеры известны лишь для дискретных смешивающих законов. В частности, справедливо следующее утверждение, доказанное Г. Тейчером (Teicher, 1963).

Теорема 2.10.4. *Семейство конечных сдвиг/масштабных смесей нормальных законов идентифицируемо.*

Покажем, что семейство сдвиг/масштабных смесей нормальных законов при произвольном (двумерном) смешивающем законе не является идентифицируемым. Пусть X_1, X_2, U_1 и U_2 – независимые случайные величины такие, что X_1 и X_2 имеют одно и то же стандартное нормальное распределение, $\mathsf{P}(U_1 = 1) = 1$, а случайная величина U_2 невырождена, то есть ни при каком u не имеет места соотношение $\mathsf{P}(U_2 = u) = 1$. Более того, предположим, что $\mathsf{P}(U_2 > 0) = 1$. Тогда распределение случайной величины $Z = X_1U_2 + X_2$ может быть записано как в виде

$$\mathsf{P}(Z < x) = \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \Phi\left(\frac{x-v}{u}\right) d\mathsf{P}(X_2 < v) d\mathsf{P}(U_2 < u), \qquad (2.10.7)$$

так и в виде

$$\mathsf{P}(Z < x) = \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \Phi\left(\frac{x-v}{u}\right) d\mathsf{P}(X_1U_2 < v) d\mathsf{P}(U_1 < u). \qquad (2.10.8)$$

Легко видеть, что смешивающие двумерные распределения в представлениях (2.10.7) и (2.10.8) различны.

2.11 Случайные суммы случайных индикаторов. Аналог теоремы Пуассона

В этом разделе мы докажем аналог теоремы Пуассона для *случайных* сумм случайных индикаторов.

Рассмотрим семейство последовательностей случайных величин $\{X_{p,j},\ j \geq 1,\ 0 < p < 1\}$ такое, что при каждом фиксированном p случайные величины $X_{p,1}, X_{p,2}, \ldots$ имеют одно и то же распределение Бернулли

$$X_{p,j} = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } \ p, \\ 0 & \text{с вероятностью } \ 1-p. \end{cases}$$

Пусть $\{N_p,\ 0 < p < 1\}$ – семейство положительных целочисленных случайных величин. Предположим, что при каждом фиксированном p случайные величины $N_p, X_{p,1}, X_{p,2}, \ldots$ независимы. Положим

$$S_p = \sum_{j=1}^{N_p} X_{p,j}.$$

В этом разделе мы рассмотрим асимптотическое поведение распределения случайной величины S_p, когда N_p неограниченно возрастает при $p \to 0$.

Подобные проблемы типичны для изучения так называемых редеющих потоков событий. Они могут возникать в страховании. Действительно, пусть N_p – объем страхового портфеля, то есть число договоров страхования, заключенных в течение некоторого периода времени, скажем, в течение месяца. Если p – вероятность неблагоприятного события, от которого страхуется клиент, так что $X_{p,j}$ – индикатор такого события, то S_p равно количеству страховых выплат в рамках данного портфеля.

Символ $\Longrightarrow$, как обычно, будет обозначать слабую сходимость. Предположим, что все случайные величины заданы на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Теорема 2.11.1. *Предположим, что существует собственная случайная величина N такая, что*

$$pN_p \Longrightarrow N \quad (p \to 0). \tag{2.11.1}$$

Тогда

$$S_p \Longrightarrow S \quad (p \to 0),$$

где S – дискретная случайная величина с распределением

$$\mathsf{P}(S = k) = \frac{1}{k!}\int\limits_0^\infty e^{-z} z^k d\mathsf{P}(N \le z), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.11.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой теоремы совсем просто и основано на теореме переноса для случайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин в схеме серий (см. Теорему 1.9.1).

Пусть $\{p_n\}_{n\ge1}$ – произвольная последовательность такая, что $0 < p_n < 1$ и $p_n \to 0$ при $n \to \infty$. Положим $m_n = [1/p_n]$, где символом $[a]$ обозначается целая часть числа a. Тогда по теореме Пуассона

$$\sum_{j=1}^{m_n} X_{p_n,j} \Longrightarrow Y \quad (n \to \infty), \tag{2.11.3}$$

где Y – случайная величина со стандартным пуассоновским распределением, которому соответствует характеристическая функция $h(t) = e^{e^{it}-1}$, $t \in \mathbb{R}$. Несложно убедиться, что в силу (2.11.1) мы имеем

$$\frac{N_{p_n}}{m_n} = p_n N_{p_n} \cdot \frac{1}{p_n[1/p_n]} \Longrightarrow N \quad (n \to \infty), \tag{2.11.4}$$

так как

$$\lim_{n\to\infty} p_n \Big[\frac{1}{p_n}\Big] = 1.$$

Поэтому по Теореме 1.9.1 из (2.11.3) и (2.11.4) мы получаем

$$S_{p_n} \Longrightarrow S \quad (n \to \infty),$$

где S – случайная величина с характеристической функцией

$$f(t) = \int_0^\infty e^{z(e^{it}-1)} d\mathsf{P}(N \le z).$$

Но $f(t)$ представляет собой характеристическую функцию смешанного пуассоновского распределения, поэтому имеет место (2.11.2). Поскольку предельные распределения в (2.11.3) и (2.11.4) не зависят от выбора последовательности $\{p_n\}_{n\ge 1}$, лишь бы $0 < p_n < 1$ и $p_n \to 0$ при $n \to \infty$, теорема доказана. □

Доказанная теорема может считаться обоснованием использования смешанных пуассоновских законов в качестве математических моделей распределений редких событий в неоднородной ситуации. Она является естественным обобщением классической теоремы Пуассона, иначе называемой законом малых чисел, которая часто используется для обоснования использования распределения Пуассона. Как мы увидим ниже, одномерные распределения процессов Кокса (дважды стохастических пуассоновских процессов) являются смешанными пуассоновскими.

В частности, согласно Теореме 2.11.1, если N имеет гамма-распределение (например, это так в случае, когда N_p имеет отрицательное биномиальное распределение), тогда S имеет отрицательное биномиальное распределение.

Рассмотрим скорость сходимости в Теореме 2.11.1. Обозначим $\Psi_p(z) = \mathsf{P}(N \le z) - \mathsf{P}(pN_p \le z)$.

Теорема 2.11.2. *Предположим, что* $p\mathsf{E}N_p = 1$. *Тогда для* $k = 0, 1, \ldots$ *справедлива оценка*

$$|\mathsf{P}(S_p = k) - \mathsf{P}(S = k)| \le 2p + \frac{(pk)^k}{k!} + \frac{1}{k!}\int_0^\infty |\Psi_p(z)| e^{-z} z^{k-1} |k - z| dz.$$

Доказательство. Для натуральных n положим $S_n = X_{p,1} + \ldots + X_{p,n}$. С помощью формулы полной вероятности мы имеем

$$|\mathsf{P}(S_p = k) - \mathsf{P}(S = k)| \le \Big|\sum_{n=k}^\infty \mathsf{P}(N_p = n)\left[\mathsf{P}(S_n = k) - e^{-np}\frac{(np)^k}{k!}\right]\Big| +$$

$$+\Big|\sum_{n=k}^\infty \mathsf{P}(N_p = n) e^{-np}\frac{(np)^k}{k!} - \frac{1}{k!}\int_0^\infty e^{-z} z^k d\mathsf{P}(N \le z)\Big| \equiv I_1 + I_2.$$

Рассмотрим I_1. Используя хорошо известную оценку скорости сходимости в теореме Пуассона

$$\Big|\mathsf{P}(S_n = k) - e^{-np}\frac{(np)^k}{k!}\Big| \le 2np^2$$

(см., например, (Климов, 1983), с. 26)), мы получим

$$I_1 \le \sum_{n=k}^{\infty} \mathsf{P}(N_p = n)\Big|\mathsf{P}(S_n = k) - e^{-np}\frac{(np)^k}{k!}\Big| \le$$

$$\le \sum_{n=k}^{\infty} \mathsf{P}(N_p = n)\cdot 2np^2 \le 2p^2\mathsf{E}N_p = 2p. \qquad (2.11.5)$$

Последнее равенство в (2.11.5) имеет место в силу условия $p\mathsf{E}N_p = 1$.

Теперь рассмотрим I_2. Интегрируя по частям, мы будем иметь

$$I_2 \le \frac{1}{k!}\int_0^{pk} e^{-z}z^k d\mathsf{P}(pN_p \le z) + \frac{1}{k!}\Big|\int_0^{\infty} e^{-z}z^k d\Psi_p(z)\Big| \le$$

$$\le \frac{(pk)^k}{k!} + \frac{1}{k!}\Big|\Psi_p(z)|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\Psi_p(z)d\left[e^{-z}z^k\right]\Big| \le$$

$$\le \frac{(pk)^k}{k!} + \frac{1}{k!}\int_0^{\infty}|\Psi_p(z)|e^{-z}z^{k-1}|k-z|dz. \qquad (2.11.6)$$

Объединяя (2.11.5) и (2.11.6), получим требуемый результат. Теорема доказана. □

Пример 2.11.1. Предположим, что N_p имеет распределение Пуассона с параметром $1/p$. Пусть $\mathcal{E}_1(z)$ – функция распределения с единственным единичным скачком в точке $z = 1$. Несложно убедиться, что в рассматриваемом случае $N = 1$ почти наверное, то есть $\mathsf{P}(N \le z) = \mathcal{E}_1(z)$. Более того, используя неравенство Чебышева, мы легко получаем оценку

$$|\Psi_p(z)| = |\mathsf{P}(pN_p \le z) - \mathcal{E}_1(z)| \le \frac{p}{\max\{1, |z-1|^2\}}, \quad z \ge 0.$$

Поэтому в данном случае $\mathsf{P}(S = k) = 1/(ek!)$ и по Теореме 2.11.2 мы получаем оценки

$$|\mathsf{P}(S_p = k) - \mathsf{P}(S = k)| \le p\Big(2 + p^{k-1}\frac{k^k}{k!} + Q_k\Big), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и

$$|\mathsf{P}(S_p = 0) - \mathsf{P}(S = 0)| \leq p(3 + R),$$

где

$$Q_k = \mathsf{E}\frac{|\xi_k - k|}{\max\{1, |\xi_k - 1|^2\}}, \qquad R = \mathsf{E}\frac{1}{\max\{1, |\xi_1 - 1|^2\}},$$

а ξ_k – случайная величина с гамма-распределением с параметром формы k и параметром масштаба 1.

Пример 2.11.2. Предположим, что N_p имеет геометрическое распределение с параметром $1/p$. Тогда N имеет стандартное показательное распределение, S имеет геометрическое распределение, и имеет место оценка

$$|\Psi_p(z)| = |\mathsf{P}(pN_p \leq z) - (1 - e^{-z})| \leq \frac{p}{1-p}, \quad z \geq 0$$

(см., например, (Королев, 1997b)). Поэтому по Теореме 2.11.2 мы получаем оценки

$$|\mathsf{P}(S_p = k) - \mathsf{P}(S = k)| \leq p\Big(2 + p^{k-1}\frac{k^k}{k!} + \frac{M_k}{1-p}\Big), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

и

$$|\mathsf{P}(S_p = 0) - \mathsf{P}(S = 0)| \leq p\Big(3 + \frac{1}{1-p}\Big),$$

где

$$M_k = \mathsf{E}|\xi_k - k|,$$

а ξ_k – случайная величина с гамма-распределением с параметром формы k и параметром масштаба 1.

В обоих этих примерах $|\mathsf{P}(S_p = k) - \mathsf{P}(S = k)|$ является величиной порядка $O(p)$.

Мы вернемся к обсуждению задачи построения асимптотических аппроксимаций для распределения случайных сумм случайных индикаторов в разделе 5.1.6.

Глава 3

Математические модели страхового риска

3.1 Модели и задачи теории риска

> РИСК (франц.), 1) в страховом деле: опасность, от к-рой производится страхование; иногда размер ответственности страховщика. Страхование м. б. произведено против Р. наступления смерти, пожара, градобития и т. п. За Р., который несет страховое учреждение (об-во), страхователь уплачивает страховую премию. 2) Различного рода случайности, сопряженные с деятельностью предпринимателя и обусловленные изменчивостью рыночной конъюнктуры. 3) В переносном смысле: действие наудачу; дело, предпринятое на счастливую случайность. Рисковать – подвергать себя случайности, опасности.
>
> *Малая советская энциклопедия*, ОГИЗ РСФСР, Москва, 1932.

Данная книга посвящена математическим моделям, позволяющим формализовать и изучать различные ситуации, связанные с проявлениями риска. Как следует из приведенного выше эпиграфа, главная область, в которой применяется понятие риска – это страхование как средство противостояния разного рода опасностям. При этом опять-таки в приведенном выше эпиграфе опасность и случайность выступают как синонимы, что позволяет нам заключить, что страхование – это механизм борьбы с опасными случайностями или случайными опасностями. Так как главной наукой, изучающей математические модели случайностей является теория вероятностей, то именно методы этой науки и составили ядро так называемой математической теории риска, под которой как правило, понимают, страховую математику.

Всю страховую математику можно (очень условно) поделить на две ветви: *теорию риска*, изучающую так называемые *рисковые* виды страхования (иначе называемые *non-life insurance*, то есть видами, *отличными от страхования жизни*), и *теорию страхования жизни*. При этом термин *актуарная математика* как правило используется для совокупности методов, относящихся ко второй ветви. Мы сосредоточим внимание именно на первой ветви – теории риска.

Широко распространенным подходом к страхованию с точки зрения экономической науки является рассмотрение страхования как одного из экономических механизмов стабилизации. Общую классификацию таких механизмов можно найти в (Ротарь и Бенинг, 1994), с. 699–701, где отмечено, что страхование в общем виде может рассматриваться как перераспределение риска между многими участниками экономического процесса и указаны различные механизмы этого перераспределения, одним из которых является создание страховой организации, берущей на себя обязательство полного или частичного возмещения ущерба из средств, полученных в результате накопления страховых взносов.

Именно эту ситуацию и описывают наиболее употребимые математические модели страховой деятельности: имеется "обособленная"от страхователей страховая организация (страховщик), целью которой является продажа страхового обеспечения. Цены такого обеспечения (страховые взносы) должны удовлетворять условиям, которые можно назвать условиями *умеренности* и *достаточности* и неформально описать следующим образом: страховые взносы должны быть не слишком велики (умеренность), чтобы не отпугивать страхователей (что особенно важно при конкуренции страховщиков), но и не могут быть слишком малы (достаточность), чтобы страховой фонд был достаточен для осуществления необходимых страховых выплат.

Наше пристальное внимание именно к рисковым видам страхования связано с тем, что в российской страховой практике страховые тарифы, не включающие надбавки на собственные расходы страховщика, при страховании жизни совпадают со средними размерами относительных выплат (применяются *чистые* или *рисковые* нетто-ставки; см. (Шахов, 1992), с. 132-133 и 144-145). На практике это приводит (при большом количестве застрахованных) к тому, что вероятность "разорения"страховщика оказывается близкой к $\frac{1}{2}$ (конечно, если учитывать только часть полного взноса, зачисляемую в резерв); в результате оказывается невозможным рассмотрение сколь-нибудь реальных ограничений на вероятность "неразорения", которые являются разумными в рамках изучаемых ниже моделей.

Опишем традиционные модели и задачи теории риска.

Элементарной составляющей риска страховщика обычно считается *индивидуальный иск* (или *страховое требование* (claim)), равный итоговой сумме средств, выплаченных страховщиком по некоторому договору страхования, то есть случайная величина, принимающая нулевое значение, если по данному договору страхования выплат страховщика не состоялось (не произошло страхового события), и отличное от нуля значение, равное сумме всех страховых выплат по договору, если хотя бы одно страховое событие состоялось. Условное значение величины иска при условии, что иск отличен от 0, называется *убытком.*

В существующей литературе по теории риска приводится следующая классификация моделей риска:

Модель индивидуального риска (по терминологии (Cramér, 1955), (Bowers et al, 1986), (Panjer and Willmot, 1992)) или *статическая модель страхования* (по терминологии (Ротарь и Бенинг, 1994)) описывает ситуацию, в которой рассматривается совокупность объектов страхования (страховой портфель), сформированная единовременно, страховые премии собраны в момент формирования портфеля, срок действия всех договоров страхования одинаков, и в течение этого срока происходят страховые события, приводящие к страховым выплатам (искам) (ниже будет приведено несколько более общее определение статической модели);

Модель коллективного риска (по терминологии (Cramér, 1955), (Bowers et al, 1986), (Panjer and Willmot, 1992)) или *динамическая модель страхования* (по терминологии (Ротарь и Бенинг, 1994)), в которой предполагается, что договоры страхования заключаются страховщиком в моменты времени, образующие некоторый случайный процесс, каждый из договоров имеет свою собственную длительность, и в течение времени действия этого договора могут происходить страховые события, приводящие к убыткам страховой компании (страховщика). Такая модель может рассматриваться как на конечном, так и на бесконечном интервале времени. При рассмотрении динамической модели всегда предполагается наличие некоторого начального капитала, выделяемого страховщиком для данного страхового портфеля; мы будем в дальнейшем считать, что и в статической модели, вообще говоря, наличествует некоторый начальный капитал по страховому портфелю.

В связи с этими моделями чаще всего ставятся и решаются две взаимосвязанные задачи:

(i) вычисление распределения суммарного иска, то есть суммы всех выплат (убытков) страховщика (по итогам страховой деятельности по всему страховому портфелю (в рамках индивидуальной модели) или по итогам деятельности в течение некоторого интервала времени (в рамках коллективной модели);

(ii) вычисление (или оценка) страховых премий, обеспечивающих заданную (обычно близкую к 1) *вероятность неразорения* страховщика. Под *разорением* понимается событие, при котором сумма страховых выплат страховщика в некоторый момент времени оказывается больше суммы его начального резерва и суммы собранных страховых премий; под страховой премией всюду ниже понимается только та часть полного взноса страхователя (*брутто-премии*), которая зачисляется в страховой фонд, то есть в фонд, предназначенный для покрытия будущих страховых выплат.

Использованный выше термин *разорение* (*ruin*) и, соответственно, термин *неразорение* не следует понимать буквально, поскольку имеется в виду, конечно, не действительное разорение страховщика, а именно то событие, которое определено выше, причем чаще всего оно рассматривается применительно не ко всей страховой деятельности, а к отдельному виду страхования или к отдельному страховому портфелю.

При вычислении вероятности разорения для модели индивидуального риска (статической модели страхования) достаточно рассмотреть итоговые суммы убытков и страховых премий по всему страховому портфелю. При рассмотрении модели коллективного риска (динамической модели) вероятность разорения можно понимать как минимум в трех смыслах. Во-первых, можно рассматривать вероятность разорения *в данный момент времени*, под которой понимается вероятность того, что в данный момент времени сумма убытков превосходит величину страхового фонда страховщика (то есть суммы начального капитала и собранных к данному моменту страховых премий). Во-вторых, можно рассматривать вероятность разорения на фиксированном *конечном* интервале времени, под которой понимается вероятность того, что в течение рассматриваемого интервала времени сумма убытков хотя бы раз превзойдет величину страхового фонда страховщика. Наконец, в-третьих, можно рассматривать вероятность разорения на *бесконечном* интервале времени, под которой понимается вероятность того, что когда-нибудь сумма убытков превзойдет величину страхового фонда страховщика. Последний случай изучен наиболее глубоко и всесторонне. Именно ему и будет уделено основное внимание при рассмотрении моделей коллективного риска.

3.2 Основные задачи теории индивидуального риска

Модель инивидуального страхового риска (статическая модель страхования) в достаточно общем виде может быть формально описана следующим образом: объектом исследования является распределение случайной величины итогового страхового фонда или остатка средств (surplus) страховой компании по некоторому фиксированному множеству договоров страхования (страховому портфелю)

$$R = r + \sum_{j=1}^{N} Z_j - \sum_{j=1}^{N} Y_j, \qquad (2.2.1)$$

где r – начальный капитал страховщика (страховой компании) по данному страховому портфелю,[1] N – количество договоров страхования (контрактов, полисов), включенных в страховой портфель, Z_j – часть полной страховой премии (“брутто-премии"), зачисляемая в страховой фонд по j-му договору страхования, Y_j – полные (за все время действия договоров) величины выплат страховщика (индивидуальных исков) по всем договорам портфеля (величина иска может принимать нулевое значение). В российской прикладной страховой литературе величина Z_j называется “нетто-премией"(см., например, (Шахов, 1992)). Мы будем называть эту величину просто страховой премией, так как термин “нетто-премия"в теоретической актуарной литературе закреплен за величиной, совпадающей со средним значением иска и в российской страховой литературе носящей название “рисковая премия"(Шахов, 1992).

В данной схеме величины Y_j практически всегда рассматриваются как одинаково распределенные независимые случайные величины, N бывает как детерминированной, так и случайной величиной; Z_j в имеющихся работах всегда считаются неслучайными величинами.

Если предполагается, что формирование страхового портфеля начинается в момент $t = 0$ и существует такой конечный момент времени $t = t_0$, что к этому моменту формирование страхового портфеля заканчивается, то характер процесса заключения (“поступления") договоров страхования на отрезке $[0, t_0]$ при этом не имеет значения для распределения случайной величины R. Отметим, что при такой постановке игнорируется поведение страхового фонда на отрезке $[0, t_0]$. Это имеет смысл, прежде всего, в случае, когда t_0 мало́ по сравнению с временем, к которому завершается действие всех договоров страхования. Возможна трактовка этой постановки, характеризующаяся тем, что страховая компания может получать “краткосрочный"кредит или использовать другие собственные резервы в случае, если в некоторый момент t, $0 \le t \le t_0$, потребуется осуществить страховые выплаты, превышающие накопленный к этому моменту страховой фонд. Наиболее типичная ситуация при статической модели – это случай $t_0 = 0$.

Этой модели в большинстве монографий по актуарной математике уделяется довольно ограниченное место; основное внимание при этом

[1] В дальнейшем для начального капитала мы также будем использовать обозначение S.

обращается на явное вычисление распределения суммарного иска при заданных распределениях индивидуальных исков, а также на простейшие асимптотические формулы.

Отметим некоторые работы, относящиеся к модели индивидуального риска (статической модели страхования). Следует подчеркнуть, что приводимый ниже обзор ни в коем случае не может рассматриваться как полный. Интересующемуся данной тематикой читателю можно рекомендовать обзоры (Ротарь, Бенинг, 1994), (Эмбрехтс, Клюппельберг, 1993), библиографические справки из (Beard, Pentikainen and Pesonen, 1978), (Bowers et al., 1986), (Panjer and Willmot, 1992).

Вопросам имитационного компьютерного моделирования процессов риска в этой модели посвящена работа (Collins, 1962). Метод рекурсивного вычисления распределения суммарного иска предложен в (Panjer, 1981) и усовершенствован в (De Pril, 1986), (De Pril, 1989). Отметим, что во всех этих работах предполагается, что точное распределение индивидуального иска полностью известно.

В (Ротарь, Бенинг, 1994, с. 704–717) статическая модель рассмотрена довольно подробно, но во главу угла там поставлены не описанные выше задачи, связанные, прежде всего, с вероятностью "разорения"страховой компании, а вопросы сравнения рисковых ситуаций, оценивания риска, функций полезности, эмпирических принципов выбора страховых взносов. Эти вопросы, будут рассмотрены в следующей главе.

В некоторых работах (в частности, (Bowers et al., 1986) и др.) содержится критика подхода, связанного с применением тех или иных аппроксимаций для распределения суммарного иска. Главным недостатком "аппроксимационного"подхода считается недостаточная точность соответствующих приближенных формул и отсутствие приемлемых оценок точности аппроксимации. С этим, безусловно, следует согласиться, однако на практике избежать приближенных формул можно только в случае, когда распределения индивидуальных исков точно известны (например, в страховании жизни, когда выплаты практически всегда есть заранее известные величины). К сожалению, полная информация о распределениях исков имеется у исследователя далеко не всегда. Более того, отсутстве такой информации является скорее правилом, чем исключением. Поэтому перейдем к обзору некоторых работ, связанных с аппроксимацией распределения суммарного иска в индивидуальной модели риска.

Вопросы аппроксимации распределения суммарного иска "подходящим"обобщенным пуассоновским распределением рассмотрены в (1986) и развиты в (Čekanavičius, 1995). Однако и в этих работах предполагается знание точного распределения индивидуального иска.

Имеется ряд работ, в которых изучается асимптотика распределения случайной величины R, учитывающая только несколько моментов индивидуального иска, в случае, когда величина N в том или ином смысле считается очень большой. Отметим, что во всех этих работах величины премий Z_j считаются одинаковыми и неслучайными: $Z_j \equiv Z$ для всех j. Обычно при этом решается задача вычисления такой премии Z_0, что выполняется условие $\mathsf{P}\{R \geq 0\} = 1 - \varepsilon$, где ε – заданная малая величина (отметим, что указанная вероятность есть не что иное как вероятность “неразорения"по данному страховому портфелю).

Наиболее простым и “напрашивающимся"подходом является использование нормальной аппроксимации для распределения случайной величины R (точнее, обычно аппроксимируется распределение суммарного иска $\overline{Y} = \sum_{j=1}^{N} Y_j$).

Соответствующие (достаточно простые и вытекающие из центральной предельной теоремы) формулы для ситуации неслучайного N содержатся в (Bowers et al., 1986), (Фалин, 1994) и других работах (пример таких формул можно найти в разделе 4.2 данной книги). В (Bowers et al., 1986, с. 335) отмечается также, что использование нормальной аппроксимации для распределения суммарного иска не является идеальным подходом, поскольку реальное распределение обладает положительной асимметрией, которой нет у нормального распределения. В (Bowers et al., 1986, с. 336–338) данный недостаток предлагается преодолеть с учетом третьих моментов рассматриваемых распределений и использования “сдвинутого"гамма-распределения.

Другой подход к уточнению нормальной аппроксимации предложен в (Beard, Pentikainen and Pesonen, 1978, с. 42–45). В этой монографии предлагается воспользоваться разложением Эджворта–Крамера и при вычислении Z_0 учесть первый член этого разложения распределения случайной величины $\overline{Y}$. Этот подход (названный в (Beard, Pentikainen and Pesonen, 1978) *NP-методом* – “Normal Power Method") представляется с теоретической точки зрения более обоснованным, чем метод из (Bowers et al., 1986), так как при использовании нормальной аппроксимации, уточненной за счет асимптотического разложения, можно определить порядок точности соответствующих оценок (что в несколько более общей, чем в (Beard, Pentikainen and Pesonen, 1978), ситуации будет сделано в данной книге). В то же время аппроксимация с помощью “сдвинутого"гамма-распределения (Bowers et al., 1986) имеет эмпирический характер, так как не “поддерживается"соответствующими теоретико-вероятностными результатами. В (Beard, Pentikainen and Pesonen, 1978, с. 46–51) проведено сравнение различных методов аппроксимации распределения случайной величины $\overline{Y}$. Отмечается, что надежность нормальной аппроксимации низка в том случае, когда распределение индивидуального иска Y_j имеет медленно убывающий хвост; NP-метод дает гораздо лучшие результаты, и авторы указанной работы рекомендуют, как правило, использовать этот подход (естественно, в том случае, когда третий момент случайных величин Y_j "доступен", то есть может быть эффективно оценен).

3.3 Основные задачи теории коллективного риска

Под процессом риска мы будем понимать процесс изменения капитала, принадлежащего страховой компании. Этот капитал изменяется вследствие двух причин: он увеличивается благодаря поступлению взносов от клиентов (страховых премий) и уменьшается из-за страховых выплат. Как правило (хотя не всегда), для чисто аналитического удобства рассматриваются математические модели изменения капитала, в которых страховые премии описываются детерминированной (неслучайной) функцией времени. Однако процесс страховых выплат всегда считается случайным. Таким образом, сам процесс риска является стохастическим.

Основной целью изучения процессов риска как математических моделей функционирования страховых компаний является оптимизация параметров деятельности страховых компаний таких, как, например, страховые тарифы (ставки страховых премий) и/или страховые выплаты. При принятии соответствующих решений можно руководствоваться различными критериями оптимальности. Например, можно, принимая во внимание стохастичность процесса риска, определить вероятностное распределение суммарных страховых выплат за рассматриваемый промежуток времени и, зная это распределение, вычислить размер страховых премий, гарантирующий желаемый объем резерва с требуемым уровнем достоверности. Как правило, такие задачи, связанные с распределением суммарных страховых выплат (total claim size), решаются методами предельных теорем теории вероятностей, включающими как собственно предельные теоремы, так и теорию больших уклонений.

Другим широко распространенным критерием оптимальности функционирования страховой компании является *вероятность разорения*, под которой понимается вероятность того, что процесс риска опустится ниже некоторого уровня в течение определенного промежутка времени (конечного иди бесконечного). Задачи, связанные с изучением вероятности разорения представляют еще одно важное направление в теории коллективного риска. Более того, как правило, задачи, связанные с распределением суммарных страховых выплат, решаются теми же методами, что и задачи теории индивидуального риска. Поэтому именно задачи, связанные с изучением вероятности разорения, дают основания говорить о математической теории коллективного риска как о самостоятельном направлении страховой математики.

Вероятность разорения рассматривается как функция основных параметров процесса риска. Одним из признанных основоположников теории коллективного риска является шведский математик Ф. Лундберг. Именно в его работах (Lundberg, 1903), (Lundberg, 1926) были поставлены задачи об отыскании вероятности разорения и приведены первые оценки этой вероятности, в частности, знаменитое ныне *неравенство Лундберга* (см. ниже). Однако его работы не содержали четких математических формулировок и были довольно трудны для однозначного восприятия. Поэтому возникновение математической теории коллективного риска обычно связывают с именем выдающегося шведского математика Г. Краме́ра, в работах которого (Cramér, 1930), (Cramér, 1955) было начато систематическое изучение вероятности разорения. Его классические результаты, описывающие поведение вероятности разорения в зависимости от величины начального капитала, вошли во многие учебники по теории вероятностей. Эти результаты стали основой для целого направления асимптотической теории риска, рассматривающей поведение вероятности разорения при неограниченно возрастающем начальном капитале. Эта проблематика остается очень популярной и в настоящее время. Возникающие здесь задачи интересны с математической точки зрения и требуют разработки новых методов исследования. Достаточно заметить, что даже при анализе классических моделей были использованы такие математические средства как факторизация Винера–Хопфа, тождество Спицера, теория мартингалов, теория марковских процессов и теория случайных блужданий. Для создания и изучения более гибких и реалистичных моделей необходимо как учитывать новые факторы (инфляция, перестрахование и т. п.), так и привлекать все новые и новые методы и подходы. При этом выявляются и новые закономерности. Например, необходимость учитывать возможность больших выплат приводит к рассмотрению ситуации, когда распределения страховых требований (выплат) имеют “тяжелые хвосты", а это, в свою очередь, ведет к тому, что асимптотика вероятности разорения при неограниченно растущем начальном капитале приобретает совершенно иной характер, нежели в классической ситуации, в которой выполнено так называемое условие Кра́мера–Лундберга, заключающееся в существовании экспоненциальных моментов у распределений страховых требований.

Для подавляющего большинства моделей отсутствуют явные замкнутые формулы для вероятности разорения. Это приводит к необходимости построения различных аппроксимаций. Всевозможные аппроксимации можно условно разделить на несколько групп. Первую из них составляют формулы, приближающие вероятность разорения с помощью асимптотических выражений. Здесь, в свою очередь, можно выделить асимптотические аппроксимации при неограниченно растущем начальном капитале, примером которых служит знаменитая формула Кра́мера–Лундберга (см. ниже), асимптотические аппроксимации при малой нагрузке безопасности (основы последнего из упомянутых подходов заложены В. В. Калашниковым (Kalashnikov, 1997)). Еще один класс асимптотических аппроксимаций составляют приближения, основанные на функциональных предельных теоремах, например, так называемая диффузионная аппроксимация. Помимо асимптотических аппроксимаций, можно выделить приближения типа эвристической формулы Де Вилдера, см, например, (De Vylder, 1978), (Grandell, 1991). Однако для большинства асимптотических аппроксимаций отсутствуют разумные оценки их точности. Более того, многочисленные примеры показывают, что иногда такие аппроксимации имеют очень большие относительные погрешности. В связи с этим возрастает важность построения двусторонних оценок для вероятности разорения. Такие оценки были впервые получены Г.-Й. Россбергом и Г. Зигелем (Rossberg and Siegel, 1974) для крамеровского случая и В. В. Калашниковым и его коллегами (Калашников и Константинидис, 1996), (Kalashnikov, 1997), (Калашников и Цициашвили, 1998) для случая тяжелых хвостов. При получении приближенных значений вероятности разорения также довольно часто используется компьютерная симуляция. При этом возникают нетривиальные вычислительные и математические задачи. Например, стандартные процедуры математической статистики здесь оказываются неэффективными или вовсе неприменимыми, поскольку они имеют асимптотический характер, а асимптотика рассматривается по объему выборки, в то время как разорение является редким событием (с очень маленькой вероятностью).

Глава 4

Сравнение рисковых ситуаций и простейшие методы расчета страховых тарифов

4.1 Рисковые ситуации в страховании

Рассмотрим некоторую страховую организацию (компанию), выпустившую и продавшую n страховых полисов. Пусть *резервный капитал (начальный капитал)* компании равен S. Предположим, что каждый страховой контракт влечет за собой страховые выплаты клиентам, которые являются независимыми случайными величинами. Обозначим случайную величину выплат i-му клиенту через X_i, а ее функцию распределения – $F_i(x)$.

Вообще говоря, возможны ситуации, когда случайные величины X_i могут принимать и отрицательные значения, однако мы будем считать случайные величины X_i неотрицательными.

Общие страховые выплаты, порожденные данным набором страховых полисов, имеют вид

$$X = X_1 + \cdots + X_n.$$

Обозначим функцию распределения случайной величины X через

$$F(x) = \mathsf{P}(X < x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Эту функцию часто называют *распределением риска* страховой компании.

Предположим, что случайная величина X имеет конечное математическое ожидание, которое мы будем обозначать

$$\mu = \mathsf{E}X.$$

Если страховая компания продает полисы по цене

$$\mu_n = \frac{\mu}{n},$$

то средняя прибыль компании раняется нулю. Число μ_n называется также *чистой ценой* (или *рисковой премией*) и, в случае равенства реальной цены страховых полисов числу μ_n, говорят о действии *принципа эквивалентности.* В реальной деятельности, конечно, страховые компании помимо μ_n, включают в цену страховых полисов дополнительную величину, называемую *нагрузкой*, которая учитывает флуктуации выплат, затраты страховой компании на сам процесс страхования с приемлемым для компании уровнем прибыльности и т.п.[1] В развитых странах выбор нагрузки в определенной степени регламентируется действующим законодательством.

Обозначим через ν_i нагрузку (рисковую надбавку), соответствующую i-му полису. Окончательно, перед началом страховых выплат страховая компания имеет капитал

$$S + \sum_{i=1}^{n} \nu_i + \mu \equiv R + \mu.$$

Величина R называется *свободным резервом.*

Таким образом, *рисковая ситуация* страховой компании характеризуется двумя элементами: R и $F(x)$, то есть парой $(R, F(x))$. Здесь можно выделить две проблемы:

1. Страховая компания так должна определить свою политику и нагрузку, чтобы риск был в том или ином смысле “минимальным” или, по словам Крамéра, отклонения от оптимальной политики причиняли как можно меньше неудобств.

2. Страховая компания должна проанализировать данную рисковую ситуацию и попытаться ее “оптимизировать” с помощью некоторых механизмов *перестрахования.*

Пусть

$$Y = R + \mu - X,$$

[1] В России *нагрузкой* называется часть цены полиса, покрывающая затраты страховой компании и приносящая ей доход. Упомянутая в тексте дополнительная величина складывается из понимаемой в указанном выше смысле нагрузки и рисковой надбавки.

тогда случайная величина Y представляет собой *конечный капитал* страховой компании. Обозначим через $G(y)$ функцию распределения случайной величины Y, то есть

$$G(y) = \mathsf{P}(Y < y).$$

Тогда при $R + \mu \leq y$

$$G(y) \equiv 1,$$

а при $R + \mu > y$

$$G(y) = 1 - F((R + \mu - y) + 0).$$

Таким образом, между функциями распределения $G(y)$ и рисковыми ситуациями $(R, F(x))$ устанавливается взаимно однозначное соответствие, и мы можем вместо всех рисковых ситуаций страховой компании рассматривать множество вероятностных распределений, им соответствующих. Далее в этом разделе мы кратко остановимся на некоторых принципах теории сравнения вероятностных распределений. Более полный материал содержится, например, в книгах (Де Гроот, 1974), (Штойян, 1979) и (Булинская, 2001).

4.2 Сравнение рисковых ситуаций

Перед тем как говорить о методах сравнения рисков или рисковых ситуаций, мы вспомним, что говорилось в предисловии к данной книге о том, что мы подразумеваем под словом "риск". *Риском* мы назвали совокупность значения возможного ущерба в некоторой стохастической ситуации и его вероятности. В качестве математической конкретизации этого "определения" рисков мы договорились использовать, в зависимости от особенностей рассматриваемой задачи, *случайные величины* (если имеется возможность описать единое вероятностное пространство, на котором определены эти случайные величины, характеризующие риски) или *функции распределения* (если риски отождествляются со случайными величинами, заданными на разных вероятностных пространствах).

Следовательно, задачу сравнения рисков (с целью выбора "наименее рискованной" и/или более выгодной стратегии поведения в условиях стохастической неопределенности, типичной для страхования) мы естественным образом можем свести к задаче сравнения случайных величин и/или их распределений. Принципиальной особенностью же как задачи сравнения случайных величин так и задачи сравнения распределений является то, что в отличие от вещественных чисел, как случайные величины, так и их распределения могут быть *несравнимыми*, будучи *функциями* (случайные величины – функциями элементарного исхода, функции распределения – вещественного аргумента, то есть значения возможного ущерба). Однако для решения конкретных практических задач уметь сравнивать риски необходимо.

Средства для сравнения рисков предоставляет теория сравнения случайных величин и соответствующих им вероятностных распределений.

В теории сравнения вероятностных распределений предполагается, что решения, принимаемые людьми в тех или иных ситуациях, определяются полностью, или хотя бы частично, *предпочтениями*, заданными на множестве вероятностных распределений величин возможного ущерба (или дохода).

Рассмотрим некоторую страховую компанию и будем символами $x, y, \ldots$, в зависимости от ситуации обозначать ее доходы или потери (неслучайные). Естественное упорядочение множества вещественных чисел $\leq$ задаёт отношение предпочтения $\preceq$ на множестве доходов страховой компании:

$$x \preceq y \Longleftrightarrow x \leq y, \tag{4.2.1}$$

доход y "не хуже" или "предпочтительнее" дохода x, если y не меньше x.

Однако, на практике доходы или потери страховой компании обычно описываются случайными величинами $X, Y, \ldots$. Возникает вопрос: что означает, или как понимать

$$X \preceq Y,$$

то есть, как понимать, что *случайный* доход Y "предпочтительнее" *случайного* дохода X?

Нередко используется следующий, кажущийся вполне естественным подход

$$X \preceq Y \Longleftrightarrow \mathsf{E}X \leq \mathsf{E}Y, \tag{4.2.2}$$

то есть случайный доход Y "предпочтительнее" X, если математическое ожидание Y не меньше математического ожидания X.

Весьма правдоподобная мотивировка подхода (4.2.2) основана на законе больших чисел и состоит в следующем. Пусть страховая компания на протяжении длительного время занимается страхованием однотипных рисков и пусть случайная величина X описывает случайный доход от страхования этого риска. Как в этой ситуации, хотя бы грубо, получить число, характеризущее случайную величину этого дохода? Если страховая компания за длительное время обслужила большое число n однотипных и независимых клиентов (или если портфель страховой компании содержит большое число n однотипных и независимых контрактов), то у неё имеется n независимых случайных величин $X_1, \dots, X_n$, описывающих случайные доходы страховой компании и распределённых так же, как и случайная величина X. Тогда средний доход страховой компании от одного контракта за это время (или при работе с упомянутым портфелем) имеет вид

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n},$$

который в силу закона больших чисел в определенном смысле близок к математическому ожиданию $\mathsf{E}X$ случайной величины X (см. раздел 1.5). Поэтому естественно сравнивать случайные доходы по их математическим ожиданиям, что и оправдывает подход (4.2.2).

Заметим, что точно такой же формальный подход может быть применен к определению более или менее предпочтительную рисковую ситуацию с точки зрения клиента страховой компании.

Однако подход (4.2.2) далеко не безупречен. Чтобы пояснить это приведём пример, известный как *петербургский парадокс*, показывающий, что подход (4.2.2) может, вообще говоря, приводить к абсурдным результатам.

Рассмотрим выбор более или менее предпочтительной рисковой ситуации клиентом страховой компании. Предположим, что клиент оказался в следующей ситуации. Ему предлагают либо принять участие в игре, описываемой случайной величиной X вида

$$\mathsf{P}(X = 2^k) = \frac{1}{2^k}, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{4.2.3}$$

то есть клиент с вероятностью 2^{-k} получает 2^k, например, долларов, либо ему выплачивают некоторую фиксированную сумму денег y. Спрашивается, на какую фиксированную сумму согласится клиент, чтобы не участвовать в описанной игре, не связываясь с проявлением случайности? Ясно, что практически для каждого разумного человека такая величина существует и конечна. Посмотрим, к чему же приводит здесь подход (4.2.2). Таким образом, мы ищем вырожденную случайную величину Y

$$\mathsf{P}(Y = y) = 1$$

такую, что

$$X \preceq Y \quad \text{или} \quad X \preceq y.$$

Если принять подход (4.2.2), то последнее соотношение эквивалентно тому, что

$$\mathsf{E}X \le \mathsf{E}Y = y, \tag{4.2.4}$$

но

$$\mathsf{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty,$$

то есть неравенство (4.2.4) не выполняется ни при каком конечном y. Но это явно противоречит реальности, поскольку, как мы отметили выше, любой здравомыслящий человек всегда готов получить некую конечную сумму (возможно большую) вместо участия в стохастической игре (4.2.3).

Вместо подхода (4.2.2) к упорядочиванию рисковых ситуаций (то есть случайных величин и/или вероятностных распределений) используются также некоторые другие, подходы, которым посвящены следующие разделы.

Задача сравнения или упорядочивания рисков формально сводится к введению на множестве случайных величин или множестве функций распределения отношения (частичного) порядка. Напомним некоторые формальные определения[2].

Множество X, состоящее из каких угодно элементов, называется *частично упорядоченным*, если в нем установлено *отношение частичного порядка*, то есть для некоторых пар x_1, x_2 его (различных) элементов известно, что один из них предшествует другому, например, x_1 предшествует x_2, что записывается как $x_1 \preceq x_2$ или $x_2 \succeq x_1$.

Если в частично упорядоченном множестве X отношение порядка установлено *для любых* двух различных элементов, то есть для любых двух различных элементов x_1, x_2 верно одно и только одно из двух отношений $x_1 \preceq x_2$ или $x_1 \succeq x_2$, то такое частично упорядоченное множество X называется *вполне упорядоченным*.

Перечислим некоторые наиболее естественные отношения (частичного) порядка на множестве случайных величин.

Порядок "почти наверное" или "с вероятностью единица"

Обозначим соответствующее отношение символом $\preceq_{as}$. Тогда по определению запись $X \preceq_{as} Y$ означает, что $\mathsf{P}(X \leq Y) = 1$. Ясно, что далеко не все случайные величины можно упорядочить с помощью такого отношения. Таким образом, порядок "почти наверное" является частичным.

---

[2] П. С. Александров. *Введение в теорию множеств и общую топологию.* "Наука", Москва, 1977.

Стохастический порядок

Случайная величина X по определению *стохастически* не превосходит случайной величины Y (мы будем обозначать это символом $X \preceq_{st} Y$), если для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\mathsf{P}(X < x) \geq \mathsf{P}(Y < x).$$

Довольно очевидна импликация $X \preceq_{as} Y \Longrightarrow X \preceq_{st} Y$, то есть, если случайная величина X почти наверное не превосходит случайной величины Y, то X не превосходит Y и стохастически.

В отличие от порядка "почти наверное", стохастический порядок позволяет сравнивать случайные величины, изначально заданные на разных вероятностных пространствах. Более того, если $X \preceq_{st} Y$, то найдутся вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ и заданные на нем случайные величины X' и Y' такие, что $X' \stackrel{d}{=} X$, $Y' \stackrel{d}{=} Y$ и $X' \preceq_{as} Y'$ (см., например, (Булинская, 2001)).

Можно показать, что $X \preceq_{st} Y$ тогда и только тогда, когда

$$\mathsf{E}f(X) \leq \mathsf{E}f(Y)$$

для всех монотонно неубывающих функций, для которых соответствующие интегралы существуют.

Отсюда, в частности, вытекает, что, если $X \preceq_{st} Y$ и математические ожидания $\mathsf{E}X$ и $\mathsf{E}Y$ существуют, то $\mathsf{E}X \leq \mathsf{E}Y$.

Если X и Y – дискретные случайные величины, причем существует число c такое, что $\mathsf{P}(X = x) \geq \mathsf{P}(Y = x)$ для $x < c$ и $\mathsf{P}(X = x) \leq \mathsf{P}(Y = x)$ для $x > c$. Тогда $X \preceq_{st} Y$. Аналогично, если X и Y – абсолютно непрерывные случайные величины с плотностями $p_X(x)$ и $p_Y(x)$, соответственно, причем существует число c такое, что $p_X(x) \geq p_Y(x)$ для $x < c$ и $p_X(x) \leq p_Y(x)$ для $x > c$. Тогда $X \preceq_{st} Y$ (см., например, (Булинская, 2001).

Порядок стоп-лосс (стохастический порядок второй степени)

Для произвольного действительного числа y обозначим $y^+ = \max\{y, 0\}$.

Говорят, что случайная величина X не превосходит случайной величины Y в смысле порядка стоп-лосс, и обозначают это $X \preceq_{s-l} Y$, если для любого $d \geq 0$ выполнено неравенство $\mathsf{E}(X-d)^+ \leq \mathsf{E}(Y-d)^+$.

Так как для любой случайной величины X

$$\mathsf{E}(X-d)^+ = \int\limits_d^\infty (x-d)dF_X(x) = \int\limits_d^\infty (1 - F_X(x))dx$$

(в этом легко убедиться, интегрируя по частям), то отношение $X \preceq_{s-l} Y$ эквивалентно тому, что для любого $d > 0$

$$\int\limits_d^\infty (1 - F_X(x))dx \leq \int\limits_d^\infty (1 - F_Y(x))dx,$$

где $F_X(x)$ и $F_Y(x)$ – функции распределения случайных величин X и Y соответственно. Таким образом, риски (случайные величины), распределения которых имеют более легкие хвосты, предпочтительнее в смысле порядка стоп-лосс. При этом из соотношения (1.3.3) мы получаем, что если X и Y – неотрицательные случайные величины, то из $X \preceq_{s-l} Y$ вытекает, что $\mathsf{E}X \leq \mathsf{E}Y$ в предположении, что эти математические ожидания существуют.

Отношение $X \preceq_{s-l} Y$ эквивалентно тому, что для любого $d > 0$

$$\mathsf{E}\max\{d, X\} \leq \mathsf{E}\max\{d, Y\}.$$

Справедливы следующие результаты.

Утверждение 4.2.1. *Пусть $X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что целочисленные неотрицательные случайные величины N и M таковы, что случайная величины N независима от последовательности $X_1, X_2, \ldots$, а случайная величины M независима от последовательности $Y_1, Y_2, \ldots$, причем $N \preceq_{s-l} M$. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{N} X_j \ \preceq_{s-l} \ \sum_{j=1}^{M} Y_j.$$

Доказательство см. в (Булинская, 2001).

Пусть Λ – положительная случайная величина. Распределение целочисленной случайной величины N, задаваемое соотношениями

$$\mathsf{P}(N = k) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}d\mathsf{P}(\Lambda < \lambda), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

называется *смешанным пуассоновским* (см. разделы 2.2 и 7.6). При этом случайная величина Λ называется *структурной*. Примеры смешанных пуассоновских случайных величин приведены в разделе 7.6. В частности, там показано, что отрицательное биномиальное распределение является смешанным пуассоновским (ему соответствует гамма-распределенная структурная случайная величина)

Утверждение 4.2.2. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что целочисленные неотрицательные случайные величины N и M имеют смешанные пуассоновские распределения со структурными случайными величинами Λ_N и Λ_M соответственно, причем N и M независимы от последовательности $X_1, X_2, \ldots$. Предположим, что $\Lambda_N \preceq_{s-l} \Lambda_M$. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{N} X_j \ \preceq_{s-l} \ \sum_{j=1}^{M} X_j.$$

Доказательство см. в (Булинская, 2001).

Можно показать, что если N_1, N_2 и N_3 – случайные величины соответственно с биномиальным, пуассоновским и отрицательным биномиальным распределениями, причем $\mathsf{E}N_1 = \mathsf{E}N_2 = \mathsf{E}N_3$, то

$$N_1 \preceq_{s-l} N_2 \preceq_{s-l} N_3$$

(см., например, (Булинская, 2001)). Таким образом, на основании утверждения 4.2.1 мы можем заключить, что в смысле порядка стоп-лосс портфель, содержащий случайное число N однородных контрактов, в котором N имеет биномиальное распределение, менее рискован, нежели аналогичный портфель с пуассоновски распределенным числом контрактов, который, в свою очередь, менее рискован, чем аналогичный портфель с отрицательно биномиально распределенным числом контрактов.

Эти и другие способы упорядочения рисков и их свойства подробно перечислены в книге (Булинская, 2001).

4.3 Функции полезности

Еще один из возможных способов разрешения петербургского парадокса и, соответственно, определения отношения (более) полного порядка на множестве случайных величин состоит, например, в изменении соотношения (4.2.2), точнее его правой части.

Рассмотрим общепринятый (по крайней мере в зарубежной литературе, см., например, (Фон Нейман и Моргенштерн, 1970), (Де Гроот 1974), (Фишберн 1978)) подход, основанный на предположении, что страховая компания или ее клиент выбирают более или менее предпочтительную для них рисковую ситуацию в соответствии с имеющимися у них *функциями полезности* (utility functions).

Пусть, к примеру, клиент страховой компании упорядочивает свои случайные риски в соответствии с функцией полезности $u(x)$, действуя по правилу (см. (4.2.2))

$$X \preceq Y \Longleftrightarrow \mathsf{E}u(X) \le \mathsf{E}u(Y), \tag{4.3.1}$$

то есть случайный доход Y считается более “предпочтительным”, нежели случайный доход X, если его средняя полезность $\mathsf{E}u(Y)$ не меньше средней полезности $\mathsf{E}u(X)$ дохода X. При этом, естественно, X и Y эквивалентны, если эти средние полезности равны:

$$X \sim Y \Longleftrightarrow \mathsf{E}u(X) = \mathsf{E}u(Y). \tag{4.3.2}$$

Трактуя числа $x, y, \ldots$ как вырожденные случайные величины $X, Y, \ldots$, из (4.2.1) мы немедленно получаем, что

$$X \preceq Y \Longleftrightarrow x \le y \Longleftrightarrow \mathsf{E}u(X) \le \mathsf{E}u(Y) \Longleftrightarrow u(x) \le u(y),$$

то есть естественное требование к функции полезности – её неубывание. Отметим, кстати, здесь, что функция полезности $u(x)$ не обязана быть неотрицательной.

Перечислим типы обычно используемых аналитических моделей функций полезности. Во-первых, это – *линейная* функция полезности

$$u(x) = ax + b, \qquad a > 0.$$

Однако теория линейной полезности не всегда реалистична. А именно, в большинстве ситуаций “полезность” или “удовлетворение, испытываемое индивидуумом” от детерминированного дохода x возрастает не пропорционально x, но его можно измерить некоторой нелинейной функцией $u(x)$. Так, индивидуум с капиталом в один миллион долларов вряд ли испытывает то же удовлетворение от дополнительного дохода в один доллар, что и индивидуум с капиталом в один доллар. Если, например, предполагать, что приращение полезности пропорционально не абсолютному, а относительному изменению дохода, то есть

$$du(x) = \frac{kdx}{x},$$

то

$$u(x) = k\log(x) + \mathrm{const}.$$

Наряду с упомянутыми также используются функции полезности вида

$$u(x) = x^{\alpha}, \;\; x \ge 0, \; \alpha > 0; \qquad u(x) = -e^{e^{-x}}.$$

Заметим, что из соотношения (4.3.1) следует, что если $u(x)$ – функция полезности, то для любых $a > 0$ и b функция

$$au(x) + b$$

также является функцией полезности, то есть функция полезности определена с точностью до линейного преобразования. Этим фактом мы воспользуемся при описании эмпирического алгоритма построения функции полезности.

Отметим также здесь, что при описании петербургского парадокса неявно предполагалось (см. (4.2.2)), что для клиента функция полезности имеет вид $u(x) = ax + b$, $a > 0$. Естественное разрешение петербургского парадокса состоит в изменении функции полезности. Так, например, если считать, что функция полезности – логарифмическая, то есть $u(x) = \log x$, то никакого парадокса не наблюдается, так как в этом случае имеем

$$\mathsf{E}X = \log 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{2^k} = 2 \log 2,$$

и в рамках такой модели вместо участия в игре (4.2.3) клиент готов получить величину $y \geq 2 \log 2$.

Выше было отмечено, что возрастание функции полезности является естественным требованием. При этом характер роста функции полезности характеризует отношение клиента к риску. Для пояснения этого факта напомним хорошо известное неравенство Иенсена. Если функция полезности $u(x)$ выпукла вниз, то есть для любых $x_1 x_2, \alpha \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$u(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) \leq \alpha u(x_1) + (1 - a) u(x_2),$$

то справедливо неравенство Иенсена (доказательства см., например, (Де Гроот, 1974), стр. 103)

$$\mathsf{E}u(X) \geq u(\mathsf{E}X); \tag{4.3.3}$$

если же функция полезности вогнута (выпукла вверх), то

$$\mathsf{E}u(X) \leq u(\mathsf{E}X). \tag{4.3.4}$$

Пусть клиент страховой компании обладает функцией полезности $u(x)$, которая вогнута (выпукла вверх), и ему предлагают принять участие в игре со случайным доходом X. Тогда неравенство (4.3.4) показывает, что

$$X \preceq \mathsf{E}X,$$

то есть клиенту всегда лучше получить неслучайную величину $\mathsf{E}X$ вместо участия в этой игре со случайным выйгрышем X, и, значит, здесь наблюдается нежелание клиента участвовать в рисковых ситуациях (risk averse).

Если же клиент имеет функцию полезности, выпуклую вниз, то аналогично предыдущему с использованием неравенства (4.3.3), имеем

$$X \succeq \mathsf{E}X, \tag{4.3.5}$$

то есть в клиенту с такой функцией полезности всегда лучше вместо получения неслучайной суммы $\mathsf{E}X$ участвовать в игре со случайным выйгрышем X и, значит, здесь имеется тенденция клиента к рисковым ситуациям (risk lover).

По-видимому, в общем случае функция полезности $u(x)$ должна

1) в зоне умеренных доходов быть близкой к линейной;

2) в зоне больших доходов быть существенно "пологой" (эффект насыщения);

3) в зоне большого ущерба резко возрастать по абсолютной величине, а затем, возможно, переходить в почти постоянную функцию, что побуждает к уменьшению вероятности срыва, разорения (и что означает, в частности, отказ от ориентации на среднее значение).

Рассмотрим теперь простейшие модели страхования, использующие функции полезности.

4.4 Страхование с точки зрения клиента

Предположим, что клиент страховой компании имеет функцию полезности $u(x)$, которая описывает его отношение к доходам и начальный капитал S. Пусть клиент страдает от случайных потерь X, за предотвращение которых он готов застраховаться у страховой компании. Пусть клиент готов заплатить страховой компании страховой взнос G. Это означает, что для клиента выполнено соотношение

$$S - X \preceq S - G.$$

В рамках подхода (4.3.1) это означает, что

$$\mathsf{E}u(S - X) \leq u(S - G). \tag{4.4.1}$$

Считая функцию полезности $u(x)$ непрерывной, из правой части соотношения (4.4.1) мы получаем, что существует максимальное $G = G_{max}$ такое, что

$$\mathsf{E}u(S - X) = u(S - G_{max}) \tag{4.4.2}$$

и при любом

$$G \leq G_{max} \tag{4.4.3}$$

клиент готов участвовать в страховании.

Отметим здесь, что возможна следующая модификация этой модели. Клиент платит величину G за частичное предотвращение потерь, описываемое функцией $I(X) \leq X$, которую клиенту предлагает страховая компания. В этом случае имеем соотношения

$$\mathsf{E}u(S - X) \leq \mathsf{E}(S - G - I(X))$$

и G_{max} такое, что

$$\mathsf{E}u(S - X) = \mathsf{E}(S - G - I(X)).$$

Отметим также здесь, что если функция полезности клиента $u(x)$ выпукла вверх, то соотношения (4.3.4) и (4.4.2) приводят к неравенствам

$$u(S - G_{max}) = \mathsf{E}u(S - X) \leq u(S - \mathsf{E}X). \tag{4.4.4}$$

Так как функция полезности $u(x)$ монотонно возрастает, то из неравенства (4.4.4) следует, что (здесь нужна строгая монотонность)

$$\mathsf{E}X \leq G_{max}. \tag{4.4.5}$$

Аналогично, если функция полезности клиента $u(x)$ выпукла вниз, то

$$\mathsf{E}X \geq G_{max}. \tag{4.4.6}$$

4.5 Страхование со стороны страховой компании

Рассмотрим теперь страхование с точки зрения страховой компании. Пусть страховая компания имеет начальный капитал S_I, функцию полезности $u_I(x)$ и готова страховать случайные потери клиента X. Обозначим через H_I цену страхового полиса, который страховая компания предлагает клиенту за предотвращение случайных потерь X.

Со стороны страховой компании страхование имеет смысл, если

$$S_I \preceq S_I - X + H_I,$$

или (см. (4.3.1)) если

$$u_I(S_I) \leq \mathsf{E}u_I(S_I - X + H_I). \tag{4.5.1}$$

Считая функцию полезности $u_I(x)$ непрерывной, из неравенства (4.5.1) мы получаем, что существует минимальное значение цены страхового полиса H_I^{min} такое, что

$$u_I(S_I) = \mathsf{E}u_I(S_I - X + H_I^{min}), \tag{4.5.2}$$

и страхование для страховой компании возможно, если

$$H_I \geq H_I^{min}. \tag{4.5.3}$$

Аналогично предыдущему, предполагая, что функция полезности страховой компании $u_I(x)$ выпукла вверх, из соотношений (4.3.4) и (4.5.2) имеем неравенства

$$u_I(S_I) = \mathsf{E}u_I(S_I - X + H_I^{min}) \leq u(S_I - \mathsf{E}X + H_I^{min}). \tag{4.5.4}$$

Так как функция полезности $u_I(x)$ монотонно возрастает, то из неравенства (4.5.4) следует, что

$$\mathsf{E}X \leq H_I^{min}. \tag{4.5.5}$$

Аналогично, если функция полезности страховой фирмы $u_I(x)$ выпукла вниз, то

$$\mathsf{E}X \geq H_I^{min}. \tag{4.5.6}$$

Теперь, рассматривая страхование как со стороны клиента страховой компании, так и со стороны самой страховой компании, получаем (см. соотношения (4.4.3) и (4.5.3)), что страхование возможно, если

$$G_{max} \geq H_I^{min}. \tag{4.5.7}$$

Такая ситуация вполне возможна. Так, например, из неравенств (4.4.5) и (4.5.6) следует неравенство (4.5.7), то есть страхование возможно, если функция полезности клиента страховой компании $u(X)$ выпукла вверх, а функция полезности самой страховой компании $u_I(X)$ выпукла вниз. Аналогично, из неравенств (4.4.6) и (4.5.5) следует, что страхование возможно только в случае

$$G_{max} = H_I^{min}. \tag{4.5.8}$$

4.6 Эмпирическое определение функции полезности

Рассмотрим теперь задачу определения функции полезности клиента страховой компании. С очевидными изменениями этом алгоритм применим и к построению функции полезности страховой компании. Мы приведём здесь простейший метод, допускающий модификации, и позволяющий в принципе (например, с помощью компьютера) сколь угодно точно построить эту функцию полезности на произвольном интервале изменения возможных доходов клиента.

Итак, пусть клиент страховой фирмы обладает неизвестной функцией полезности $u(X)$ (отметим, что здесь мы предполагаем, что у клиента такая функция существует хотя на самом деле её существование, вообще говоря, ниоткуда не следует). Для её приближённого определения необходимо иметь возможность наблюдать за поведением клиента в различных рисковых ситуациях или искусственно создавать их и следить за его поведением. Пусть мы хотим приближённо построить функцию полезности $u(X)$ на отрезке $[0, S]$, $S > 0$. Поскольку функция полезности $u(X)$ определена с точностью до линейного преобразования, то её можно нормировать в точках 0 и S, то есть можно подобрать числа $a > 0$ и b так, чтобы

$$\begin{cases} au(0) + b = 0 \\ au(S) + b = 1, \end{cases}$$

то есть

$$a = \frac{1}{u(S) - u(0)} > 0, \qquad b = \frac{u(0)}{u(0) - u(S)}.$$

Таким образом, мы можем с самого начала предполагать, что

$$u(0) = 0 \quad \text{и} \quad u(S) = 1. \tag{4.6.1}$$

Предположим, что клиенту предлагают на первом шаге "купить лотерейный билет" (так мы называет рисковую ситуацию или случайную величину) вида X_1

$$\mathsf{P}(X_1 = 0) = p_1, \qquad \mathsf{P}(X_1 = S) = 1 - p_1, \quad p_1 \in (0, 1),$$

то есть с известной для нас вероятностью p_1, которая является параметром, выбираемым нами, по лотерейному билету выгрыш равен нулю, а с вероятностью $1 - p_1$ выгрыш равен S. Предположим, что клиент сообщает, что за обладание этим билетом он готов заплатить величину x_1. Это означает, что для него выполнена эквивалентность

$$X_1 \sim x_1$$

или в рамках нашей модели (см. (4.3.2))

$$\mathsf{E}u(X_1) = u(0)p_1 + u(S)(1 - p_1) = u(x_1),$$

поэтому с учётом формул (4.6.1), имеем

$$u(x_1) = 1 - p_1. \tag{4.6.2}$$

Таким образом на первом шаге определено значение $u(x_1)$.

На втором шаге клиенту предлагают “купить лотерейный билет” вида X_2

$$\mathsf{P}(X_2 = 0) = p_2, \quad \mathsf{P}(X_2 = x_1) = 1 - p_2, \quad p_2 \in (0, 1),$$

то есть с известной для нас вероятностью p_2, которая является параметром, выбираемым нами, по лотерейному билету выгрыш равен нулю, а с вероятностью $1 - p_2$ выгрыш равен x_1. Пусть клиент за обладание этим билетом готов заплатить величину x_2. Это означает, что для него выполнена эквивалентность

$$X_2 \sim x_2$$

или

$$\mathsf{E}u(X_2) = u(0)p_2 + u(x_1)(1 - p_2) = u(x_2),$$

поэтому с учётом формул (4.6.1) и (4.6.2), имеем

$$u(x_2) = (1 - p_1)(1 - p_2). \tag{4.6.3}$$

Таким образом, на втором шаге определено значение $u(x_2)$.

На следующих шагах клиенту следует предложить “лотерейные билеты” вида X_3, X_4

$$\mathsf{P}(X_3 = x_1) = p_3, \quad \mathsf{P}(X_3 = x_2) = 1 - p_3, \quad p_3 \in (0, 1);$$

$$\mathsf{P}(X_4 = x_1) = p_4, \quad \mathsf{P}(X_4 = S) = 1 - p_4, \quad p_4 \in (0, 1)$$

и так далее. Таким образом могут быть определены значения функции полезности в произвольном конечном числе точек, чего обычно достаточно для приближённого построения графика неизвестной функции полезности $u(x)$.

4.7 Модель Эрроу

В этом разделе мы рассмотрим модель Эрроу, в которой страхование рассматривается с точки зрения интересов клиента страховой компании.

Пусть доход клиента страховой компании зависит от случайных факторов, так сказать, "состояний природы", число которых счетно, и k-е состояние природы возникает с известной вероятностью p_k,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1, \quad p_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \cdots .$$

В целях уменьшения риска клиент заключает контракт стоимостью d со страховой компанией.

Обозначим через a_k и x_k соответственно, доходы клиента до заключения страхового контракта и после его заключения при состоянии природы k. Пусть i_k – страховые выплаты клиенту страховой компании при состоянии природы k, E – среднее значение страховых выплат клиенту, а $\alpha = Ed^{-1}$ – коэффициент нагрузки.

Ясно, что указанные величины связаны соотношениями

$$x_k = a_k + i_k - d, \quad E = \sum_{k=1}^{\infty} i_k p_k, \quad E = \alpha d, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Пусть $u(x)$ – функция полезности клиента, то есть $u(x)$ – полезность дохода x.

Предметом поиска является значения выплат i_k, максимизирующие среднее значение полезности окончательного дохода клиента при фиксированных значениях E и d. Иначе говоря, страховая компания заинтересована в стабилизации средних выплат, а в остальном предлагает клиенту оптимальную для него форму страхования. Таким образом, максимизируется (по i_k) величина

$$W(d, E) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k u(a_k - d + i_k).$$

При этом предполагается, что

$$u'(x) > 0, \quad u''(x) \leq 0.$$

Можно доказать, что оптимальное решение носит *пороговый* характер и имеет вид

$$i_k = \overline{a} - a_k, \qquad \text{при} \quad k \in A$$

и

$$i_k = 0, \qquad \text{при} \quad k \notin A,$$

где множество A имеет вид

$$A = \{k: \ a_k \le \overline{a}\}$$

и $\overline{a}$ определяется из уравнения

$$\overline{a} = \frac{\sum\limits_{k \in A} p_k a_k + E}{\mathsf{P}(A)}, \quad \mathsf{P}(A) = \sum_{k \in A} p_k.$$

Заметим, что это решение не зависит от d.

Эрроу (Arrow, 1970) исследовал также свойства функции $W(d, E)$ при различных предположениях на функцию полезности $u(x)$ и нашел значения E и d, максимизирующие $W(d, E)$ при фиксированном α. При этом использовался метод неопределенных множителей Лагранжа и теорема Куна–Таккера.

4.8 Общие принципы расчета тарифных ставок

С формальной точки зрения правила определения величины страхового взноса, основанные на функциях полезности, описанные выше, безупречны. Тем не менее, у них есть больное место: как правило, на практике все же достаточно трудно формализовать предпочтения страховщика и страхователей. Видимо, по этой причине на практике часто придерживаются иных правил выбора величины страхового взноса. Рассмотрим кратко некоторые из них.

Пусть D – величина страхового взноса, а X – случайная величина возможного ущерба, имеющая функцию распределения $F(x)$. Величина D представляет собой функционал, заданный на множестве функций распределения, принимающий действительные значения и, быть может, зависящий от некоторой экзогенно заданной характеристики λ, окончательно определяющей правило выбора.

Итак, в общем случае

$$D = \Psi(F, \lambda).$$

Рассмотрим следующие частные случаи функционала $\Psi(F, \lambda)$.

Принцип ожидаемого значения.

$$D = (1 + \lambda)\mathsf{E}X, \qquad \lambda \ge 0.$$

Величину λ в этом случае называют *коэффициентом нагрузки* – она указывает, на сколько страховой взнос должен быть выше среднего значения выплат. При $\lambda = 0$ мы приходим к упомянутому выше *принципу эквивалентности.*

Принцип дисперсии (*дисперсионный принцип*).

$$D = \mathsf{E}X + \lambda \mathsf{D}X, \qquad \lambda > 0.$$

Величина λ играет здесь роль весового коэффициента для дисперсии – чем больше λ, тем в большей степени взнос зависит от величины разброса значений выплат.

Принцип стандартного отклонения.

$$D = \mathsf{E}X + \lambda \sqrt{\mathsf{D}X}, \qquad \lambda > 0.$$

Смысл λ здесь тот же, что и выше, при этом у слагаемых в правой части одинаковая размерность.

Принцип нулевой полезности. Пусть $u(x)$ – функция полезности страхователя с обычными свойствами:

$$u'(x) > 0, \qquad u''(x) \leq 0.$$

Если S есть начальный капитал страховой компании, то страховой взнос D определяется как решение уравнения

$$\mathsf{E}u(S + D - X) = u(S),$$

то есть страховой взнос выбирается так, чтобы средняя полезность до и после страхования была одна и та же. В случае, если функция полезности экспоненциальна

$$u(x) = a^{-1}(1 - \exp\{-ax\}), \qquad a > 0,$$

последнее уравнение имеет явное решение вида

$$D = a^{-1} \log(\mathsf{E} \exp\{aX\}).$$

Этот случай называется *экспоненциальным принципом.*

Обобщенный принцип нулевой полезности. Предположим, что начальный капитал S является *случайной величиной.* Страховой взнос D определяется как решение уравнения вида

$$\mathsf{E}u(S + D - X) = \mathsf{E}u(S).$$

Этот принцип рассматривается как *неклассический*, поскольку D в общем случае зависит от *совместного распределения* случайных величин X и S. Например, в случае экспоненциальной функции полезности,

$$D = a^{-1}[\log(\mathsf{E}\exp\{a(X-S)\} - \mathsf{E}\exp\{-aS\})],$$

и для малых значений параметра справедливо приближенное равенство

$$D \approx \mathsf{E}X + \frac{a}{2}\mathsf{D}X - a\mathsf{Cov}(X,S),$$

из которого видно, что D зависит от совместного распределения случайных величин X и S.

Принцип Эсшера.

$$D = \frac{\mathsf{E}X\exp\{\lambda X\}}{\mathsf{E}\exp\{\lambda X\}}, \qquad \lambda \geq 0.$$

Этот принцип естественно возникает как Парето-оптимальное решение в модели страхового рынка в случае, если все его участники имеют экспоненциальные функции полезности и независимые страховые выплаты. Принцип Эсшера также возникает при минимизации средних потерь страховой компании в случае, если *функция потерь* имеет вид

$$L(x,D) = (D-x)^2\exp\{\lambda x\}.$$

Заметим также, что величина D является средним значением случайной величины X после умножения плотности X на возрастающую весовую функцию, что, конечно, делает рисковую ситуацию менее привлекательной для страховой компании. Иначе, если обозначить через

$$f(x) = F'(x),$$

плотность случайной величины X, то вводится новая плотность

$$\widetilde{f}(x) = \exp\{\lambda x\}f(x)\left(\int\limits_0^\infty \exp\{\lambda x\}f(x)dx\right)^{-1}.$$

Тогда

$$D = \int\limits_0^\infty x\widetilde{f}(x)dx.$$

параметр Эсшера λ отражает “неприятие риска” страховой компанией, поскольку $D = D(\lambda)$ возрастает по λ при любой случайной величине X. Действительно

$$D'(\lambda) = \int\limits_0^\infty x^2\widetilde{f}(x)dx - \left(\int\limits_0^\infty x\widetilde{f}(x)dx\right)^2 \geq 0.$$

Как следствие получаем, что D мажорирует среднее значение

$$D \geq \mathsf{E}X, \qquad \lambda \geq 0.$$

Суисс-принцип (швейцарский принцип).

$$\mathsf{E}g(X - \lambda D) = g((1-\lambda)D), \qquad \lambda \in [0,1],$$

где $g(x)$ есть вещественная непрерывная функция, обладающая свойствами

$$g'(x) > 0, \qquad g''(x) \geq 0.$$

Заметим, что при

$$\lambda = 0$$

этот принцип переходит в обобщенный принцип среднего значения

$$D = g^{-1}(\mathsf{E}g(X)),$$

а при

$$\lambda = 1$$

– в принцип нулевой полезности относительно функции полезности вида

$$u(x) = -g(-x).$$

Если

$$g(x) = a^{-1}(\exp\{ax\} - 1), \qquad a > 0,$$

то мы приходим к экспоненциальному принципу, а при

$$\lambda = 1 \quad \text{и} \quad g(x) = x\exp\{ax\}$$

получаем принцип Эсшера.

Принцип Орлича. В этом случае величина D определяется как решение уравнения

$$\mathsf{E}\rho(XD^{-\lambda}) = \rho(D^{1-\lambda})$$

где $\lambda \in [0,1]$ и $\rho(x)$ – непрерывная стого возрастающая функция. При $\lambda = 0$ получается обобщенный принцип среднего значения.

Квантильный принцип. Еще один интересный класс примеров, близких к так называемым квантильным мерам риска (Value-at-Risk) в финансовом деле, составляют так называмые квантильные правила (принципы). Пусть случайная величина X, характеризующая потери, имеет функцию распределения F. Определим (обобщенную) обратную к F функцию соотношением

$$F^{\leftarrow}(x) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \ F(x) \geq x\}, \quad 0 < x < 1.$$

Тогда *принцип* $(1-\varepsilon)$*-квантили* соответствует

$$D = F^{\leftarrow}(1-\varepsilon).$$

При $\varepsilon \downarrow 0$ в предположении, что F имеет ограниченный носитель, мы получаем *максимально возможные потери* (probable maximal loss). Хотя эта мера риска играет очень важную роль во всех системах управления риском в финансовом деле, можно показать, что функция $D = F^{\leftarrow}(1-\varepsilon)$ мало подходит на роль меры риска, поскольку она не обладает свойством суб-аддитивности, которое, как утверждается в упомянутой работе, должно быть присуще разумным мерам риска.

Глава 5

Модель индивидуального риска (статическая модель)

5.1 Модели объема страхового портфеля

5.1.1 Постановка задачи

В некоторых ситуациях при планировании страховой деятельности можно считать, что объем страхового портфеля – количество договоров страхования, объединенных, например, типом страхования, сроками действия и/или источником финансирования, является фиксированным. Однако, как правило, параметры страховой деятельности (например, страховые тарифы) планируются заранее, до начала конкретных действий по заключению договоров в рамках данного портфеля. В таком случае, как правило, количество заключенных договоров заранее неизвестно. А если страховая компания ведет работу с несколькими портфелями, то неопределенность объема портфеля разумно считать проявлением случайности. В последнем случае объем страхового портфеля естественно считать целочисленной случайной величиной, скажем, N. В такой ситуации ключевой задачей становится правильный подбор распределения этой случайной величины.

При решении этой задачи можно использовать, например, асимптотический подход, основанный на предельных теоремах для сумм случайных индикаторов (см. разделы 1.7 и 2.10). Этот подход примени́м тогда, когда заранее известно число потенциальных клиентов страховой фирмы, но неизвестно предпочтение каждого клиента, который может либо заключить контракт, либо воздержаться, например, отдав предпочтение услугам другой компании.

В данном разделе мы рассмотрим подход, который можно условно назвать эмпирическим. В рамках этого подхода подгонка распределения осуществляется на основе статистической информации о значениях некоторых числовых характеристик моделируемой случайной величины, в частности, о ее моментах.

Как мы видели в первой главе, наряду с самой случайной величиной N довольно часто исследуется случайная сумма вида

$$R = \sum_{i=1}^{N} \xi_i, \tag{5.1.1}$$

где $\{\xi_i\}$ $(i = 1, 2, \dots)$ — последовательность одинаково распределенных случайных величин, независимых в совокупности со случайной величиной N. В зарубежной литературе в рамках модели (5.1.1) распределение случайной величины R называется "составным" (compound); например, если N имеет распределение Пуассона, то случайная величина R имеет "составное пуассоновское" (compound Poisson) распределение (см. раздел 1.5). Будем обозначать случайную сумму вида (5.1.1) символом $\{N, \xi\}$, где ξ – случайная величина, распределение которой совпадает с общим распределением случайных величин ξ_i.

Итак, одной из существенных для практики задач является проблема определения приемлемой (соответствующей имеющимся статистическим данным) модели распределения случайной величины N, с использованием которой достаточно просто решается и задача о вычислении (если распределение случайной величины ξ_i известно) или аппроксимации (если заданы только моменты случайных величин ξ_i) составного распределения, то есть распределения случайной суммы R.

Типичной моделью распределения случайной величины N является пуассоновское распределение. В такой ситуации случайная величина R имеет составное (или обобщенное) пуассоновское распределение. Эту ситуацию мы довольно подробно рассмотрели в первой главе. В литературе рассматриваются также такие распределения случайной величины N как вырожденное, обобщенное (составное) пуассоновское, смешанное пуассоновское и многие другие дискретные законы. При этом в случае необходимости исследования распределения случайной суммы R часто постулируется, что распределение случайная величина N относится к некоторому конкретному типу и предполагается, что исследователю известна вся информация относительно рассматриваемых распределений (то есть распределений случайных величин N и ξ_i), которая требуется в соответствующей задаче. Такой подход вполне естественен с чисто теоретической точки зрения; он оставляет решение вопросов о выборе конкретного распределения случайной величины N и оценке необходимых его параметров исследователю, который для решения этих вопросов может воспользоваться широчайшим набором методов решения подобных задач, известным в математической статистике.

В данном разделе мы рассмотрим довольно частную постановку задачи выбора модели распределения случайной величины N в условиях ограниченной информации относительно этого распределения, а именно, при наличии оценок только двух первых моментов этой случайной величины.

С теоретической точки зрения, наиболее простой ситуацией является та, при которой значение величины N заранее известно (что приводит, естественно, к рассмотрению вырожденного распределения случайной величины N); если же величина N неизвестна и полагается случайной, то наиболее простым и чаще всего применяемым на практике методом является оценка по имеющейся статистике среднего значения $\mathsf{E}\,N = \Lambda$, а затем принятие предположения о том, что случайная величина N имеет пуассоновское распределение с параметром Λ.

Как отмечается в (Panjer and Willmot,1992), пуассоновское предположение обычно делается, исходя из соображений удобства и в случае отсутствия противопоказаний или свидетельств против него. Очевидным свидетельством против пуассоновости может являться сильное отличие вычисленной по той же статистике оценки дисперсии $\mathsf{D}N = M^2$ от значения Λ. Далее будет рассматриваться ситуация, в которой полученные оценки Λ и M^2, вообще говоря, не дают возможности ограничиться ни вырожденной, ни пуассоновской моделями распределения случайной величины N. Возникает задача выбора подходящей модели распределения с учетом имеющейся статистической информации.

Как уже отмечалось, помимо задачи выбора модели распределения случайной величины N, важной задачей является вычисление распределения “составного” распределения случайной величины R. Поэтому, следуя логике раздела 1.7, здесь мы также изучим вопрос о точности нормальной аппроксимации распределения случайная величина R в рамках рассматриваемых моделей распределения N. Отметим, что в рамках актуарной трактовки рассматриваемой проблематики возможность нормальной аппроксимации распределения случайной величины R автоматически влечет существование асимптотических оценок оптимальных (минимально допустимых) страховых тарифов (см. ниже).

5.1.2 Выбор модели распределения из класса Каца–Панджера и нормальная аппроксимация составного распределения

Здесь мы не ставим задачу подробного изучения вопроса о том, каким образом математическая статистика позволяет выбирать модель распределения целочисленной случайной величины. Этот вопрос подробно рассмотрен в большинстве пособий по математической статистике, укажем, например, (Айвазян, Енюков, Мешалкин, 1983). Отметим лишь, что естественным подходом является построение, прежде всего, непараметрических моделей и состоятельных оценок функций распределения произвольного вида. Дальнейшая детализация связана с выбором параметрической модели, что связано с применением того или другого критерия согласия.

Мы уделим основное внимание вопросу о том, какую информацию о целочисленном распределении могут дать исследователю значения первых двух моментов рассматриваемой случайной величины в ситуации, когда тип распределения уже идентифицирован (то есть соответствующий статистический анализ, в том числе с помощью критериев согласия, уже считается выполненным), и этот тип относится к некоторым вполне определенным, естественным (и описываемым ниже) классам. Оказывается также, что знание двух первых моментов распределения целочисленной случайной величины позволяет в рассматриваемых предположениях выписывать также явные (вычислимые) оценки точности нормальной аппроксимации для соответствующих составных распределений.

Отметим также, что значения указанных выше моментов на практике вычисляются с помощью имеющихся статистических методов, прежде всего, посредством их аппроксимации выборочными моментами. Естественно, эта аппроксимация приводит к появлению дополнительной погрешности, но здесь мы не будем исследовать вопрос о величине этой дополнительной погрешности.

Итак, будет рассматриваться ситуация, когда распределение случайной величины N априори относится к некоторому специальному классу дискретных распределений. Вопросы практического выбора такого класса в настоящее время очень подробно изучаются в актуарно-математической литературе. Классы дискретных распределений такого рода формируются, как правило, путем задания определенных рекуррентных соотношений для вероятностей вида $\mathsf{P}(N = k)$ или дифференциальных (или интегро-дифференциальных) уравнений для соответствующей производящей функции, причем в этих соотношениях и уравнениях фигурируют несколько параметров, которые могут выбираться произвольным образом в рамках некоторых ограничений. Обычно эти классы включают в себя некоторые "стандартные" семейства целочисленных распределений, например, пуассоновские, биномиальные распределения и т. п.

Существенный вклад в данную методику внесен Г. Панджером, Г. Уиллмотом и другими авторами (Ambagaspitiya, 1995) (Ambagaspitiya and Balakrishnan, 1993) (Chan, 1984), (Goovaerts and Kaas, 1991), (Kling and Goovaerts, 1993), (Panjer, 1980), (Panjer, 1981),(Panjer and Willmot, 1992), (De Pril, 1989), (Stroter, 1985), (Sundt and Jewell, 1981), (Sundt, 1992), (Willmot, 1988), (Willmot and Panjer, 1987). Подробный обзор широкого множества дискретных распределений, используемых для моделирования распределения случайной величины N, содержится в (Johnson, Kotz and Kemp, 1992); см. также библиографию в (Ambagaspitiya, 1995). Общие принципы выбора стохастических моделей такого рода, используемые, в частности, Панджером, обсуждаются в (Linhart and Zucchini, 1986). Материал данного раздела основан на статье (Шоргин, 1997).

В данном подразделе мы рассмотрим класс распределений случайной величины N, введенный Л. Кацем (Katz, 1965) и использованный для моделирования распределения случайного числа страховых исков Г. Панджером в (Panjer, 1980) и последующих работах. Вопрос о подборе распределения случайной величины N из класса Каца–Панджера полностью решен в цитированных выше работах. Мы приведем здесь основные результаты, относящиеся к этому вопросу, а затем более подробно рассмотрим вопрос о точности нормальной аппроксимации распределения случайной величины R при условии, что распределение N относится к указанному классу.

Класс Каца–Панджера является двупараметрическим и может быть определен либо посредством задания производящей функции распределений этого класса:

$$\psi(s)=\Big(\frac{1-a}{1-as}\Big)^{1+b/a},$$

либо с помощью рекуррентного соотношения, которое мы и примем в качестве определения этого класса.

Определение 5.1.1. *Классом распределений Каца–Панджера* назовем множество распределений неотрицательных целочисленных случайных величин N, удовлетворяющих при всех $k=1,2,\dots$ условиям

$$\frac{\mathsf{P}(N=k)}{\mathsf{P}(N=k-1)}=a+\frac{b}{k}, \tag{5.1.2}$$

где a, b – некоторые параметры, определяющие распределение.

Данный класс был использован Г. Панджером (Panjer, 1980) для упрощения процедуры расчета распределений случайных величин N и R. Дальнейший анализ, проведенный, в частности, в (Ambagaspitiya, 1995), (Panjer, 1980), (Panjer, 1981),(Panjer and Willmot, 1992), (Sundt and Jewell, 1981), (Sundt, 1992), (Willmot, 1988), (Willmot and Panjer, 1987), показал, что этот класс имеет существенное прикладное значение. В (Katz, 1965) показано, что этот класс включает в себя значительное число важных распределений. В актуарной математике распределения этого класса могут служить моделями распределения количества договоров в портфеле или страховых исков при различных значениях первых двух моментов случайной величины N, рассчитанных по имеющейся статистике. Известно много расширений и обобщений класса Каца–Панджера, в том числе класс Сундта–Джуэлла, отличающийся от класса Каца–Панджера значением вероятности $\mathsf{P}(N=0)$, а также многочисленные другие обобщения (см. обзор в (Ambagaspitiya, 1995)). Однако мы ограничимся рассмотрением класса распределений Каца, который определяется наиболее простым образом (являясь двупараметрическим) и в то же время включает в себя как биномиальное и пуассоновское распределения, так и некоторое семейство из класса обобщенных пуассоновских распределений. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.1.1 (Katz, 1965), (Panjer and Willmot, 1992). *Класс Каца–Панджера включает в себя только следующие типы распределений:*

– пуассоновское с параметром b – при $a=0$, $b \geq 0$;

– биномиальное (с распределением

$$\mathsf{P}\{N_0=k\} = C_{N_0}^k s^k (1-s)^{N_0-k}, \qquad k=0,1,\dots,$$

где $s=-a/(1-a)$, $N_0=-b/a-1)$ – при $a<0$, $b>0$ и при условии, что b/a – целое;

– отрицательное биномиальное распределение (о. б. р.), называемое также распределением Пойя, с распределением

$$\mathsf{P}\{N=k\} = \frac{\Gamma(\rho+k)}{\Gamma(\rho)k!}\Big(\frac{1}{1+\beta}\Big)^{\rho}\Big(\frac{\beta}{1+\beta}\Big)^{k}, \qquad k=0,1,\dots,$$

где $\beta=a/(1-a)$, $\rho=1+b/a$ – при $0<a<1$, $b>-a$.

Если $a \geq 1$, или $b \leq -a$, или $0<-a<b$ (за исключением случаев, когда b/a – целое число), то распределений, удовлетворяющих (5.1.2), не существует.

Отметим, что в число распределений, перечисленных в Теореме 5.1.1, входит и распределение, сосредоточенное в 0 (как частный случай пуассоновского при $b = 0$ или биномиального при $b = -a > 0$). Однако вырожденные распределения, сосредоточенные в ненулевых точках, в число таких распределений не входят.

Отрицательное биномиальное распределение является частным случаем обобщенного пуассоновского распределения (см., например, раздел 1.6.1). Если случайная величина N имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами ρ и β, то есть

$$\mathsf{P}(N = k) = \frac{\Gamma(\rho + k)}{\Gamma(\rho)k!}\Big(\frac{1}{1+\beta}\Big)^{\rho}\Big(\frac{\beta}{1+\beta}\Big)^{k}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

то $N = \{\Pi_\lambda, \nu\}$, гдекак и в разделе 1.7.4, Π_λ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ, причем $\lambda = \rho\,\ln(1+\beta)$, а ν является случайной величиной с логарифмическим распределением

$$\mathsf{P}(\nu = k) = \frac{1}{k\,\ln(1+\beta)}\Big(\frac{\beta}{1+\beta}\Big)^{k}, \qquad k = 1, \ldots;$$

отметим, что

$$\mathsf{E}\,\nu = \frac{\beta}{\ln(1+\beta)}, \quad \mathsf{D}\,\nu = \frac{\beta\,(1+\beta)}{\ln(1+\beta)} - \frac{\beta^2}{\ln^2(1+\beta)}, \quad \mathsf{E}\,\nu^3 = \frac{2\beta^3 + 3\beta^2 + \beta}{\ln(1+\beta)}.$$

Так как класс Каца–Панджера – двупараметрический, то его можно естественным образом параметризовать и с помощью двух первых моментов $\mathsf{E}N = \Lambda$ и $\mathsf{D}N = M^2$ соответствующих распределений. В терминах этих параметров Теорема 1 оначает, что в класс Каца–Панджера входят пуассоновские, биномиальные и отрицательные биномиальные распределения, причем пуассоновскому распределению с параметром Λ соответствует соотношение $\Lambda = M^2 > 0$, биномиальному распределению с параметрами $s = (\Lambda - M^2)/\Lambda$, $N_0 = \Lambda^2/(\Lambda - M^2)$ соответствует соотношение $\Lambda > M^2$ и условие, что отношение $\Lambda^2/(\Lambda - M^2)$ должно быть целочисленным; отрицательному биномиальному распределению с параметрами $\beta = (M^2 - \Lambda)/\Lambda$, $\rho = \Lambda^2/(M^2 - \Lambda)$ соответствует соотношение $\Lambda < M^2$.

Итак, для всех возможных соотношений между величинами Λ и $M^2 > 0$, за исключением ситуации, когда $\Lambda > M^2$, $\Lambda^2/(\Lambda - M^2)$ – нецелое, можно определить конкретное распределение из класса Каца–Панджера.

Класс Каца–Панджера удобен тем, что в его состав, среди прочих распределений, входит подмножество класса обобщенных пуассоновских распределений – двупараметрическое семейство отрицательных биномиальных распределений. Данное семейство чрезвычайно популярно в актуарно-математической литературе; это связано, видимо, и с тем, что отрицательное биномиальное распределение является не только обобщенным пуассоновским распределением, но и смешанным пуассоновским распределением (Panjer and Willmot, 1992); подробнее о смешанных пуассоновских распределениях и тесно связанных с ними процессах Кокса как моделях процессов поступления страховых исков см. (Эмбрехтс и Клюппельберг, 1993), (Grandell, 1991), (Bening and Korolev, 2002) и разделы 6 и 8.

5.1.3 Точность нормальной аппроксимации для распределений случайных сумм с индексом из класса Каца–Панджера

Перейдем к вопросу о точности нормальной аппроксимации для распределения случайной величины R в предположении, что распределение случайной величины N принадлежит классу Каца–Панджера. Этот вопрос будет рассматриваться в предположении, что $\mathsf{E}N \to \infty$. Мы также будем считать, что, вообще говоря, может неограниченно расти и $\mathsf{D}N = M^2$. В связи с этим далее будет рассматриваться специальный случай "схемы серий", в котором распределение случайной величины ξ будет предполагаться фиксированным, а распределение случайной величины N зависит от номера "серии" $n: \ N = N_n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\mathsf{E}N_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Будем именовать эту схему *основной схемой серий.* Такой подход позволит рассматривать различные варианты соотношений между величинами Λ и M^2.

Пусть $\xi \stackrel{d}{=} \xi_i$. Обозначим $\mathsf{E}\xi = a$, $\mathsf{D}\xi = b^2$, $L(\xi) = \mathsf{E}|\xi|^3/(\mathsf{E}\xi^2)^{3/2}$, $L_0(\xi) = L(\xi - \mathsf{E}\xi)$. Отметим, что $\mathsf{E}R = \Lambda a$, $\mathsf{D}R = \Lambda b^2 + M^2 a^2$. Обозначим нормированную случайную величину R символом $\widetilde{R}$, то есть $\widetilde{R} = (R - \mathsf{E}\, R)/\sqrt{\mathsf{D}R}$. Пусть $F_{\widetilde{R}}(x)$ – функция распределения случайной величины $\widetilde{R}$. Положим

$$\Delta = \sup_x |F_{\widetilde{R}}(x) - \Phi(x)|,$$

где $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения.

Символами C с различными индексами будем обозначать абсолютные постоянные.

Теорема 5.1.2. *Если рассматривается основная схема серий,* $\mathsf{E}N = \Lambda \to \infty$, $\mathsf{D}N = M^2 > 0$, *причем* $M^2 = o\,(\Lambda^{5/4})$, *а при* $M^2 < \Lambda$ *отношение* $\Lambda^2/(\Lambda - M^2)$ *является целым числом, и распределение случайной величины* N *принадлежит классу Каца–Панджера, то случайная* *величина R имеет асимптотически нормальное распределение, причем имеют место оценки:*

1) *если* $0 < M^2 < \Lambda$ *и* $\Lambda^2/(\Lambda - M^2)$ *– целое, то*

$$\Delta \le 4C_{\mathrm{BE}}\Big[\frac{M^2}{\Lambda^{3/2}}L(\xi) + \Big(1 - \frac{M^2}{\Lambda}\Big)\frac{\Lambda - M^2}{\Lambda^{3/2}}L_0(\xi)\Big];$$

2) *если* $M^2 = \Lambda$, *то*

$$\Delta \le C_{\mathrm{BE}}\frac{L(\xi)}{\Lambda^{1/2}};$$

3) *если* $M^2 > \Lambda$, *то*

$$\Delta \le C_{\mathrm{BE}}\frac{L(\xi)}{\Lambda^{1/2}}\Big[2\frac{M^4}{\Lambda^2} - \frac{M^2}{\Lambda}\Big],$$

где C_{BE} *– постоянная из неравенства Берри–Эссеена, можно положить* $C_{\mathrm{BE}} = 0.7056$, (*Шевцова, 2006б*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Если $0 < M^2 < \Lambda$ и $\Lambda^2/(\Lambda - M^2)$ – целое, то распределение случайной величины N – биномиальное с параметрами $s = (\Lambda - M^2)/\Lambda$, $N_0 = \Lambda^2/(\Lambda - M^2)$. В данном случае $R = \sum_{k=1}^{N_0}\eta_k\xi_k$, где $\eta_k = 1$ с вероятностью s и $\eta_k = 0$ с вероятностью $1 - s$; случайная величина $\eta_k\xi_k$ одинаково распределены, и в соответствии с обычным неравенством Берри–Эссеена

$$\Delta \le \frac{C_{\mathrm{BE}}}{(\mathsf{D}R)^{3/2}}\sum_{k=1}^{N_0}\mathsf{E}|\eta_k\xi_k - sa|^3.$$

Так как случайные величины η_k и ξ_k независимы, все ξ_k имеют одно и то же распределение и $|\eta_k - s| \le 1$, то

$$\mathsf{E}|\eta_k\xi_k - sa|^3 \le 4[\mathsf{E}|\eta_k - s|^3\mathsf{E}|\xi|^3 + s^3\mathsf{E}|\xi - a|^3] \le 4[s(1-s)\,\mathsf{E}|\xi|^3 + s^3\mathsf{E}|\xi - a|^3].$$

Утверждение 1) Теоремы 5.1.2 вытекает из данного неравенства. Очевидно, правая часть оценки утверждения 1) стремится к нулю при $\Lambda \to \infty$.

2) Если $M^2 = \Lambda$, то распределение случайной величины N является пуассоновским. В этом случае утверждение теоремы вытекает из Теоремы 1.7.3.

3) Если $M^2 > \Lambda$, то N имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $\beta = (M^2 - \Lambda)/\Lambda$ и $\rho = \Lambda^2/(M^2 - \Lambda)$. Как отмечалось выше, N имеет обобщенное пуассоновское распределение. В разделе 1.7.4 показано, что для случайной величины N, имеющей обобщенное пуассоновское распределение,

$$\Delta \le C_{\mathrm{BE}}\frac{\mathsf{E}(N - \mathsf{E}N)^3}{\Lambda^{3/2}}.$$

Пусть $\lambda = \rho \ln(1+\beta)$, а ν – случайная величина с логарифмическим распределением (5.1.3). В силу того, что $N = \{\pi_\Lambda, \nu\}$, имеем:

$$\frac{\mathsf{E}(N - \mathsf{E}N)^3}{\Lambda^{3/2}} = \frac{\mathsf{E}\nu^3}{\lambda^{1/2}(\mathsf{E}\nu)^{3/2}} = \frac{2\beta^2 + 3\beta + 1}{(\rho\beta)^{1/2}} = \frac{2(M^2/\Lambda)^2 - M^2/\Lambda}{\Lambda^{1/2}}.$$

Так как $M^2 = o(\Lambda^{5/4})$, то $\Delta \to 0$ при $\Lambda \to \infty$. Теорема доказана.

5.1.4 Пуассоновско-биномиальная модель распределения целочисленной случайной величины. Нормальная аппроксимация составного распределения

Как уже отмечалось, в классе Каца–Панджера имеются (с точки зрения значений первых двух моментов) значительные пробелы, относящиеся к ситуации, когда дисперсия относительно мала́, то есть $M^2 < \Lambda$. Случай $M^2 = 0$ (при $\Lambda > 0$) вовсе не охватывается условием (5.1.2); если же $0 < M^2 < \Lambda$, то соответствующее распределение из данного класса (это распределение будет биномиальным) может быть найдено только при целых $\Lambda^2/(\Lambda - M^2)$, что, конечно, является весьма ограничительным условием. Поэтому в случае, когда $M^2 < \Lambda$, имеет смысл рассмотреть некоторый другой класс распределений, естественно, имеющий соответствующее прикладное значение.

Рассмотрим ситуацию, когда случайная величина N имеет распределение, совпадающее с распределением количества успехов при проведении некоторого числа испытаний Бернулли с "переменной" вероятностью успеха, то есть так называемую схему испытаний Пуассона. Иначе говоря,

$$N = \sum_{k=1}^{N_0} \eta_k, \quad \text{где} \quad \eta_k = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } s_k, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - s_k. \end{cases}$$

Данная модель, очевидно, описывает вполне естественную ситуацию для всех рассматривавшихся выше примеров и является обобщением "биномиальной" модели, при которой все вероятности s_k одинаковы.

Параметры $N_0, s_1, \dots, s_{N_0}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\Lambda = \mathsf{E}N = \sum_{k=1}^{N_0}, \quad M^2 = \mathsf{D}N = \sum_{k=1}^{N_0} s_k(1 - s_k).$$

Следуя терминологии, предложенной Ле Камом (Le Cam, 1960), такое распределение случайной величины N будем называть *пуассоновско-биномиальным* с параметрами $\{N_0, s_1, \ldots, s_{N_0}\}$. Соответственно, модель распределения случайной величины N назовем *пуассоновско-биномиальной моделью.*

Семейство пуассоновско-биномиальных распределений, естественно, поглощает множество биномиальных распределений, входящих в класс Каца–Панджера; кроме того, в это семейство входят все вырожденные распределения. Пуассоновско-биномиальное распределение объема страхового портфеля часто изучалось в актуарной литературе, см., например, (Kling and Goovaerts, 1993), (Jewell and Sundt, 1981), (Kaas, van Heerwarden and Goovaerts, 1994), (Sundt, 1985), (Kornya, 1983), (Hipp, 1986), (Michel, 1986).

Итак, в ситуации, когда $M^2 < \Lambda$, в качестве модели распределения случайной величины N будем рассматривать семейство пуассоновско-биномиальных распределений. Естественно, для этого класса уже невозможно выписать соотношение типа (5.1.2). В данном подразделе речь идет о том, что для любых допустимых (см. лемму 5.1.1 ниже) значений $\Lambda = \mathsf{E}N$ и $M^2 = \mathsf{D}N$, $M^2 < \Lambda$, можно найти хотя бы одно распределение из этого семейства с данными моментами. Более того, зная указанные моменты, можно дать оценку точности нормальной аппроксимации для составного распределения случайной величины R (при этом информация о точных значениях параметров распределения $\{N_0, s_1, \ldots, s_{N_0}\}$, которые в большинстве реальных случаев невозможно определить, не требуется).

Прежде всего, укажем необходимое условие того, что величины Λ и M^2 являются, соответственно, средним и дисперсией некоторой целочисленной случайной величины.

Лемма 5.1.1 (Shorgin, 1997). *Если первые два момента целочисленной случайной величины N равны $\mathsf{E}N = \Lambda$, $\mathsf{D}N = M^2$, то числа Λ и M удовлетворяют условию*

$$M^2 \geq \{\Lambda\}(1 - \{\Lambda\}),$$

где $\{\cdot\}$ – дробная часть числа.

Итак, если $M^2 < \{\Lambda\}(1 - \{\Lambda\})$, то изучение целочисленной случайной величины N с указанными моментами теряет смысл; построить соответствующую модель распределения такой случайной величины невозможно и следует проверить правильность определения указанных параметров.

Оказывается, что условие $M^2 \geq \{\Lambda\}(1 - \{\Lambda\})$ является и достаточным условием существования целочисленной случайной величины со средним Λ и дисперсией M^2. При $\Lambda \le M^2$ этот факт тривиален, так как в таком случае неравенство $M^2 \ge \{\Lambda\}(1-\{\Lambda\})$ заведомо выполняется, а искомое распределение можно найти при любых таких Λ и M^2, что $\Lambda \le M^2$, например, в классе отрицательных биномиальных распределений. Если же $M^2 < \Lambda$, то, как показывает следующая теорема, искомое распределение может быть найдено в семействе пуассоновско-биномиальных распределений.

Теорема 5.1.3 (Shorgin, 1997). *Если $\Lambda > 0$ и $M^2 \ge 0$, то случайная величина ξ с пуассоновско-биномиальным распределением такая, что $\mathsf{E}\xi = \Lambda$, $\mathsf{D}\xi = M^2$, существует тогда и только тогда, когда*

$$\{\Lambda\}(1-\{\Lambda\}) \le M^2 < \Lambda,$$

где $\{\cdot\}$ – дробная часть числа.

Несмотря на то, что распределение случайной величины N не определяется однозначно своими первыми двумя моментами, оценка точности нормальной аппроксимации для составного распределения может быть выписана и в данном случае, причем для этой оценки достаточно иметь только информацию о двух первых моментах случайной величины N. Мы сформулируем этот факт в виде следующей теоремы.

Теорема 5.1.4. *Если распределение случайной величины N относится к семейству пуассоновско-биномиальных законов, $\mathsf{E}N = \Lambda > 0$, $\mathsf{D}N = M^2 \ge 0$, то допустимыми являются значения Λ, M^2, удовлетворяющие неравенствам $0 \le \{\Lambda\}(1-\{\Lambda\}) \le M^2 < \Lambda$, и случайная величина R имеет асимптотически нормальное распределение, причем для величины Δ имеют место оценки:*

1) *если Λ – целое, $M^2 = 0$, то*

$$\Delta \le C_{\mathrm{BE}} \frac{L_0(\xi)}{N^{1/2}},$$

2) *если $0 < \{\Lambda\}(1-\{\Lambda\}) \le M^2$, то*

$$\Delta \le 4C_{\mathrm{E}} \Big[\frac{M^2}{\Lambda^{3/2}} L(\xi) + \frac{\Lambda - M^2}{\Lambda^{3/2}} L_0(\xi)\Big],$$

где C_{E} – постоянная из неравенства Эссеена для разнораспределенных случайных величин, можно положить $C_{\mathrm{E}} = 0.7915$.

Доказательство. Утверждение теоремы для случая целочисленного Λ вытекает из неравенства Берри–Эссеена.

Рассмотрим ситуацию, когда $0 < \{\Lambda\}(1-\{\Lambda\}) \le M^2$. Очевидно, что в данном случае при $\Lambda \to \infty$ справедливо условие $M = o(\Lambda)$. Имеем

$$R = \sum_{k=1}^{N_0} \eta_k \xi_k;$$

случайные величины $\eta_k\xi_k$ имеют различные распределения, и в соответствии с неравенством Эссеена для сумм независимых разнораспределенных случайных величин

$$\Delta \leq \frac{C_{\mathrm{E}}}{(\mathsf{D}R)^{3/2}} \sum_{k=1}^{N_0} \mathsf{E}|\eta_k\xi_k - s_k a|^3,$$

где $C_{\mathrm{E}} = 0.7915(, 1982)$. Так как случайные величины η_k и ξ_k независимы, все ξ_k имеют одно и то же распределение и $|\eta_k - s_k| \leq 1$, то

$$\mathsf{E}|\eta_k\xi_k - s_k a|^3 \leq 4[\mathsf{E}|\eta_k - s_k|^3 \mathsf{E}|\xi|^3 + s_k^3 \mathsf{E}|\xi - a|^3] \leq$$
$$\leq 4[s_k(1 - s_k)\mathsf{E}|\xi|^3 + s_k^2 \mathsf{E}|\xi - a|^3]$$

и

$$\sum_{k=1}^{N_0} \mathsf{E}|\eta_k\xi_k - s_k a|^3 \leq 4[M^2 \mathsf{E}|\xi|^3 + (\Lambda - M^2)\mathsf{E}|\xi - a|^3].$$

Очевидно, $\Delta \to 0$ при $\Lambda \to \infty$. Теорема доказана.

5.1.5 Пуассоновско-биномиальная модель распределения целочисленной случайной величины. Аппроксимация распределения

Как уже отмечалось, в отличие от распределений, входящих в класс Каца–Панджера, пуассоновско-биномиальное распределение не определяется имеющимися двумя моментами однозначно. Поэтому возникает проблема аппроксимации указанного распределения с использованием некоторой естественной информации об этом распределении. Данная проблема не возникала при изучении класса Каца–Панджера, так как все распределения этого класса могут быть вычислены точно при заданных двух моментах распределения случайной величины N. Поскольку точное вычисление пуассоновско-биномиального распределения вероятностей может быть осуществлено только в тех редких случаях, когда известны параметры $\{N_0, s_1, \ldots, s_{N_0}\}$, вопрос об аппроксимации этого распределения приобретает очевидное значение.

Проблема аппроксимации пуассоновско-биномиального распределения является одной из популярных задач теории вероятностей. Существенное влияние на данную тематику оказали работы Ю. В. Прохорова (Прохоров, 1956) и Л. Ле Кама (Le Cam, 1960), (Le Cam, 1965). В этих работах, а также в ряде последующих ((Боровков, 1988), (Зайцев, 1983), (Пресман, 1983), (Пресман, 1985), (Barbour and Hall, 1981), (Čekanavičius, 1995), (Deheuvels and Pfeifer, 1986a), (Deheuvels and Pfeifer, 1986b), (Deheuvels and Pfeifer, 1987), (Deheuvels and Pfeifer, 1988), (Hipp, 1986), (Kornya, 1983), (Michel, 1986), (Pfeifer, 1985) и др.) изучалась пуассоновская аппроксимация пуассоновско-биномиального распределения в смысле расстояния по вариации (в некоторых из перечисленных работ рассматривался частный случай биномиального распределения). В большинстве работ основным аппаратом при этом являлись операторные методы, восходящие к Ле Каму. В работах (Hipp, 1986), (Deheuvels and Pfeifer, 1988), (Боровков, 1988), (Čekanavičius, 1995) рассматривались уточнения пуассоновской аппроксимации с использованием различных асимптотических разложений (подробнее об этом см. ниже).

Кроме того, достаточно естественной является задача аппроксимации пуассоновско-биномиального распределения нормальным законом (или “уточненным” нормальным законом). Соответствующие результаты, как правило, получались с помощью стандартных аналитических методов или путем непосредственного применения имеющихся общих оценок типа Берри–Эссеена для сумм независимых случайных величин. Существует обширная литература по данному вопросу для частного случая биномиального распределения, которым мы заниматься не будем (биномиальные вероятности могут быть эффективно вычислены и без применения аппроксимации, если только известны параметры распределения, например, два первых момента); по поводу же аппроксимации пуассоновско-биномиального распределения отметим работы (Deheuvels, Puri and Ralescu, 1989) и (Михайлов, 1991). В данной проблеме оценки точности аппроксимаций обычно вычислялись в равномерной метрике.

Отметим, что ряд результатов как для пуассоновского, так и для нормального приближения выражаются в терминах параметров $\{N_0, s_1, \ldots, s_{N_0}\}$. Например, в (Deheuvels and Pfeifer, 1988) выписывается первый (поправочный) член асимптотического разложения для пуассоновско-биномиального распределения (при сближении с пуассоновским законом), который имеет вид

$$\mathsf{E}\Big|\sum_{i=1}^{N_0} s_i^2\Big[\Big(1-\frac{\Pi_\Lambda}{\Lambda}\Big)^2-\frac{\Pi_\Lambda}{\Lambda^2}\Big]\Big|. \tag{5.1.4}$$

В (Пресман, 1985) правая часть оценки по вариации отклонения пуассоновско-биномиального распределения от пуассоновского закона выражается через величину $\sum_{i=1}^{N_0} s_i^2\sigma_i^{-2}$, где $\sigma_i^2 = s_1(1-s_1)+\cdots+s_{i-1}(1-s_{i-1}) + s_{i+1} + \cdots + s_{N_0}$. Во многих случаях в правых частях оценок фигурирует величина $\max_i s_i$ и т. п. (см. примеры в разделе 1.3). Все эти результаты, конечно, имеют значительное теоретическое значение, но определение указанных выше параметров по статистике значений случайной величины N представляется весьма затруднительным. Нас же будут интересовать аппроксимирующие выражения и оценки точности приближения, выражаемые через "интегральные" параметры распределений типа моментов, которые могут быть эффективно оценены статистически.

Пусть N имеет пуассоновско-биномиальное распределение с параметрами $\{N_0, s_1, \ldots, s_{N_0}\}$, F_N – распределение случайной величины N, $F_N(x)$ – соответствующая функция распределения; Π_λ – распределение Пуассона с параметром Λ, $\Pi_\lambda(x)$ – соответствующая функция распределения,

$$\varepsilon'_\pi = \sup_x |F_N(x) - \Pi_\lambda(x)|, \quad \varepsilon''_\pi = \|F_N - \Pi_\lambda\|$$

($\|\cdot\|$ – полная вариация знакопеременной меры),

$$\varepsilon_\phi = \sup_x |F_{\widetilde{N}}(x) - \Phi(x)|,$$

где $\Lambda = \mathsf{E}N$, $\widetilde{N} = (N - \Lambda)/M$. Для $k = 2, 3, \ldots$ обозначим $\Lambda_k = \sum_{i=1}^{N_0} s_i^k$. Очевидно, что

$$\mathsf{D}N = M^2 = \Lambda - \Lambda_2;$$

остальные моменты случайной величины N также могут быть выражены через параметры $\Lambda, \Lambda_2, \Lambda_3, \ldots$ (и наоборот).

Приведем некоторые известные результаты в рамках данной проблематики, выражающиеся в терминах величин $\Lambda, \Lambda_2, \Lambda_3, \ldots$ и имеющие нетривиальное значение в ситуации, когда $\Lambda = \mathsf{E}N \to \infty$.

Теорема 5.1.5 (Пресман, 1983). *Справедливо неравенство*

$$\varepsilon''_\pi \le 2.08 \frac{\Lambda_2}{\Lambda}. \tag{5.1.5}$$

Теорема 5.1.6 (Deheuvels and Pfeifer, 1987, 1988). *Если* $\Lambda \to \infty$ *и* $\Lambda_2/\Lambda \to 0$, *то*

$$\varepsilon''_\pi \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \cdot \frac{\Lambda_2}{\Lambda}.$$

Теорема 5.1.7 (Deheuvels and Pfeifer, 1988). *Имеет место оценка*

$$\varepsilon''_\pi \le \frac{\Lambda_2}{2\Lambda} + e^{4C_1\Lambda_2}\Big[\frac{8}{3}(C_1 - 1)^2\Lambda_3 + 8C_1(C_1 - 1)\Lambda_2^2\Big] + 8(C_1 - 1)\Lambda_3, \tag{5.1.6}$$

где $C_1 < 4.7$.

Теорема 5.1.8. *Справедливо неравенство*

$$\varepsilon_\phi \le \frac{C_{\mathrm{E}}}{\sqrt{\Lambda - \Lambda_2}}.$$

Утверждение Теоремы 5.1.8 вытекает из неравенства Эссеена.

Приведем также некоторые результаты, связанные с уточнением рассмотренных выше аппроксимаций с использованием первых членов соответствующих асимптотических разложений. Отметим, что в (Deheuvels and Pfeifer, 1988) первый член асимптотического разложения при сближении с пуассоновским законом выписан в явном виде (5.1.4), но, как отмечалось выше, данная величина не может быть явно выражена через моменты случайной величины N (или параметры $\Lambda, \Lambda_2, \Lambda_3, \ldots$). В (Hipp, 1986) и (Čekanavičius, 1995) рассмотрено асимптотическое разложение, при котором дополнительные члены не *прибавляются* к пуассоновскому закону, а выписываются в *показателе* экспоненциального представления соответствующей меры (или соответствующей производящей функции). (Примеры поправок подобного типа мы привели в разделе 1.3, когда обсуждали пуассоновскую аппроксимацию в схеме Бернулли.) Ограничимся случаем "первой поправки" к пуассоновскому закону. Пусть $\widetilde{\Pi}_\lambda$ – обобщенная мера, имеющая преобразование Фурье

$$\exp\{\Lambda(e^{it} - 1) - \Lambda_2(e^{2it} - 1)/2\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Положим

$$\widetilde{\varepsilon}''_\pi = \|F_N - \widetilde{G}_\Lambda\|.$$

Теорема 5.1.9 (Hipp, 1986). *Если* $\max_i s_i \le 1/2$, *то*

$$\varepsilon''_\pi \le \exp\left\{\frac{8}{3}\sum_{i=1}^{N_0} \frac{4s_i^3}{(1 - 2s_i)}\right\} - 1.$$

Теорема 5.1.10 (Čekanavičius, 1995). *Если* $\max_i s_i \le s \le 1/4$, *то существуют такие абсолютные постоянные* C_2 *и* C_3, *что*

$$\widetilde{\varepsilon}''_\pi \le C_2 s^3 \exp\{C_3\Lambda_3\}.$$

Пусть $\varphi(x)$ – стандартная нормальная плотность. Что касается "уточнений" нормальной аппроксимации, то в соответствии с разложением Эджворта–Крамера (см. раздел 1.8) в качестве аппроксимирующей функции следует рассмотреть

$$\Gamma(x) = \Phi(x) + \frac{1 - x^2}{6(\Lambda - \Lambda_2)^{1/2}}\varphi(x)\Big[1 - \frac{\Lambda_2 - \Lambda_3}{2(\Lambda - \Lambda_2)}\Big].$$

Пусть
$$\widetilde{\varepsilon}_{\phi} = \sup_{m=0,\pm1,\pm2,\ldots} \left| F_N(m) - \Gamma\left(\frac{m+1/2-\Lambda}{(\Lambda-\Lambda_2)^{1/2}}\right)\right|.$$

Теорема 5.1.11 (Deheuvels, Puri and Ralescu, 1989). *Существует такая абсолютная постоянная C_4, что*
$$\widetilde{\varepsilon}_{\phi} \le \frac{C_4}{\Lambda-\Lambda_2}.$$

Очевидно, что пуассоновская аппроксимация (в том числе "уточненная") имеет смысл в ситуации, когда
$$\Lambda_2/\Lambda = 1 - M^2/\Lambda \to 0, \tag{5.1.7}$$
а нормальная (в том числе "уточненная") – при
$$M \to \infty. \tag{5.1.8}$$

Условие (5.1.8) является более общим, нежели (5.1.7). Очевидно, что как о пуассоновской, так и о нормальной аппроксимации можно говорить только при условии $M \to \infty$. Нормальная аппроксимация пуассоновско-биномиального распределение может применяться в данной ситуации при любом $\Lambda > M^2$, а для пуассоновской аппроксимации необходимо дополнительное условие $(\Lambda - M^2)/\Lambda \to 0$, то есть порядок роста дисперсии должен быть таким же, как и порядок роста среднего значения N. В некоторых работах проводится сравнение точности нормальной и пуассоновской аппроксимаций, см., например, (Deheuvels, Puri and Ralescu, 1989). Здесь мы не будем рассматривать этот (принципиально несложный и хорошо исследованный ранее) вопрос.

Результаты Теорем 5.1.8 и 5.1.11, относящиеся к нормальной аппроксимации, характеризуются "правильным" порядком погрешности и удобным видом как аппроксимирующего выражения, так и оценки погрешности; они вполне могут использоваться на практике (отметим, что для применения результата Теоремы 5.1.11 необходимо знать величину Λ_3, то есть третий момент случайной величины N).

Что касается пуассоновской аппроксимации, то результат Теоремы 5.1.6 показывает, что оценка из Теоремы 5.1.5 имеет правильный порядок и вполне приемлемое (с учетом асимптотики) значение абсолютной постоянной. Однако "чисто пуассоновская" аппроксимация в ситуации, когда априори известно, что $M^2 < \Lambda$, явно может быть уточнена с учетом значения второго момента. В то же время приведенные выше результаты (Deheuvels and Pfeifer, 1988), (Hipp, 1986), (Čekanavičius,

1995) характеризуются или слишком сложным видом "поправочного члена", или существенными ограничениями на параметры s_i, а также присутствием в оценках величин, принципиально не выражаемых через моменты, и величин, которые могут неограниченно возрастать при росте Λ, типа $\exp\{C\Lambda_3\}$. В силу приведенных выше рассуждений прикладное значение таких результатов ограничено. Поэтому далее в данном параграфе мы рассмотрим такое асимптотическое разложение для пуассоновско-биномиального распределения, все члены которого полностью определяются моментами случайной величины N, а оценки погрешности при "обрывании" асимптотического разложения на некотором члене выражаются через величины вида Λ_2/Λ. При этом расстояния между распределениями будут вычисляться в равномерной метрике, которая, конечно, является более слабой, чем расстояние по вариации, но вполне достаточна для любых приложений.

Пусть

$$\pi_\Lambda(m) = \Lambda^m e^{-\Lambda}/m!, \quad m = 0, 1, 2, \ldots;$$

при $m = -1, -2, \ldots$ положим $\pi_\Lambda(m) = 0$. При любом целочисленном m положим

$$\Delta\pi_\Lambda(m) = \pi_\Lambda(m) - \pi_\Lambda(m-1), \ldots,$$

$$\Delta^{k+1}\pi_\Lambda(m) = \Delta\pi_\Lambda^k(m) - \Delta\pi_\Lambda^k(m-1), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Если $\alpha(m)$ – некоторая функция целочисленного аргумента, то символом $\alpha(x)$ будем обозначать ступенчатую функцию, совпадающую с $\alpha(m)$ при $m \le x < m+1$. Функции распределения будем считать непрерывными справа. Пусть $\zeta = \Lambda_2/\Lambda$.

Теорема 5.1.12 (Шоргин, 1977). *При любом* $\nu = 0, 1, \ldots$

$$F_N(x) = \Pi_\lambda(x) + \sum_{k=1}^{\nu} \left(a_{2k}\Delta^{2k-1}\pi_\Lambda(x) + a_{2k+1}\Delta^{2k}\pi_\Lambda(x)\right) + \omega_\nu(x),$$

где

$$a_2 = -\Lambda_2/2, a_3 = -\Lambda_3/3, \ldots, a_r = -\frac{1}{r}\Bigl(\Lambda_r + \sum_{k=2}^{r-2} a_k\Lambda_{r-k}\Bigr)$$

и

$$|\omega_\nu(x)| \le C_0\frac{\zeta^{\nu+1}}{1-\zeta},$$

где $C_0 = \frac{1+\sqrt{\pi/2}}{2} < 1.13$.

Следствие 5.1.1. *Справедливо неравенство*

$$\varepsilon'_\pi \le 1.13\frac{\Lambda_2/\Lambda}{1-\Lambda_2/\Lambda}. \quad (5.1.9)$$

Сравнивая результат данного следствия с Теоремой 5.1.5, убеждаемся, что при $\Lambda_2/\Lambda \le 0.45$ правая часть (5.1.9) меньше правой части (5.1.5). Отметим, что при $\Lambda_2/\Lambda > 0.45$ правая часть (5.1.9) превышает 0.936, то есть в этой области пуассоновская аппроксимация не работает. "Главный" член в правой части оценки (5.1.6) содержит постоянную, лучшую, чем в (5.1.5) и (5.1.9), но "добавочный" член в (5.1.6) при больших значениях Λ_2 и Λ_3 может серьезно испортить оценку. (Конечно, при таком сравнении нельзя забывать, что оценки (5.1.5) и (5.1.6) получены в более сильной метрике.)

Теореме 5.1.12 можно придать несколько другую форму – без группировки членов с a_{2k} и a_{2k+1}.

Теорема 5.1.13. *При любом* $r = 1, 2, \ldots$

$$F_N(x) = \Pi_\lambda(x) + \sum_{k=2}^{r} a_k \Delta^{k-1}\pi_\Lambda(x) + \omega_r(x),$$

где при нечетных r

$$|\omega_r(x)| \le C_0 \frac{\zeta^{(r+1)/2}}{1-\zeta},$$

а при четных r

$$|\omega_r(x)| \le C_0\Big(\zeta^{(r+1)/2} + \frac{\zeta^{r/2+1}}{1-\zeta}\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При нечетных r утверждение Теоремы 5.1.13 совпадает с утверждением теоремы 5.1.12.

Пусть $r = 2\nu$. В силу Теоремы 5.1.12

$$F_N(x) = \Pi_\lambda(x) + \sum_{k=1}^{\nu} \left(a_{2k}\Delta^{2k-1}\pi_\Lambda(x) + a_{2k+1}\Delta^{2k}\pi_\Lambda(x)\right) + \omega_\nu(x),$$

где $|\omega_\nu(x)| \le C_0 \frac{\zeta^{\nu+1}}{1-\zeta}$. Значит,

$$F_N(x) = \Pi_\lambda(x) + \Big[\sum_{k=1}^{\nu-1} \left(a_{2k}\Delta^{2k-1}\pi_\Lambda(x) + a_{2k+1}\Delta^{2k}\pi_\Lambda(x)\right) +$$

$$+ a_{2\nu}\Delta^{2\nu-1}\pi_\Lambda(x)\Big] + a_{2\nu+1}\Delta^{2\nu}\pi_\Lambda(x) + \omega_\nu(x) =$$

$$= \Pi_\lambda(x) + \sum_{k=2}^{r} a_k \Delta^{k-1}\pi_\Lambda(x) + \omega_r(x),$$

где $\omega_r(x) = a_{2\nu+1}\Delta^{2\nu}\pi_\Lambda(x) + \omega_\nu(x)$. Из Теоремы 5.1.12 следует, что

$$|\omega_\nu(m)| \le C_0\zeta^{\nu+1}/(1-\zeta) = C_0\zeta^{(r/2)+1}/(1-\zeta).$$

В (Шоргин, 1977) показано, что

$$|a_{2\nu+1}\Delta^{2\nu}\pi_\Lambda(m)| \le C_0\zeta^{(2\nu+1)/2} = C_0\zeta^{(r+1)/2},$$

откуда следует утверждение теоремы.

Наконец, результаты, относящиеся к “первой поправке”, выпишем в более детальном виде. Пусть

$$\widetilde{\varepsilon}'_\pi = \sup_x |F_N(x) - \Pi_\lambda(x) - a_2\Delta\pi_\Lambda(x)|.$$

При $r = 2$ из Теоремы 5.1.13 вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.1.2. *Имеет место оценка*

$$\widetilde{\varepsilon}'_\pi \le C_0\Big[\zeta^{3/2} + \frac{\zeta^2}{1-\zeta}\Big].$$

Кроме того, можно сформулировать еще один результат.

Теорема 5.1.14. *Справедливо неравенство*

$$\widetilde{\varepsilon}'_\pi \le C_0\Big[\frac{2\sqrt{2}}{3e}\cdot\frac{\Lambda_3}{\Lambda^{3/2}} + \frac{\zeta^2}{1-\zeta}\Big].$$

Доказательство вытекает из оценки

$$|a_3\Delta^2\pi_\Lambda(m)| \le C_0\frac{2\sqrt{2}}{3e}\cdot\frac{\Lambda_3}{\Lambda^{3/2}},$$

которая является следствием леммы 4 (Шоргин, 1977) и того, что $a_3 = -\Lambda_3/3$.

Итак, при необходимости построить аппроксимацию пуассоновско-биномиального е распределения исследователь располагает следующими возможностями: если он владеет информацией о значениях Λ, Λ_2, Λ_3 и т. д. в достаточном количестве для определения членов разложения из Теорем 5.1.12 – 5.1.14 и для вычисления оценки соответствующего остаточного члена, то он может воспользоваться указанными теоремами (если, конечно, погрешность, задаваемая оценкой остаточного члена, является приемлемой). В частности, если имеется только информация о трех моментах случайной величины N (из которой элементарным образом можно получить значения Λ_2 и Λ_3), то можно построить “уточненную” аппроксимацию в соответствии с Теоремой 5.1.14; если же учитываются только два момента случайной величины N, то можно воспользоваться Следствием 5.1.2.

Наконец, в ситуации, когда пуассоновская или уточненная пуассоновская аппроксимация не дает приемлемой точности, но дисперсия M^2 велика, может использоваться нормальная или уточненная нормальная аппроксимация (Теоремы 5.1.8 и 5.1.11; последний результат имеет существенный недостаток, связанный с отсутствием оценки постоянной C_4).

5.1.6 Обобщенная пуассоновско-биномиальная модель распределения целочисленной случайной величины. Аппроксимация распределений сумм случайного числа случайных индикаторов

В этом разделе мы вернемся к задаче, рассматривавшейся в разделе 2.11. Эта задача связана с поиском асимптотической аппроксимации для распределения сумм случайного числа случайных индикаторов. Однако в отличие от схемы одинаково распределенных индикаторов, рассмотренной в разделе 2.11, здесь мы сосредоточим внимание на более общей схеме (схеме Пуассона), когда суммируемые индикаторы могут иметь различные распределения.

Рассмотрим последовательность серий $\{\xi_{n,j}\}_{j\geq 1}$, $n = 1, 2, \ldots$, случайных величин следующего вида:

$$\xi_{n,j} = \begin{cases} 0, & \text{с вероятностью } 1 - p_{n,j}, \\ 1, & \text{с вероятностью } p_{n,j}. \end{cases}$$

Пусть $\{N_n\}_{n\geq 1}$ - неотрицательные целочисленные случайные величины такие, что для каждого $n \geq 1$ с.в. $N_n, \xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots$ независимы. Для целых k обозначим

$$S_{n,k} = \xi_{n,1} + \ldots + \xi_{n,k}.$$

Прежде всего рассмотрим асимптотическое поведение случайных величин S_{n,N_n}. При $s \in [0, 1]$ символ $l_n(s)$ будет означать максимальную s-квантиль случайной величины N_n. Символ $\Longrightarrow$, как обычно, будет обозначать сходимость по распределению.

Следующее утверждение, являющееся обобщением Теоремы 2.11.1 на схему Пуассона, можно считать обобщенным вариантом классической теоремы Пуассона. Суть его заключается в указании условий, при которых распределение случайной суммы неодинаково распределенных случайных индикаторов сходится к смешанному пуассоновскому распределению.

Теорема 5.1.15. *Предположим, что все* $p_{n,j}$ *строго положительны и*

$$\max_j p_{n,j} \to 0 \tag{5.1.10}$$

при $n \to \infty$. *Предположим также, что существует неотрицательная случайная величина* Λ *такая, что*

$$p_{n,1} + \ldots + p_{n,N_n} \Longrightarrow \Lambda \tag{5.1.11}$$

при $n \to \infty$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(S_{n,N_n} = k\right) = \frac{1}{k!}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^k d\mathsf{P}(\Lambda < \lambda), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. Поскольку все $p_{n,j}$ строго положительны, максимальная s-квантиль случайной величины $p_{n,1} + \ldots + p_{n,N_n}$ совпадает с числом $p_{n,1} + \ldots + p_{n,l_n(s)}$ для любого $s \in (0,1)$. Следовательно, условие (5.1.11) эквивалентно тому, что для почти всех $s \in (0,1)$

$$p_{n,1} + \ldots + p_{n,l_n(s)} \to \lambda(s) \tag{5.1.12}$$

при $n \to \infty$, где $\lambda(s)$ – s-квантиль случайной величины Λ. Легко проверить, что функция $\lambda(s)$ является неубывающей и непрерывной почти всюду на $[0,1]$ по мере Лебега. Остающаяся часть доказательства основывается на следующей лемме.

Лемма 5.1.2. *Пусть* $\xi(s)$, $s \in [0,1]$, *– измеримый случайный процесс с независимыми приращениями, а* η *– случайная величина, не зависящая от процесса* $\xi(s)$ *и имеющая равномерное распределение на* $[0,1]$. *Если*

$$S_{n,l_n(s)} \Longrightarrow \xi(s) \quad (n \to \infty)$$

для почти всех $s \in (0,1)$, *то*

$$S_{n,N_n} \Longrightarrow \xi(\eta) \quad (n \to \infty).$$

Здесь под измеримостью случайного процесса понимается его измеримость относительно декартова произведения σ-алгебры соответствующего вероятностного пространства и борелевской σ-алгебры подмножеств интервала $[0,1]$. Доказательство этой леммы (для общего случая, когда S_{n,N_n} является случайной суммой произвольных независимых случайных величин) приведено в книге (Круглов и Королев, 1990), с. 56-57.

Для завершения доказательства Теоремы 5.1.15 заметим, что из (5.1.10) и (5.1.12) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\exp\{itS_{n,l_n(s)}\} = \exp\{\lambda(s)(e^{it}-1)\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

для любого $s \in (0,1)$ (см., например, (Ширяев, 1989), с. 349-350). Пусть $X(s)$, $s \in [0,1]$, – неоднородный процесс Пуассона с кумулятивной интенсивностью $\lambda(s)$ (то есть

$$\mathsf{P}(X(s)=k) = \exp\{-\lambda(s)\}\frac{(\lambda(s))^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots)$$

Поскольку функция $\lambda(s)$ не убывает, процесс $X(s)$ имеет независимые приращения. Поскольку функция $\lambda(s)$ непрерывна почти всюду, процесс $X(s)$ стохастически непрерывен почти всюду на $[0,1]$. Следовательно, существует его измеримая версия (см., например, (Дуб, 1956), с. 61). Для упрощения рассуждений, предположим, что процесс $X(s)$ сам является измеримым. Теперь остается применить Лемму 5.1.2 с $\xi(s) = X(s)$ и заметить, что в нашем случае $\xi(\eta) = X(\eta)$ – это смешанный пуассоновский процесс, такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(S_{n,N_n} = k\right) = \int\limits_0^1 \mathsf{P}(X(s)=k)ds = \frac{1}{k!}\int\limits_0^1 e^{-\lambda(s)}(\lambda(s))^k ds =$$

$$= \frac{1}{k!}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^k d\mathsf{P}(\Lambda < \lambda), \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Теорема 5.1.15 доказана.

Теперь приведем некоторые оценки точности аппроксимации распределения случайной суммы случайных индикаторов с помощью смешанного пуассоновского распределения.

Пусть случайная величина $\Lambda(n)$ при каждом $n \geq 1$ определяется следующим образом:

$$\Lambda(n) = p_{n,1} + \ldots + p_{n,N_n}.$$

Предположим, что случайная величина N_n сосредоточена на ограниченном или неограниченном множестве неотрицательных целочисленных значений $[0,1,\ldots,K_n)$, где $K_n \leq \infty$ (при $K_n < \infty$ это означает, что максимальное значение случайной величины N_n равно $K_n - 1$).

Для $m \in [0, K_n)$ положим

$$\lambda(n,m) = p_{n,1} + \ldots + p_{n,m}, \quad \lambda_2(n,m) = p_{n,1}^2 + \ldots + p_{n,m}^2,$$

$$\delta_n = \sup_x \left|\mathsf{P}\left(S_{n,N_n} \le x\right) - \Gamma_n(x)\right|,$$

где

$$\Gamma_n(x) = \int_0^\infty \Pi_\lambda(x) d\mathsf{P}(\Lambda(n) < \lambda),$$

$$\gamma_n = \sup_{0 \le m < K_n} \frac{\lambda_2(n,m)}{\lambda(n,m)}, \quad \rho_n = \mathsf{P}\left(N_n \ge 1\right).$$

Из Следствий 5.1.1 и 5.1.2 нетрудно получить следующий результат.

Теорема 5.1.16.

$$\delta_n \le 1.13\rho_n\gamma_n.$$

Справедливы следующие очевидные оценки для величины γ_n , которые существенно упрощают формулировку Теоремы 5.1.16 в некоторых частных случаях.

Если $p_{n,j} \le \beta_n$ при всех j, то $\gamma_n \le \beta_n$; если $K_n < \infty$ и для всех j справедливо $p_{n,j} \le p_{n,j+1}$, то

$$\gamma_n \le \frac{\lambda_2(n, K_n - 1)}{1 - \lambda_2(n, K_n - 1)}.$$

5.2 Вероятность разорения в модели индивидуального риска. Классическая асимптотическая формула для страховых премий в статической модели страхования

Прежде чем формально описать факторизационную модель иска и привести асимптотические формулы для страховых ставок, которые справедливы в условиях этой модели, приведем общеизвестный результат, справедливый в статической модели страхования в случае, когда страховые премии предполагаются одинаковыми (см., например, (Bowers et al, 1986), (Фалин, 1994)). Это делается для того, чтобы в дальнейшем сравнить наиболее наглядный результат, получаемый в рамках Ф-модели (см. раздел 5.5), с данным – по-видимому, наиболее наглядным – асимптотическим результатом, получаемым в условиях постоянных страховых премий.

Пусть в формуле (2.2.1) $r = 0$, N – постоянная величина, $Z_j = Z$ для всех j. Тогда для момента времени, к которому действие всех договоров страхования данного страхового портфеля уже завершилось,

$$R = ZN - \sum_{j=1}^{N} Y_j.$$

Предположим, что существуют конечные моменты случайных величин Y_j:

$$\alpha = \mathsf{E}\, Y_j \quad \text{и} \quad \beta^2 = \mathsf{D}\, Y_j,$$

а число N достаточно велико для того, чтобы распределение случайной величины $\sum_{j=1}^{N} Y_j$ можно было аппроксимировать соответствующим нормальным распределением с приемлемой точностью. Тогда можно выписать следующую асимптотически (при $N \to \infty$) верную формулу

$$\mathsf{P}\Big(\sum_{j=1}^{N} Y_j \le x\Big) \sim \Phi\Big(\frac{x - \alpha N}{\beta N^{1/2}}\Big),$$

где символом $\Phi(x)$ обозначена стандартная нормальная функция распределения. Следовательно (асимптотически при $N \to \infty$),

$$\mathsf{P}\,(R \ge 0) = \mathsf{P}\left(\sum_{j=1}^{N} Y_j \le ZN\right) \sim \Phi\Big(\frac{Z - \alpha}{\beta} \cdot N^{1/2}\Big).$$

Если потребовать, чтобы вероятность "итогового неразорения" $\mathsf{P}\,\{R \ge 0\}$ была не меньше $1 - \varepsilon = Q$, то нижняя граница Z_0 значений страховой премии Z, при которых выполняется это условие, удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$Z_0 \sim \alpha + \frac{\beta\,\Psi(Q)}{N^{1/2}}, \tag{5.2.1}$$

где $\Psi(x)$ – функция, обратная функции $\Phi(x)$.

Данный результат является тривиальным следствием центральной предельной теоремы и содержится в большинстве пособий по страховой математике. Очевидно, что тогда, когда N является случайной величиной, распределенной по закону Пуассона с параметром $\lambda \to \infty$, в формуле (5.2.1) следует заменить N на λ, а β на $(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ (в соответствии со сказанным в разделе 1.7).

5.3 Факторизационная модель индивидуальных исков и постановка задач, относящихся к статической модели страхования

5.3.1 Факторизационная модель

Здесь и далее мы будем рассматривать достаточно естественную ситуация, когда стохастическая природа величины выплат страховщика по отдельному договору страхования связана не только со случайным характером величины ущерба (которая становится известна только после наступления страховых случаев), но и со случайным характером страховой суммы, играющей роль "масштаба" риска страховщика по отдельным договорам (и определяемой уже в момент заключения договора).

Предполагается, что каждому договору страхования (с номером j) из некоторого страхового портфеля ставится в соответствие положительная для всех элементарных исходов ω случайная величина S_j, называемая страховой суммой, причем для всех ω случайная величина Y_j удовлетворяет условию $Y_j \leq S_j$. Определим случайную величину $X_j = Y_j/S_j$. Очевидно, что эта случайная величина всегда корректно определена. Величину X_j можно назвать *относительным иском* (иском, рассчитанным на единицу страховой суммы). Суть Ф-модели сводится к тому, что случайные величины X_j и S_j предполагаются независимыми (ниже приводится обоснование такого предположения). При этом величина иска может быть представлена в виде произведения независимых случайных величин:

$$Y_j = X_j S_j \tag{5.3.1}$$

(иски, удовлетворяющие этому условию, называются факторизуемыми).

Предположим, что для каждого договора страхования данного страхового портфеля страховая премия Z_j определяется с учетом случайной страховой суммы ("масштаба" риска) по данному договору страхования S_j как

$$Z_j = zS_j,$$

где z – некоторая постоянная для всех договоров страхования величина, называемая *ставкой страховой премии* (или просто *ставкой премии* или *страховой ставкой*). При этом, очевидно, в отличие от имеющихся в литературе постановок, в рассматриваемой модели премии являются случайными величинами, зависящими от S_j. Отметим, что в силу естественных практических соображений премия Z_j не может превышать страховой суммы S_j, так что в дальнейшем будем считать, что $z \leq 1$.

Очевидно, что традиционно рассматриваемая ситуация, когда страховая сумма – постоянная величина, является простейшим частным случаем Ф-модели.

Более интересным и практически важным примером является пропорциональное страхование совокупности некоторых однородных объектов. При пропорциональном страховании страховая сумма определяется по каждому договору в пределах действительной стоимости каждого объекта страхования на момент заключения договора страхования (называемой *страховой стоимостью*). Величина возмещения равна произведению страховой суммы на отношение реальной стоимости причиненного страховым событием убытка к его страховой стоимости. Формально, если C – страховая стоимость, S – страховая сумма ($S \leq C$), U – реальный ущерб, причиненный объекту страхования ($0 \leq U \leq C$), то сумма возмещения (иск) Y равна $(U/C)\,S$ (отметим, что U/C и есть величина относительного иска X). Стохастическая независимость величин U/C и S может быть обоснована существенно разной природой этих величин: значение $X = U/C$ определяется случайными факторами, порожденными конкретным страховым случаем, а величина страховой суммы определяется в момент начала действия договора по соглашению между страховщиком и страхователем и зависит при условии однородности объектов страхования, прежде всего, от финансовых возможностей страхователя: премия по каждому договору страхования определяется как произведение постоянной для всех исков данного страхового портфеля ставки премии на величину страховой суммы данного договора страхования.

Еще одним примером является страхование от несчастных случаев, когда осуществляется страхование на некоторую сумму, выплачиваемую либо полностью – при таком серьезном ущербе здоровью, который считается по условиям договору страхования “максимальным”, либо частично – в соответствии с конкретным видом причиненного ущерба здоровью. Степень ущерба здоровью определяется соответствующей экспертной комиссией и не зависит от максимальной суммы, на которую застрахован клиент, то есть от страховой суммы.

Указанные соображения могут быть применены для всех рисковых видов страхования. При этом должно выполняться условие однородности страхового портфеля, требующее, что портфель должен формироваться только из достаточно однородных договоров страхования, то есть должны быть исключены ситуации, когда, например, в один страховой портфель, содержащий договоры по страхованию автотранспорта от угона, могут быть включены и “Мерседесы”, и “Запорожцы”. Ясно, что в последней ситуации случайные величины страховой суммы и относительного иска становятся существенно зависимыми.

Следует также отметить, что одним из авторов проведен математико-статистический анализ имеющейся у некоторых страховых компаний информации по величинам страховых сумм и соответствующих возмещений. Анализ показал, что, исходя из имеющихся статистических данных, гипотезу о факторизуемости реальных исков можно принять.

5.3.2 Постановка задачи определения оптимальной страховой ставки

В дальнейшем будем считать, что число договоров страхования N, включаемых в страховой портфель, вообще говоря, является случайной величиной (в качестве важных частных случаев ниже будут рассматриваться случайная величина N с вырожденным распределением, для которой $\mathsf{D}N = 0$, случайная величина N с пуассоновским распределением, для которой $\mathsf{E}\,N = \mathsf{D}N = \Lambda$, а также случайная величина N с обобщенным пуассоновским распределением).

Предположим, что все иски Y_j факторизуемы, случайные векторы (S_j, X_j) $(j = 1, 2, \ldots)$ и случайная величина N независимы в совокупности. Также предположим, что имеет место “относительная однородность” исков, то есть одинаково распределены и все случайные величины S_j $(j = 1, 2, \ldots)$, и все случайные величины X_j $(j = 1, 2, \ldots)$.

Случайная сумма собранных по страховому портфелю премий равна

$$\overline{Z} = \sum_{j=1}^{N} Z_j.$$

Случайная сумма возмещений (сумма исков) равна

$$\overline{Y} = \sum_{j=1}^{N} Y_j.$$

Пусть начальный резерв равен r. Тогда итоговый страховой фонд (по результатам работы с данным страховым портфелем) равен (2.2.1)

$$R = r + \overline{Z} - \overline{Y}.$$

Первой из задач, возникающих в связи с описанной моделью, является изучение асимптотики распределения случайной величины R при известной величине страховой ставки z. Вторая задача – это определение такого минимального значения z, что результаты страховой деятельности по данному страховому портфелю в некотором смысле будут приемлемы для страховщика. Достаточно естественными являются следующие условия определения страховой ставки z:

– условие "средней безубыточности", в соответствии с которым страховая ставка z должна удовлетворять неравенству

$$z \geq \mathsf{E}X_j; \tag{5.3.2}$$

– условие "итогового неразорения", в соответствии с которым ставка z должна определяться так, чтобы выполнялось неравенство

$$\mathsf{P}(R \geq 0) \geq Q, \tag{5.3.3}$$

где Q – некоторое заранее заданное число ($0 < Q < 1$). Условие (5.3.3) является достаточно традиционным и естественным. В формуле (5.3.3) величина Q представляет собой минимальную допустимую для страховщика вероятность "итогового неразорения" (безубыточности). Предполагается, что величина Q выбирается самим страховщиком в соответствии со степенью его склонности к риску. В прикладной литературе встречаются стандартно рекомендуемые значения Q, равные 0.9, 0.95 и т. п. (см., (Методика..., 1994)).

Условие (5.3.2) при $Q > 0.5$ и большом количестве договоров страхования (то есть когда распределение случайной величины R близко к нормальному), естественно, является следствием (5.3.3). Но в общем случае это не так. Условие (5.3.2) вводится для того, чтобы обеспечить положительное значение средней разности между собранными страховыми премиями и выплатами страховщика. Отсутствие такого ограничения может привести к нежелательным явлениям, которые могут быть проиллюстрированы следующим примером. Пусть $r = 0$, $N = 1$, $S_1 = 1$, $Y_1 = 1$ с вероятностью $1 - Q$ и $Y_1 = 0$ с вероятностью Q. Тогда $R = z - Y_1$, и очевидно, что условие (5.3.3) выполняется даже при $z = 0$, что, конечно, неприемлемо для страховщика. Введение ограничения (5.3.2) приводит в данном примере к естественному результату $z = 1 - Q$. С другой стороны, использование при большом числе рисков только условия (5.3.2) очевидным образом приводит при большом числе договоров страхования к также неприемлемому для страховщика значению вероятности "итогового неразорения", близкому к 0.5.

Если ставка страховой премии обеспечивает одновременное выполнение условий (5.3.2) и (5.3.3), то можно сказать, что она "достаточна" или удовлетворяет условию “достаточности”. Наряду с условием “достаточности” можно ввести условие “умеренности”, которое означает, что ставка страховой премии равна числу z_0, точной нижней грани величин z, удовлетворяющих условию “достаточности”, то есть обеспечивающих одновременное выполнение условий (5.3.2) и (5.3.3). Ставку, удовлетворяющую условию “умеренности”, естественно называть *минимально допустимой*. Такую величину будем называть *оптимальной* страховой ставкой (ставкой страховой премии).

5.4 Основные предположения и обозначения в рамках Ф-модели

Перед тем как перейти к формулировке результатов, приведем некоторые дополнительные обозначения и предположения, которые будут использоваться в последующем изложении.

Для упрощения записей будем считать, что случайная величина S распределена так же, как и случайная величина S_j, случайная величина X – так же, как и случайная величина X_j. Пусть случайная величина S имеет не менее двух конечных моментов (очевидно, что случайная величина X имеет все моменты). Распределения случайных величин X и S обозначим, соответственно, F_X и F_S.

Пусть $A = \mathsf{E}X$, $B^2 = \mathsf{D}X$. Коэффициент вариации случайной величины S обозначим символом V,

$$V^2 = \frac{\mathsf{D}S}{(\mathsf{E}S)^2} = \frac{\mathsf{E}S^2}{(\mathsf{E}S)^2} - 1.$$

Пусть задана некоторая ставка z. Положим $d = d(z) = z - A$. Величина d является “рисковой” или “страховой надбавкой” (в иностранной литературе используются термины “security loading” или “safety loading”, поэтому в русской страховой литературе величину d иногда называют *нагрузкой безопасности*), то есть той надбавкой к средней величине относительного убытка, которая должна обеспечивать поставленные условия на вероятность “неразорения” (еще раз отметим, что “в состав” страховой ставки z и рисковой надбавки d не включается компонента, относящаяся к расходам “на ведение дела” страховщика).

Положим $H_j = S_j(z - I_jK_j)$, причем случайные величины H_j независимы и одинаково распределены. Тогда в соответствии с (2.2.1)

$$R = r + \sum_{j=1}^{N} H_j,$$

и для любого r

$$\mathsf{P}(R < x) = \mathsf{P}\Big(\sum_{j=1}^{N} H_j < x - r\Big).$$

Для упрощения записей введем случайную величину H, которая распределена так же, как и случайные величины H_j. Имеющихся свойств случайных величин $\{S_j, X_j\}$ достаточно для подсчета среднего и дисперсии случайной величины H (зависящих от d):

$$h = \mathsf{E}H = \mathsf{E}Sd, \qquad g^2 = \mathsf{D}H = \mathsf{D}Sd^2 + (\mathsf{E}S)^2(1 + V^2)B^2.$$

Пусть $\gamma^2 = \mathsf{E}H^2 = h^2 + g^2$.

Предположим, что (вообще говоря) случайное число договоров страхования N, включаемых в страховой портфель, имеет не менее двух конечных моментов: $\Lambda = \mathsf{E}N$, $M^2 = \mathsf{D}N$. Отметим, что при этом

$$\mathsf{E}R = r + \Lambda h, \qquad \mathsf{D}R = \Lambda g^2 + M^2 h^2.$$

Пусть $w = V^2 + M^2/\Lambda$.

Как и ранее, символом $\Phi(x)$ будем обозначать стандартную нормальную функцию распределения, а символом $\Psi(y)$ – функцию, обратную к функции $\Phi(x)$. Кроме того, символом $\varphi(x)$ будем обозначать плотность стандартного нормального распределения.

Напомним, что для не вырожденной в нуле случайной величины ξ, имеющей три конечных первых момента, отношением Ляпунова мы называем величину $\Lambda(\xi) = \mathsf{E}|\xi|^3/(\mathsf{E}\xi^2)^{3/2}$ (при этом $L(\xi - \mathsf{E}\xi)$ является “классической” дробью Ляпунова, присутствующей, например, в неравенстве Берри–Эссеена (см. раздел 1.7). Положим $L_0(\xi) = L(\xi - \mathsf{E}\xi)$.

Если случайная величина χ имеет обобщенное пуассоновское распределение, тто есть χ распределена как $\sum_{k=1}^{\Pi_\lambda} \xi_k$, где Π_λ – случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λ, а $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – одинаково распределенные случайные величины, причем случайные величины Π_λ и $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ независимы в совокупности, то мы, как и ранее, будем пользоваться обозначением $\chi = \{\Pi_\lambda, \xi_1\}$.

Символами C с индексами и без них будем обозначать абсолютные константы. Символами вида $C(\dots)$ – величины, зависящие только от параметров, указанных в скобках.

5.5 Простейшая формула для страховой ставки, учитывающая два момента распределения иска, в условиях факторизационной модели

Чтобы наиболее простым образом продемонстрировать специфику результатов, получаемых в условиях Ф-модели, приведем (для сравнения с формулами п. 4.2) простейшую формулу, получаемую в этих условиях формулу для страховой ставки (в статической модели страхования) при неслучайном объеме страхового портфеля (Шоргин и Сурков, 1993).

Пусть в формуле (2.2.1) $r = 0$, N – постоянная величина, случайные величины Y_j удовлетворяют (5.3.1). Тогда $R = \sum_{j=1}^{N} H_j$. Предположим, что число N достаточно велико для того, чтобы распределение случайной величины $\sum_{j=1}^{N} H_j$ можно успешно аппроксимировать соответствующим нормальным законом. Тогда можно выписать следующую асимптотически (при $N \to \infty$) верную формулу

$$\mathsf{P}\Big(\sum_{j=1}^{N} H_j \le x\Big) \sim \Phi\Big(\frac{x - Nd\mathsf{E}S}{gN^{1/2}}\Big).$$

Следовательно (также асимптотически при $N \to \infty$),

$$\mathsf{P}(R \ge 0) \sim \Phi\Big(\frac{d\mathsf{E}S}{g} \cdot N^{1/2}\Big).$$

Если потребовать, чтобы для вероятности "итогового неразорения" $\mathsf{P}(R \ge 0)$ выполнялось неравенство (5.3.3), то есть

$$\Phi\Big(\frac{d\mathsf{E}S}{g} \cdot N^{1/2}\Big) \ge Q, \tag{5.5.1}$$

то после решения квадратичного неравенства, к которому сводится (5.5.1), получаем, что (5.5.1) имеет место в случае, когда значение страховой ставки z не меньше оптимальной ставки z_0, для которой справедлива асимптотическая формула

$$z_0 \sim A + \frac{B[1 + V^2]^{1/2}\Psi(Q)}{[N - V^2\,\Psi^2(Q)]^{1/2}}.$$

Данный результат очевидным образом сводится к (5.2.1) при $V = 0$, то есть при постоянной (неслучайной) величине S.

5.6 Асимптотические оценки страховых премий, основанные на нормальной аппроксимации распределения итогового страхового фонда

Большинство результатов данной главы основывается на том, что распределение итогового страхового фонда R может аппроксимироваться нормальным законом. Данный факт является вполне естественным, например, в случаях, когда объем страхового портфеля N является неслучайной возрастающей величиной, а также если N – пуассоновская случайная величина с возрастающим параметром.

Возможны и другие ситуации, когда распределение случайной величины R асимптотически нормально. Так, к примеру, представляет значительный теоретический и прикладной интерес случай, когда N – случайная величина, имеющая обобщенное пуассоновское распределение (см. раздел 2.3). Причиной этого является то, что в ряде ситуаций процесс поступления (заключения) новых договоров страхования может быть описан целочисленным случайным процессом с независимыми приращениями, который представляет собой семейство случайных величин, имеющих безгранично делимое распределение, сосредоточенное на множестве неотрицательных целых чисел. Как мы уже отмечали в разделе 1.6.3, класс таких распределений совпадает с классом обобщенных пуассоновских распределений, сосредоточенных на множестве неотрицательных целых чисел. Тем самым предположение о том, что объем страхового портфеля имеет обобщенное пуассоновское распределение, является вполне естественным. При получении асимптотических оценок оптимальных страховых ставок для такого распределения объема страхового портфеля используются оценки точности нормальной аппроксимации для обобщенных пуассоновских распределений, приведенные в разделе 1.7.4.

Основой для построения асимптотических оценок оптимальных страховых ставок и их погрешностей является приводимая в настоящем разделе Теорема 5.6.1, содержащая соответствующие результаты для произвольного распределения объема страхового портфеля с известными двумя первыми моментами при условии, что случайная величина R асимптотически нормальна.

Кроме того, мы рассмотрим три частных случая, в которых задано конкретное распределение случайной величины N. А именно, мы рассмотрим обсуждавшиеся выше вырожденное, пуассоновское и обобщенное пуассоновское распределения случайной величины N, при которых как условия асимптотической нормальности распределения случайной величины R, так и оценки погрешности формулы для оптимальной страховой ставки выражаются в терминах первых трех моментов случайной величины N.

Нас будут интересовать результаты, получающиеся в условиях, когда $\Lambda = \mathsf{E}N \to \infty$. Будем считать, что, вообще говоря, может расти и $\mathsf{D}N = M^2$. Еще одним параметром, который также может, вообще говоря, рассматриваться как "растущий", является начальный капитал r. В связи с этим во всех теоремах разделов 4.6 и 4.7 будем предполагать, что нами рассматривается "схема серий", в которой распределения всех компонент исков Y_j считаются фиксированными, а распределение случайной величины N и параметр r зависят от номера "серии" n: $N = N_n$, $r = r_n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\mathsf{E}N_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Этот подход позволит рассматривать различные варианты соотношений между величинами Λ, M и r, а именно, получать искомые асимптотические формулы с учетом различных "зон" значений r по отношению к величинам $\mathsf{E}N$ и $\mathsf{D}N$. В дальнейшем использование такой асимптотической схемы будет подразумеваться при формулировке всех теорем (без явного упоминания о ней). Индекс n при этом будет опускаться.

5.6.1 Общая теорема

Теорема 5.6.1 содержит асимптотическую формулу для оптимальной страховой ставки в случае произвольного распределения объема страхового портфеля с известными двумя первыми моментами, получаемую при условии, что случайная величина R асимптотически нормальна. Следствия 5.6.1–5.6.4 относятся к частным моделям распределения случайной величины N, в которых как условия асимптотической нормальности распределения случайной величины R, так и оценка погрешности формулы для оптимальной страховой ставки выражаются в терминах моментов случайной величины N и компонент случайного иска Y_j.

Теорема 5.6.1. *Предположим, что случайная величина R асимптотически нормальна при $\Lambda = \mathsf{E}N \to \infty$, то есть*

$$\delta = \sup_x \sup_{0 \le z \le 1} |\mathsf{P}(\widetilde{R} < x) - \Phi(x)| \longrightarrow 0$$

при $\Lambda \to \infty$, где $\widetilde{R} = (R - \mathsf{E}R)/\sqrt{\mathsf{D}R}$. Пусть задано некоторое Q, $1/2 < Q < 1$. Положим $q = \Psi(Q)$ (очевидно, что $q > 0$). Предположим, что

$$w = o(\Lambda) \quad \text{при} \quad \Lambda \to \infty. \tag{5.6.1}$$

Тогда

1) *если существует такая абсолютная постоянная $C' < 1$, что*

$$r/\mathsf{E}\,S \leq C'q(1+V^2)^{1/2}B[\Lambda - wq^2]^{1/2},$$

то существует такое Λ_0 (зависящее от C'), что при $\Lambda > \Lambda_0$ оптимальная страховая ставка имеет вид

$$z_0 = A + \frac{q(1+V^2)^{1/2}B}{[\Lambda - wq^2]^{1/2}} - \frac{r/\mathsf{E}\,S}{\Lambda - wq^2} + \varepsilon,$$

где

$$|\varepsilon| \leq C(Q)\frac{(1+V^2)^{1/2}B}{\Lambda^{1/2}}\Big[\delta + \frac{w}{\Lambda}\Big]. \tag{5.6.2}$$

2) *если*

$$q(1+V^2)^{1/2}B[\Lambda - wq^2]^{1/2} \leq r/\mathsf{E}\,S \leq q(1+V^2)^{1/2}B\Lambda^{1/2},$$

то существует такое Λ_1, что при $\Lambda > \Lambda_1$ оптимальная страховая ставка равна $z_0 = A + \varepsilon$, где ε удовлетворяет (5.6.2)*;*

3) *если существует такое $C'' > 1$, что*

$$r/\mathsf{E}\,S \geq C''q(1+V^2)^{1/2}B\Lambda^{1/2},$$

то существует такое Λ_2 (зависящее от C''), что при $\Lambda > \Lambda_2$ оптимальная страховая ставка равна $z_0 = A$.

Отметим, что в условиях утверждения 3) Теоремы 5.6.1 фактически получена не асимптотическая, а точная формула для оптимальной страховой ставки (справедливая при $\Lambda > \Lambda_2$).

Доказательство этой теоремы (как и теорем 5.7.1–5.7.4, приводимых ниже) опускается; все эти доказательства могут быть найдены в (Шоргин, 1997).

Следует отметить, что при доказательстве Теоремы 5.6.1 фактически получено явное выражение для величины $C(Q)$ из (5.6.2). Однако это выражение довольно громоздко и не имеет окончательного характера. Поэтому в формулировке теоремы оно не приводится, то есть главное внимание уделяется порядку убывания правой части (5.6.2).

Замечание 5.6.1. Условие (5.6.1) означает, что дисперсия M^2 случайной величины N растет медленнее, чем квадрат математического ожидания Λ^2 этой же случайной величины. Данное условие выполнено как для вырожденной, так и для пуассоновской случайной величины N. Если случайная величина N имеет обобщенное пуассоновское распределение, то есть $N = \{\Pi_\Lambda, \nu_1\}$, то (см. раздел 1.4) $\Lambda = \lambda\mathsf{E}\nu_1$, $M^2 = \lambda\mathsf{E}\nu_1^2$.

Условие (5.6.1) в данном случае сводится к $\mathsf{E}\nu_1^2 = o(\lambda(\mathsf{E}\nu_1^2)^2)$ и выполняется, в частности, при $\lambda \to \infty$ и равномерной ограниченности величин $\mathsf{E}\nu_1^2/(\mathsf{E}\nu_1)^2$.

Замечание 5.6.2. В силу условий на величины δ и w остаточный член в (5.6.2) имеет порядок малости $o\,(\Lambda^{-1/2})$.

5.6.2 Частные случаи распределения объема страхового портфеля

Общий результат, представленный Теоремой 5.6.1, может быть уточнен для отдельных конкретных распределений случайной величины N с учетом соответствующих им оценок величины δ. Как уже отмечалось, в качестве важнейших частных случаев распределения случайной величины N мы будем рассматривать вырожденное, пуассоновское и обобщенное пуассоновское распределения. Поскольку правые части оценок величины δ для этих распределениях N содержат ляпуновские отношения, для дальнейшего нам потребуются оценки моментов и ляпуновских отношений случайной величины H, равномерные по параметру z. При этом мы будем использовать то, что $d \geq 0$ и $0 < z < 1$. Имеем:

$$d = z - A \leq \overline{d} = 1 - A; \quad h = \mathsf{E}H = \mathsf{E}Sd \leq \mathsf{E}S\,\overline{d};$$

$$g^2 = \mathsf{D}H \geq (\mathsf{E}S)^2(1+V^2)B^2, \quad \gamma^2 = \mathsf{E}H^2 \geq (\mathsf{E}S)^2(1+V^2)B^2;$$

если существует третий момент случайной величины S, то

$$\mathsf{E}|H|^3 = \mathsf{E}S^3\mathsf{E}|z - X|^3 \leq \mathsf{E}S^3,$$

$$\mathsf{E}|H - h|^3 \leq 4[\mathsf{E}|H|^3 + h^3] \leq 4[\mathsf{E}S^3 + (\mathsf{E}S)^3\overline{d}^3],$$

$$L(H) \leq \overline{L} = \frac{\mathsf{E}S^3}{(\mathsf{E}S)^3(1+V^2)^{3/2}B^3}, \tag{5.6.3}$$

$$L_0(H) \leq \overline{L}_0 = \frac{4\mathsf{E}S^3[1+\overline{d}^3]}{(\mathsf{E}S)^3(1+V^2)^{3/2}B^3}. \tag{5.6.4}$$

Следствие 5.6.1. *Если N неслучайна и величина S имеет третий момент, то утверждение Теоремы* 5.6.1 *справедливо с* $\Lambda = N$, $M = 0$, $w = V^2$, *причем в данном случае*

$$d' = \frac{q(1+V^2)^{1/2}B}{[N - V^2q^2]^{1/2}} - \frac{r/\mathsf{E}S}{N - V^2q^2}, \quad \delta \leq C_{BE}\frac{\overline{L}_0}{N^{1/2}},$$

где C_{BE} *– постоянная из неравенства Берри–Эссеена для сумм одинаково распределенных случайных величин; можно положить* $C_{BE} = 0.7056$ (*см. раздел* 1.6.2).

Утверждение Следствия 5.6.1 автоматически вытекает из неравенства Берри–Эссеена, примененного к случайной величине R, и из оценки (5.6.4). Данное следствие является уточнением Теоремы 3 из (Shorgin, 1998).

Следствие 5.6.2. *Если* N *имеет распределение Пуассона с параметром* Λ *и случайная величина* S *имеет третий момент, то утверждение Теоремы* 5.6.1 *выполняется с* $M^2 = \Lambda$, $w = 1 + V^2$, *причем в данном случае*

$$d' = \frac{q(1+V^2)^{1/2}B}{[\Lambda - (1+V)^2q^2]^{1/2}} - \frac{r/\mathsf{E}S}{\Lambda - (1+V)^2q^2}, \quad \delta \le C_{BE}\frac{\overline{L}}{\Lambda^{1/2}}.$$

Доказательство данного следствия можно вывести из оценки (5.6.3) и Теоремы 1.7.3.

Следствие 5.6.3. *Если* N *имеет обобщенное пуассоновское распределение и случайные величины* N, S *имеют третьи моменты, то утверждение теоремы* 5.6.1 *выполняется в случае, когда*

$$\frac{\mathsf{E}(N-\mathsf{E}N)^3}{\Lambda^{3/2}} = o(1) \quad \textit{при} \quad \Lambda \to \infty,$$

причем

$$\delta \le C_{BE}\overline{L}\cdot\frac{\mathsf{E}(N-\mathsf{E}N)^3}{\Lambda^{3/2}}.$$

Данное следствие вытекает из оценки точности нормальной аппроксимации для обобщенных пуассоновских распределений (см. раздел 1.7.4) и (5.6.3).

Рассмотрим следующую модель формирования страхового портфеля, которую можно назвать *моделью с конечным источником*. Предположим, что существует некоторое (быть может, весьма большое) количество N' “потенциальных страхователей”, которые могут заключить с данным страховщиком договоры страхования, соответствующие условиям данного страхового портфеля. При этом k-й по счету потенциальный страхователь заключает договор, включаемый в данный страховой портфель, с вероятностью s_k и не заключает такого договора с вероятностью $1 - s_k$, независимо от остальных потенциальных страхователей. Параметры N', $s_1, \ldots, s_{N'}$ не могут быть определены однозначно по известным моментам случайной величины N. Поскольку

$$N = \sum_{k=1}^{N'} \eta_{k'},$$

где

$$\eta_k = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью} \quad s_k, \\ 0 & \text{с вероятностью} \quad 1 - s_k, \end{cases}$$

указанные параметры удовлетворяют соотношениям

$$\Lambda = \mathsf{E}N = \sum_{k=1}^{N'} s_k, \quad M^2 = \mathsf{D}N = \sum_{k=1}^{N'} s_k(1 - s_k).$$

Распределение N в рамках данной модели является обобщенным биномиальным (именуемым также пуассоновско-биномиальным распределением); N равно числу успехов в схеме Бернулли с вероятностью успеха, зависящей от номера испытания (см. разделы 4.1.4 и 4.1.5).

Очевидно, что при $M^2 < \Lambda$ и $\Lambda \to \infty$ справедливо условие $w = o(\Lambda)$. Рассмотрим величину

$$\delta = \sup_x \sup_{0 \le z \le 1} |\mathsf{P}(\widetilde{R} < x) - \Phi(x)|.$$

Отметим, что в данном случае $R = r + \sum_{k=1}^{N'} \eta_k H_k$; случайные величины $\eta_k H_k$ имеют формально различные распределения, и в соответствии с обычным неравенством Берри–Эссеена для разнораспределенных случайных величин

$$\delta \le \frac{C'_E}{(\mathsf{D}R)^{3/2}} \sum_{k=1}^{N'} \mathsf{E}|\eta_k H_k - s_k h|^3, \tag{5.6.5}$$

где $C'_E = 0.7915$ (Шиганов, 1982).

Так как случайные величины η_k и H_k независимы, а все H_k имеют одно и то же распределение, то

$$\mathsf{E}|\eta_k H_k - s_k \eta|^3 \le 4[\mathsf{E}|\eta_k - s_k|^3 \mathsf{E}|H|^3 + s_k^3 \mathsf{E}|H - h|^3] \le$$
$$\le 4[s_k(1 - s_k)\mathsf{E}|H|^3 + s_k^2 \mathsf{E}|H - h|^3]$$

и

$$\sum_{k=1}^{N'} \mathsf{E}|\eta_k H_k - s_k h|^3 \le 4[M^2 \mathsf{E}|H|^3 + (\Lambda - M^2)\mathsf{E}|H - h|^3] \le$$
$$\le 4M^2 \mathsf{E}S^3 + 16(\Lambda - M^2)[\mathsf{E}S^3 + (\mathsf{E}S)^3 \overline{d}^3].$$

В силу соотношения (5.6.5) и определения величин $\overline{L}$ и $\overline{L}_0$ мы имеем

$$\delta \le C'_E \Big[4\frac{M^2}{\Lambda^{3/2}} \overline{L} + 4\frac{\Lambda - M^2}{\Lambda^{3/2}} \overline{L}_0 \Big]. \tag{5.6.6}$$

Значит, $\delta \to 0$ при $\Lambda \to \infty$, и все условия Теоремы 5.6.1 выполнены.

Пусть символ $\{\cdot\}$ обозначает целую часть числа, стоящего в скобках. Можно показать (см. раздел 4.1.5), что для любой целочисленной случайной величины ξ справедливо неравенство

$$\{\mathsf{E}\xi\}(1 - \{\mathsf{E}\xi\}) \le \mathsf{D}\xi,$$

причем в случае, когда $\{\Lambda\}(1 - \{\Lambda\}) \le M^2 < \Lambda$, существует такая случайная величина N с обобщенным биномиальным (пуассоновско-биномиальным) распределением, что $\Lambda = \mathsf{E}N$, $M^2 = \mathsf{D}N$. Поэтому рассматривать модель с конечным источником имеет смысл только при условии $\{\Lambda\}(1 - \{\Lambda\}) \le M^2 < \Lambda$.

Приведенные выше рассуждения доказывают следующее утверждение.

Следствие 5.6.4. *Если* $\{\Lambda\}(1-\{\Lambda\}) \le M^2 < \Lambda$, *а страховой портфель формируется в соответствии с моделью с конечным источником, то для оптимальной страховой ставки справедливы асимптотические формулы, приведенные в Теореме* 5.6.1, *причем для величины* δ *имеет место оценка* (5.6.6).

5.7 Асимптотические оценки страховой премии, основанные на уточненной нормальной аппроксимации распределения итогового страхового фонда

Результаты предыдущего раздела основываются на аппроксимации распределения случайной величины R нормальным законом и, соответственно, в основной части асимптотических формул присутствуют два момента распределений F_S и F_X. Однако, как отмечалось выше, одним из способов уточнения аппроксимации распределения итогового страхового фонда (см., в частности, (Beard, Pentikainen and Pesonen, 1978)) является использование первого члена асимптотического разложения распределения R (то есть учет третьего момента компонент распределения индивидуального иска). В данном разделе этот подход применяется в рамках Ф-модели индивидуальных исков и в предположении, что N является либо вырожденной, либо пуассоновской случайной величиной; тем самым приводимые ниже результаты можно рассматривать как обобщение соответствующих формул из (Beard, Pentikainen and Pesonen, 1978).

Дополнительно введем ряд обозначений и предположений. Положим

$$\mu^3 = \mathsf{E}X^3,$$

$$\zeta_0 = \zeta_0(d) = \frac{\mathsf{E}(H-h)^3}{6g^3}, \quad \zeta = \zeta(d) = \frac{\mathsf{E}H^3}{6\gamma^3}.$$

Всюду ниже будем предполагать, что случайная величина S имеет не менее трех первых конечных моментов. Пусть

$$U^3 = \frac{\mathsf{E}S^3}{(\mathsf{E}S)^3} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{U^3[A^3 + 3AB^2 - \mu^3]}{6(1+V^2)^{3/2}B^3}.$$

Отметим, что величина η равна пределу величин $\zeta_0(d)$ и $\zeta(d)$ при $d \to 0$; пределы этих величин совпадают, так как $\lim_{d\to 0} h(d) = 0$.

Для формулировки результатов, использующих три первых момента распределений F_S и F_X, необходимо сделать некоторые предположения, касающиеся нерешетчатости этих распределений или выполнения для этих распределений условия (C) Крамера. Напомним соответствующие определения.

Определение 5.7.1. Распределение называется *решетчатым*, если оно сосредоточено на некотором множестве точек (решетке) $\mathcal{L} = \{\alpha + \eta k\}$, где k – целые числа (включая положительные, отрицательные и 0); η называется *шагом решетки* данного распределения, если распределение не сосредоточено ни на одной подрешетке решетки $\mathcal{L}$ (Феллер, 1971), т. 2, с. 164.

Определение 5.7.2. Распределение F *удовлетворяет условию* (C) *Крамера*, если

$$\limsup_{|t|\to\infty} |f(t)| < 1, \tag{5.7.1}$$

где $f(t)$ — характеристическая функция распределения F (см. (Петров, 1972), с. 197]).

Как известно (Лукач, 1979), с. 34–35, из (5.7.1) следует, что распределение F является нерешетчатым; формально условие (5.7.1) является более сильным, чем условие недискретности, из которого, в свою очередь, следует нерешетчатость распределения. Отметим также, что любое абсолютно непрерывное распределение удовлетворяет условию (5.7.1).

Как и в предыдущих разделах, благодаря факторизуемости исков в центре нашего внимания будет случайная величина $H = S(z-X)$, причем случайные величины S и $z-X$ предполагаются независимыми. Распределение случайной величины H обозначим F_H. Анализируя соответствующие характеристические функции (с учетом того, что $S > 0$), можно доказать следующий результат.

Лемма 5.7.1. *Если хотя бы одно из распределений F_S или F_X нерешетчатое, то и распределение F_H нерешетчатое; если хотя бы одно из распределений F_S или F_X удовлетворяет условию* (C) *Крамера, то распределение F_H также удовлетворяет этому условию, причем неравенство* (5.7.1) *для совокупности случайных величин $\{H = S(z-X),\ z \in [0,1)\}$ выполняется равномерно по z (иначе говоря,*

$$\sup_z \limsup_{|t|\to\infty} |\varphi_z(t)| < 1,$$

где $\varphi_z(t)$ – характеристическая функция случайной величины $H = S(z-X)$).

Для практического использования приводимых ниже результатов важно то, что распределения случайных величин S и X на практике могут относиться к одному из двух следующих типов.

Во-первых, каждое из этих распределений может быть дискретным. Страховая сумма дискретна в случае, когда условия страхования таковы, что страховая сумма может принимать одно из нескольких заранее назначенных страховщиком значений (например, при медицинском страховании, когда может быть куплен один из нескольких предлагаемых страховой компанией полисов разной цены, каждый из которых предусматривает конкретный набор медицинских услуг). Возможна ситуация, когда и относительный иск также принимает только одно из нескольких установленных в договоре страхования значений (например, при страховании от несчастных случаев, приводящих к смерти или инвалидности, когда каждому из четырех возможных страховых событий – смерть, инвалидность 1-й, 2-й или 3-й групп – ставится в соответствие свое значение относительного убытка, то есть отношения страховой выплаты к полной страховой сумме; например, соответственно, 100%, 80%, 60%, 40%). В силу того, что отношения любых значений, принимаемых каждой из этих случайных величин, на практике являются рациональными числами, а также того, что множество этих значений конечно, из дискретности распределений страховых сумм и относительных исков на практике следует их решетчатость.

В другой ситуации каждое из этих распределений с достаточной степенью точности может считаться абсолютно непрерывным (страховые суммы – в том случае, когда они заранее не определены и зависят от договоренности сторон; относительные убытки – в случае, когда они определяются “природой”, а не договором, и могут принимать, в принципе, любые значения). Конечно, на практике величина страховой суммы всегда исчисляется в некоторых денежных единицах (рублях, долларах и т. п.), то есть формально эта величина и в последнем случае является решетчатой, но шаг соответствующего распределения настолько относительно мал, что с приемлемой точностью указанные распределения могут считаться абсолютно непрерывными (что обычно и делается в актуарной литературе).

Как известно (Лукач, 1979), с. 34–35, распределения, удовлетворяющие условию (5.7.1), должны содержать абсолютно непрерывную и/или сингулярную компоненту. Однако из вышесказанного следует, что, поскольку на практике речь может идти либо о решетчатом, либо об абсолютно непрерывном распределении, при практическом использовании приводимых ниже результатов условие (5.7.1) может считаться эквивалентным нерешетчатости этого распределения или даже его абсолютной непрерывности. Отметим, что сингулярные распределения в одномерном случае являются достаточно "экзотическими" (см. (Лукач, 1979), с. 19), и при изучении распределений исков их вполне можно исключить из рассмотрения. Впрочем, для строгости формулировок ниже в необходимых случаях будет упоминаться именно условие (5.7.1).

Приводимая ниже Теорема 5.7.1 об асимптотике распределения итогового резерва для неслучайной величины N содержит результаты, относящиеся к ситуации, когда распределение F_H нерешетчатое, а также к ситуации, когда это распределение удовлетворяет условию (5.7.1) (то есть когда соответствующему условию удовлетворяет, по крайней мере, одно из распределений F_S и F_X). Получение аналогичных результатов для случая, когда оба распределения F_S и F_X являются решетчатыми, представляется более сложной задачей из-за наличия принципиальных аналитических сложностей при построении асимптотических разложений для решетчатых распределений (см. (Феллер, 1971), том 2). Этот вопрос в данном издании затрагиваться не будет.

ТЕОРЕМА 5.7.1. *Пусть N – детерминированная величина.*

I. *Предположим, что хотя бы одно из распределений F_S или F_X не является решетчатым. Тогда*

$$\mathsf{P}(R < r + Nh + xN^{1/2}g) = \Phi(x) + \frac{\zeta_0}{N^{1/2}}(1 - x^2)\varphi(x) + o(N^{-1/2})$$

равномерно по z, x и r.

II. *Предположим, что хотя бы одно из распределений F_S или F_X удовлетворяет условию* (5.7.1), *а также что распределение F_S имеет конечный четвертый момент. Тогда*

$$\mathsf{P}(R < r + Nh + xN^{1/2}g) = \Phi(x) + \frac{\zeta_0}{N^{1/2}}(1 - x^2)\varphi(x) + \omega N^{-1},$$

где

$$|\omega| \leq C_1(F_S, F_X). \tag{5.7.2}$$

Перед тем как сформулировать аналогичную теорему об "уточненной" асимптотике распределения итогового резерва для пуассоновской случайной величины N, отметим, что в данном случае можно несколько ослабить условие нерешетчатости для утверждения, аналогичного утверждению I Теоремы 5.7.1 (и тем самым расширить множество допустимых распределений F_S и F_X, при которых могут быть доказаны результаты такого рода). Дело в том, что для доказательства этого утверждения достаточно выполнения свойства нерешетчатости для распределения случайной суммы величин H_j. Введем следующее определение.

Определение 5.7.3. Распределение, сосредоточенное на решетке $\mathcal{L} = \{\alpha + \eta k\}$, шаг которой η несоизмерим с любой из точек решетки, например, α, назовем *иррационально-решетчатым.* Если величины α и η соизмеримы, то назовем такое распределение *рационально-решетчатым.*

В работе (Эль-Саиед, 1993) показано, что случайная сумма одинаково распределенных случайных величин с невырожденным индексом имеет нерешетчатое распределение тогда и только тогда, когда распределение слагаемых является нерешетчатым или иррационально-решетчатым. Так как случайная величина H является произведением величин S и $z - X$, то вопрос об иррациональной решетчатости H должен решаться с учетом наличия или отсутствия соответствующих свойств у случайных величин S и X.

Сложность здесь связана с тем, что даже в случае, когда случайная величина X имеет иррационально-решетчатое распределение, этого нельзя сказать о распределении случайной величины $z - X$, так как при любых параметрах решетки $\mathcal{L} = \{\alpha + \eta k\}$, на которой сосредоточено распределение случайной величины X, можно найти бесконечно много значений z, при которых величины $z - \alpha$ и η окажутся соизмеримыми, то есть распределение случайной величины $z - X$ окажется рационально-решетчатым. Это, естественно, делает невозможным доказательство каких-либо теорем, использующих иррациональную решетчатость случайной величины $z - X$ при $z \in [0, 1]$. Следовательно, предположение об иррациональной решетчатости распределения F_X не может привести к расширению множества случаев, в которых распределение случайной величины H является иррационально-решетчатым.

Итак, при поиске условий, при которых распределение случайной величины H является иррационально-решетчатым, нас может интересовать ситуация, когда оба распределения F_S и F_X являются решетчатыми, причем распределение F_S – иррационально-решетчато. Нетрудно убедиться, что распределение случайной величины $H = S(z - X)$ в таком случае не может быть рационально-решетчатым (то есть оно или иррационально-решетчатое, или вовсе нерешетчатое; последнее может – в определенных ситуациях – иметь место тогда, когда распределение F_X является иррационально-решетчатым). Нас не интересует вопрос, в каком случае (в рамках рассматриваемых условий) распределение случайной величины H оказывается иррационально-решетчатым, а в каком – нерешетчатым, так как во всех этих случаях распределение случайной величины R в силу приведенного выше результата (Эль-Саиед, 1993) – нерешетчатое. Тем самым мы приходим к выводу о справедливости следующего утверждения.

Лемма 5.7.2. *Если оба распределения F_S и F_X решетчатые, причем распределение F_S иррационально-решетчатое, то распределение F_H является нерешетчатым или иррационально-решетчатым.*

Конечно, такое "расширение" класса распределений F_S имеет только теоретическое значение, поскольку (как отмечалось выше) иррационально-решетчатые распределения страховых сумм на практике не встречаются.

Теорема 5.7.2. *Пусть N имеет распределение Пуассона с параметром Λ.*

I. *Предположим, что хотя бы одно из распределений F_S или F_X не является решетчатым, или что распределение F_S является иррационально-решетчатым. Тогда*

$$\mathsf{P}(R < r + \Lambda h + x\Lambda^{1/2}\gamma) = \Phi(x) + \frac{\zeta}{\Lambda^{1/2}}(1 - x^2)\varphi(x) + o(\Lambda^{-1/2})$$

равномерно по z, x и r.

II. *Предположим, что хотя бы одно из распределений F_S и F_X удовлетворяет условию* (5.7.1), *а также что распределение F_S имеет конечный четвертый момент. Тогда*

$$\mathsf{P}(R < r + \Lambda h + x\Lambda^{1/2}\gamma) = \Phi(x) + \frac{\zeta}{\Lambda^{1/2}}(1 - x^2)\varphi(x) + \omega(\Lambda^{-1}),$$

где

$$|\omega| \leq C_2(F_S, F_X). \tag{5.7.3}$$

Замечание 5.7.1. Вычисление величины $C_1(\ldots)$ в правой части (5.7.2) и величины $C_2(\ldots)$ из правой части (5.7.3) связано с принципиальными техническими трудностями: в указанные выражения входит величина $\sup_z \limsup_{|t|>t_0} |f(t)|$, где $f(t)$ – характеристическая функция случайной величины H, практическое отыскание которой весьма затруднительно. Поэтому неравенства (5.7.1) и (5.7.2) имеют, прежде всего, теоретическое значение и позволяют определить порядок малости соответствующих величин по N. При этом конкретные значения $C_1(\ldots)$ и $C_2(\ldots)$ в явном виде не приводятся.

Теоремы 5.7.1 и 5.7.2 служат основой для вычисления асимптотики оптимальной страховой ставки, приводимой ниже в Теоремах 5.7.3 и 5.7.4.

Теорема 5.7.3. *Пусть N – детерминированная величина. Предположим, что задано некоторое Q, $1/2 < Q < 1$. Обозначим $q = \Psi(Q)$, $U = q + \eta(1-q^2)/N^{1/2}$, $N' = N - \eta^2 V^2$.*

I. *Предположим, что хотя бы одно из распределений F_S или F_X не является решетчатым. Тогда*

1) *если существует такая абсолютная постоянная $C' < 1$, что*

$$r/\mathsf{E}S \le C'U(1+V^2)^{1/2}BN'^{1/2},$$

то оптимальная страховая ставка имеет вид $z_0 = A + d' + \Delta$, где

$$d' = \frac{U(1+V^2)^{1/2}B}{N'^{1/2}} - \frac{r/\mathsf{E}S}{N'}, \quad \Delta = o(N^{-1});$$

2) *если*

$$U(1+V^2)^{1/2}BN'^{1/2} \le r/\mathsf{E}S \le U(1+V^2)^{1/2}BN^{1/2},$$

то оптимальная страховая ставка равна $z_0 = A + \Delta$;

3) *если существует такое $C'' > 1$, что*

$$r/\mathsf{E}S \ge C''U(1+V^2)^{1/2}BN^{1/2},$$

то существует такое N_3 (зависящее от C''), что при $N > N_3$ оптимальная страховая ставка равна $z_0 = A$.

II. *Предположим, что хотя бы одно из распределений F_S и F_X удовлетворяет условию* (5.7.1), *а также что распределение F_S имеет конечный четвертый момент. Тогда выполняется утверждение* I *и, кроме того, в случае* 1) *существует такое N_1 (зависящее от C'), что при $N > N_1$ для величины Δ, фигурирующей выше в формулировке данной теоремы, справедлива оценка*

$$|\Delta| \le \frac{C_3(F_S, F_X, Q)}{N^{3/2}},$$

а в случае 2) *существует такое N_2, что указанная оценка для величины Δ выполняется при $N > N_2$.*

Теорема 5.7.4. *Пусть N имеет распределение Пуассона с параметром Λ. Предположим, что задано некоторое Q, $1/2 < Q < 1$. Обозначим $q = \Psi(Q)$, $U = q + \eta(1-q^2)/\Lambda^{1/2}$, $\Lambda' = \Lambda - \eta^2(1+V^2)$.*

I. *Предположим, что хотя бы одно из распределений F_S или F_X не является решетчатым, или что распределение F_S является иррационально-решетчатым. Тогда*

1) *если существует такая абсолютная постоянная $C' > 1$, что*

$$r/\mathsf{E}S \geq C'U(1+V^2)^{1/2}B\Lambda'^{1/2},$$

то оптимальная страховая ставка имеет вид $z_0 = A + d' + \Delta$, где

$$d' = \frac{U(1+V^2)^{1/2}B}{\Lambda'^{1/2}} - \frac{r/\mathsf{E}S}{\Lambda}, \quad \Delta = o(\Lambda^{-1});$$

2) *если*

$$U(1+V^2)^{1/2}B\Lambda'^{1/2} \leq r/\mathsf{E}S \leq U(1+V^2)^{1/2}B\Lambda^{1/2},$$

то оптимальная страховая ставка равна $z_0 = A + \Delta$;

3) *если существует такое $C'' > 1$, что*

$$r/\mathsf{E}S \geq C''U(1+V^2)^{1/2}B\Lambda^{1/2},$$

то существует такое Λ_3 (зависящее от C''), что при $\Lambda > \Lambda_3$ оптимальная страховая ставка равна $z_0 = A$.

II. *Предположим, что хотя бы одно из распределений F_S и F_X удовлетворяет условию (5.7.1), а также что распределение F_S имеет конечный четвертый момент. Тогда выполняется утверждение* I *и, кроме того, в случае* 1) *существует такое Λ_1 (зависящее от C'), что при $\Lambda > \Lambda_1$ для величины Δ, фигурирующей выше в формулировке данной теоремы, справедлива оценка*

$$|\Delta| \leq \frac{C_4(F_S, F_X, Q)}{\Lambda^{3/2}},$$

а в случае 2) *существует такое Λ_2, что указанная оценка для величины Δ выполняется при $\Lambda > \Lambda_2$.*

5.8 Гарантированные (верхние) оценки страховых тарифов в статической модели страхования

Выше мы рассмотрели ситуацию, когда страховые суммы по договорам рассматриваемого страхового портфеля считаются независимыми случайными величинами, и для анализа этой ситуации была введена факторизационная модель (Ф-модель) индивидуального иска; построены асимптотические (при неограниченном росте объема портфеля, то есть среднего числа договоров, включаемых в портфель) оценки минимально допустимых (оптимальных) страховых ставок для различных распределений объема портфеля. Однако указанные результаты, как и любые асимптотические оценки, не дают информации о реальных величинах ставок, гарантирующих выполнение условий, предъявляемых страховщиком, для конкретных распределений объема страхового портфеля N. Поэтому естественно возникает задача определения *гарантированной* (верхней) границы для оптимальной страховой ставки (в определенном смысле аналогичная задаче построения оценок больших уклонений для сумм случайных величин).

Для решения этой задачи при анализе *модели индивидуального риска* необходимо наложить на распределение случайного иска некоторые дополнительные условия. В данном разделе рассматривается наиболее естественное в рамках Ф-модели и имеющее очевидный прикладной смысл условие равномерной ограниченности величины страховой суммы.

Мы приводим оценки оптимальной страховой ставки в двух ситуациях: когда объем страхового портфеля N заранее известен (детерминирован) и когда N имеет распределение Пуассона. В последнем случае используется оценка типа неравенства С. Н. Бернштейна для больших уклонений *обобщенных пуассоновских распределений.*

Напомним основные понятия, связанные с Ф-моделью.

Предполагается, что каждому договору страхования (с номером j) из некоторого страхового портфеля ставится в соответствие положительная для всех элементарных исходов ω случайная величина S_j, называемая страховой суммой, причем для всех ω случайная величина Y_j удовлетворяет условию $Y_j \le S_j$. Определим случайную величину $X_j = Y_j/S_j$. Очевидно, что эта случайная величина всегда определена. Величину X_j можно назвать *относительным иском* (иском, рассчитанным на единицу страховой суммы). Суть Ф-модели сводится к тому, что случайные величины X_j и S_j предполагаются некоррелированными (в разделе 4.3 приводится обоснование такого предположения, точнее, более сильного предположения о независимости указанных случайных величин). При этом величина иска может быть представлена в виде произведения независимых случайных величин:

$$Y_j = X_j S_j$$

(иски, удовлетворяющие этому условию, называются факторизуемыми).

Предположим, что для каждого договора страхования данного страхового портфеля страховая премия Z_j определяется с учетом случайной страховой суммы ("масштаба" риска) по данному договору страхования S_j как $Z_j = zS_j$, где z – некоторая постоянная для всех договоров страхования величина, называемая *ставкой премии* (или страховой ставкой). При таком подходе, очевидно, премии являются случайными величинами, зависящими от S_j. Отметим, что в силу естественных практических соображений премия Z_j не может превышать страховой суммы S_j, так что в дальнейшем будем считать, что $z \le 1$.

Предположим также, что для рассматриваемого страхового портфеля все случайные пары (X_j, S_j) независимы в совокупности и одинаково распределены. Более того, если количество N договоров страхования, включаемых в страховой портфель, является случайной величиной, то будем предполагать, что N и все векторы (X_j, S_j) независимы в совокупности. Страховой портфель, удовлетворяющий этим условиям, называется *портфелем однородных факторизуемых исков*.

Прикладные основания введения Ф-модели можно найти в разделе 4.3. Для упрощения дальнейших записей будем считать, что случайная величина S распределена так же, как и случайная величина S_j; случайная величина X – так же, как и случайная величина X_j. Пусть случайная величина S имеет не менее двух конечных моментов (очевидно, что случайная величина X имеет все моменты). Введем обозначения: $A = \mathsf{E}X$, $B^2 = \mathsf{D}X$. Пусть $\mu = \mathsf{E}S$. Обозначим коэффициент вариации случайной величины S символом V, то есть $V^2 = \mathsf{D}S/\mu^2$.

Пусть задана некоторая ставка z. Положим $d = d(z) = z - A$. Величина d является "рисковой" или "страховой надбавкой" (в иностранной литературе используются термины "security loading" или "safety loading"), то есть той надбавкой к средней величине относительного убытка, которая должна обеспечивать поставленные условия на вероятность неразорения (отметим, что в состав страховой ставки z и рисковой надбавки d не включается компонента, относящаяся к расходам "на ведение дела" страховщика).

5.8.1 Постановка задачи

Предположим, что в состав страхового портфеля включаются N договоров страхования, где N может быть известной (детерминированной) величиной или случайной величиной, распределенной по закону Пуассона с известным параметром Λ.

Статическая модель страхования (модель индивидуального риска) в достаточно общем виде может быть формально описана следующим образом: объектом исследования является распределение случайной величины итогового страхового фонда или остатка средств (surplus) страховой компании по некоторому множеству договоров страхования, то есть по некоторому страховому портфелю

$$R = r + \sum_{j=1}^{N} Z_j - \sum_{j=1}^{N} Y_j,$$

где r – начальный капитал страховщика (страховой компании) по данному страховому портфелю, N – количество договоров страхования, включенных в страховой портфель, Z_j – страховая премия, Y_j – полные (за все время действия договоров) величины выплат страховщика (индивидуальных исков) по всем договорам портфеля (величина иска может принимать нулевое значение).

В условиях Ф-модели

$$R = r + \sum_{j=1}^{N} H_j$$

и

$$\mathsf{P}(R < x) = \mathsf{P}\Big(\sum_{j=1}^{N} H_j < x - r\Big)$$

для любого r, где $H_j = S_j(z - X_j)$, случайные величины N, $H_1, H_2, \ldots$ независимы в совокупности, причем случайные величины H_j одинаково распределены. Для упрощения последующих записей будем считать, что случайная величина H распределена так же, как и случайная величина H_j. Имеющихся свойств случайных величин $\{S_j, X_j\}$ достаточно для подсчета среднего и дисперсии случайной величины H (зависящих от d):

$$h = \mathsf{E}H = \mu d, \quad g^2 = \mathsf{D}H = \mu^2[V^2 d^2 + (1 + V^2)B^2];$$

пусть $g_0^2 = \mu^2(1 + V^2)B^2$.

Предположим, что (вообще говоря) случайное число договоров страхования N, включаемых в страховой портфель, имеет не менее двух конечных моментов: $\Lambda = \mathsf{E}N$, $M^2 = \mathsf{D}N$. Отметим, что

$$\mathsf{E}R = r + \Lambda h, \quad \mathsf{D}R = \Lambda g^2 + M^2 h^2.$$

Пусть $w = V^2 + M^2/\Lambda$. Введем также “нормированную” величину начального капитала: $\rho = r/\mu$.

Напомним определение оптимальной или *минимально допустимой страховой ставки* для статической модели страхования из раздела 4.3: минимально допустимой страховой ставкой называется величина

$$z_0 = \inf\{z\ z \geq A,\ \mathsf{P}(R \geq 0) \geq Q\},$$

где R – итоговый страховой фонд, а Q – допустимая для страховщика вероятность “неразорения”.

В данном разделе будет рассмотрена задача вычисления гарантированной (верхней) границы для минимально допустимой страховой ставки , то есть отыскания такой величины z', что $z_0 \leq z'$.

Всюду ниже будем пользоваться обозначением $d = z - A$. Поиск минимально допустимой страховой ставки z_0 эквивалентен поиску величины $d_0 = z_0 - A$.

Для получения гарантированной оценки минимально допустимой страховой ставки z' будет использован, в отличие от предыдущего раздела, не аппарат центральной предельной теоремы, а другой класс результатов теории вероятностей – экспоненциальные оценки больших уклонений. Для того чтобы можно было воспользоваться оценками этого класса, нужно, чтобы распределение случайных страховых сумм удовлетворяли некоторым дополнительным условиям. Из разнообразных условий, рассматриваемых в теории (см., например, (Bennett, 1962), (Hoeffding, 1963), а также обзор (Nagaev, 1979)), наиболее естественным в рамках рассматриваемой нами Ф-модели и имеющим очевидное прикладное значение является условие равномерной ограниченности величин S_j; иначе говоря, предполагается, что $S_j \leq C$ с вероятностью 1.

Отметим, что предположение о равномерной ограниченности случайных величин S_j не является существенно ограничительным в рассматриваемой нами “страховой” тематике, так как обычно в страховой портфель включаются достаточно “однородные” объекты страхования как с точки зрения вероятностных характеристик убытков, так и с точки зрения страховых сумм. Так, например, при страховании автомобилей в страховой портфель включаются объекты примерно одного класса (скажем, только “иномарки” определенной фирмы или нескольких фирм), и разброс страховых сумм при этом невелик, причем страховщик может достаточно точно оценить максимальную страховую сумму, которая может возникнуть в договорах данного страхового портфеля. Кроме того, предположение о равномерной ограниченности страховых сумм может быть обосновано, аналогично (Beard, Pentikainen and Pesonen, 1978), тем, что на практике риски страховщика обычно ограничиваются за счет перестрахования; по этому поводу см. также (Шоргин, 1996).

5.8.2 Верхние оценки страховой ставки для детерминированного объема страхового портфеля

Приводимое ниже известное Утверждение 5.8.1 является основным теоретико-вероятностным результатом, используемым в данном разделе для построения гарантированных оценок страховой ставки. Отметим, что существуют и более точные оценки типа неравенства Бернштейна (Бернштейн, 1946) (см., например, (Булинская, 2001), но они справедливы только при определенных ограничениях на соотношение величин x и N (в некоторых "зонах" значений x относительно N); поскольку для решения задачи оценки страховой ставки необходима оценка, справедливая при всех x и N, мы будем опираться именно на Утверждение 5.8.1.

Утверждение 5.8.1. (неравенство Хёффдинга (Hoeffding, 1963)) *Если $\xi_1, \dots, \xi_N$ – независимые случайные величины, удовлетворяющие условиям*

$$\mathsf{E}\xi_j = 0, \quad \xi_j \leq L, \quad G^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mathsf{E}\xi_j^2,$$

то для любого t, $0 \leq t \leq L$,

$$\mathsf{P}(\xi_1 + \dots + \xi_N \geq Nt) \leq$$

$$\leq \exp\Big\{\frac{N(G^2+Lt)}{L^2+G^2}\ln\Big(1+\frac{Lt}{G^2}\Big) - \frac{NL(L-t)}{L^2+G^2}\ln\Big(1-\frac{t}{L}\Big)\Big\}, \qquad (5.8.1)$$

если $t = L$, то неравенство (5.8.1) *остается справедливым с заменой правой части на ее предел при $t \to L$, т. е.*

$$\mathsf{P}(\xi_1 + \dots + \xi_N \geq NT) \leq \Big[\frac{G^2}{L^2+G^2}\Big]^N;$$

если $t > L$, то, очевидно, $\mathsf{P}(\xi_1 + \dots + \xi_N \geq Nt) = 0$.

Пусть

$$W = R - r = \sum_{j=1}^{N} H_j$$

есть случайный доход страховщика по данному страховому портфелю, то есть разность между собранными страховыми премиями и страховыми выплатами. Отметим, что $\mathsf{E}W = Nh$, $\mathsf{D}W = Ng^2$, $\mathsf{E}R = r + Nh$, $\mathsf{D}R = Ng$.

Вероятность итогового разорения по данному страховому портфелю равна $\mathsf{P}(R < 0) = \mathsf{P}(W < -r)$. Так как $H_j \geq -C(1-A)$ (и эта граница достигается при $S_j = C$, $z = A$, $X_j = 1$), то $W \geq -NC(1-A)$ с вероятностью 1, т. е. $\mathsf{P}(W < u) = 0$ при $u < -NL$, где $L = C(1-A)$.

Очевидно, что

$$\mathsf{P}(W < u) = \mathsf{P}\Big(\sum_{j=1}^{N} H_j - Nh < u - Nh\Big) = \mathsf{P}\Big(\sum_{j=1}^{N} \xi_j \geq -u + Nh\Big),$$

где $\xi_j = h - H_j$. Условие

$$\mathsf{P}(R \geq 0) \geq Q, \tag{5.8.2}$$

входящее в определение минимально допустимой страховой ставки, сводится к следующему:

$$\mathsf{P}(R < 0) = \mathsf{P}\Big(\sum_{j=1}^{N} \xi_j \geq r + Nh\Big) < 1 - Q,$$

Случайные величины ξ_j имеют нулевые средние. Кроме того, очевидно, что

$$\xi_j = S_j(X_j - z) + \mu(z - A) \leq S_j(1-z) + \mu(z - A).$$

Правая часть последнего неравенства является линейной функцией от z, принимающей значения $S_j(1-A)$ при $z = A$, $\mu(1-A)$ при $z = 1$. Значит, $\xi_j \leq L = C(1-A)$. Отметим, что $h \leq L$.

Применяя к построенной последовательности случайных величин $\{\xi_j\}$ Утверждение 5.8.1, получаем (учитывая, что величина G, определяемая в соответствии с условием Утверждения 5.8.1, совпадает с g) следующую оценку.

Теорема 5.8.1. *Если $N(h - L) \leq u \leq Nh$, то*

$$\mathsf{P}(W < u) \leq$$
$$\leq \exp\Big\{-\frac{N(1+Lt)}{L^2+g^2}\ln\Big(1+\frac{Lt}{g^2}\Big) - \frac{NL(L-t)}{L^2+g^2}\ln\Big(1-\frac{t}{L}\Big)\Big\}, \tag{5.8.3}$$

где $t = h - u/N$, $L = C(1-A)$. Если $u < N(h-L)$, то $\mathsf{P}(W < u) = 0$.

Так как $\mathsf{P}(R < 0) = \mathsf{P}(W < -r)$ и $h > 0$, то справедливо следующее утверждение.

Следствие 5.8.1. *Если $0 \leq r \leq N(L - h)$, то*

$$\mathsf{P}(R < 0) \leq$$
$$\leq \exp\Big\{-\frac{N(1+Lt)}{L^2+g^2}\ln\Big(1+\frac{Lt}{g^2}\Big) - \frac{NL(L-t)}{L^2+g^2}\ln\Big(1-\frac{t}{L}\Big)\Big\},$$

где $t = h + r/N$, $L = C(1 - A)$. *Если* $r > N(L - h)$, *то* $\mathsf{P}(R < 0) = 0$.

Данное неравенство является в определенном смысле аналогом классического неравенства Лундберга (оценка вероятности разорения в динамической модели страхования) (см. раздел 7.7.1) для данной задачи, то есть для статической модели страхования с неслучайным числом договоров страхования при равномерно ограниченных страховых суммах.

Отметим, что Теорема 5.8.1 имеет и самостоятельное значение, поскольку дает гарантированную оценку вероятности того, что итоговый доход (разность между суммой премий и суммой исков) окажется меньше заданного числа и, в частности, оценку вероятности разорения. Применение центральной предельной теоремы позволяет формально заменить оценку (5.8.3) на асимптотическую формулу

$$\mathsf{P}(W < u) \sim \Phi\Big(\frac{u - Nh}{gN^{1/2}}\Big). \tag{5.8.4}$$

Последняя формула дает более низкие значения вероятности, приведенной в левой части неравенства. Но формула (5.8.4), будучи асимптотической, верна только "в пределе" при N, стремящемся к бесконечности, в то время как (5.8.3) верно для любых конечных N, удовлетворяющих условию Теоремы 5.8.1.

Перейдем к получению гарантированных оценок минимально допустимой страховой ставки.

Введем при $y > 0$ и $0 \le x < 1/y$ функцию

$$U(x, y) = \exp\Big\{-\frac{y(x + y)}{1 + y^2}\ln\Big(\frac{x + y}{y}\Big) - \frac{1 - xy}{1 + y^2}\ln(1 - xy)\Big\}, \tag{5.8.5}$$

значение $U(1/y, y)$ определим по непрерывности как $y^2/(1 + y^2)$, а значение $U(x, 0)$ аналогичным образом определим как 1 (для всех $x \ge 0$). Из (5.8.5) очевидно, что функция $U(x, y)$ при любом фиксированном y монотонно убывает при изменении x от $x = 0$ ($U(0, y) = 1$) до $x = 1/y$; нетрудно показать, что эта функция убывает и по y (см. Лемму 5.8.1 в разделе 5.8.4).

Из приведенных выше свойств функции $U(x, y)$ вытекает, в частности, что $U(x, y) < 1$.

Определим формально функцию $S(p, y)$ как решение уравнения

$$U(S(p, y), y) = p.$$

В силу монотонности функции $U(x, y)$ функция $S(p, y)$ однозначно определена при $y^2/(1 + y^2) \le p \le 1$. Отметим, что $S(1, y) = 0$ (так как $U(0, y) = 1$).

Будем в дальнейшем считать функцию $S(p,y)$ заданной (ее значения нетрудно определить с помощью компьютера, используя любой метод обращения функции $U(x,y)$). Нетрудно показать, что функция $S(p,y)$ при фиксированном y убывает по p, а при фиксированном p убывает по y (см. Лемму 5.8.2 в разделе 5.8.4).

Теорема 5.8.2. *Пусть $q = NS((1-Q)^{1/N}, g_0/L)$. Если объем страхового портфеля удовлетворяет условию*

$$N > \max\Big\{\frac{\ln(1-Q)}{\ln(g_0^2/(L^2+g_0^2))}, Vq\Big\}, \tag{5.8.6}$$

то минимально допустимая страховая ставка z_0 удовлетворяет неравенству $z_0 \leq z' = \min\{A+d', 1\}$, где величина d' при $\rho^2 \leq q^2(1+V^2)B^2$ определяется как

$$d' = \frac{[(N^2-q^2V^2)q^2(1+V^2)B^2 + q^2V^2\rho^2]^{1/2} - \rho}{N^2-q^2V^2},$$

$d' = 0$ при $\rho^2 > q^2(1+V^2)B^2$ (то есть в этом случае минимально допустимая страховая ставка равна A).

Доказательство теоремы приводится в разделе 5.8.4.

Теперь следует выяснить, насколько ограничительным является условие (5.8.6) на количество договоров страхования N. Отметим, что первая величина в фигурных скобках в правой части (5.8.6) является постоянной по N. Вторая величина зависит от N. Рассмотрим ее асимптотику при неограниченном росте N. Так как функция $U(x,y)$ стремится к 1 при $x \to 0$ и имеет при этом для любого y асимптотику $U(x,y) \sim \exp\{-x^2/2\}$, то при $p \to 1$

$$S(p,y) \sim \Big[2\ln\Big(\frac{1}{p}\Big)\Big]^{1/2}.$$

Следовательно, $q \sim [2N\ln(1-Q)^{-1}]^{1/2}$ при $N \to \infty$, то есть вторая из величин, стоящих в фигурных скобках в правой части (5.8.6), имеет вид $O(\sqrt{N})$. Тем самым условие (5.8.6) заведомо выполняется, начиная с некоторого конечного N_0, которое может быть подсчитано численно для любых конкретных Q, g_0, L, V.

В заключение данного подраздела рассмотрим асимптотику оценки z', полученной в Теореме 5.8.2, при $N \to \infty$. Приведенная выше асимптотика величины q показывает, что при неограниченном возрастании N растет и q, и, значит, при любом фиксированном r для получения асимптотики z' следует рассматривать формулу

$$d' = \frac{[(N^2-q^2V^2)q^2(1+V^2)B^2 + q^2V^2\rho^2]^{1/2} - \rho}{N^2-q^2V^2}.$$

Анализ этой формулы при $N \to \infty$ подытожен в следующем утверждении.

Следствие 5.8.2. *Для минимально допустимой страховой ставки имеет место оценка*

$$z_0 \le z' = A + d',$$

где при $N \to \infty$

$$d' \sim \Big[2 \ln \frac{1}{1-Q}\Big]^{1/2} \frac{(1+V^2)^{1/2} B}{N^{1/2}}.$$

Отметим, что асимптотика величины d' не зависит от r и что при любом r порядок величины d' по N является “правильным”, то есть совпадает с порядком аналогичной величины, соответствующей минимально допустимой страховой ставки (см. Следствие 4.6.1 и работу (Шоргин, 1997)).

5.8.3 Верхние оценки страховой ставки для объема страхового портфеля, распределенного по закону Пуассона

Чтобы получить гарантированную (верхнюю) оценку минимально допустимой страховой ставки z' в случае, когда объем страхового портфеля имеет распределение Пуассона, необходимо располагать оценкой, аналогичной результату Утверждения 5.8.1, но относящейся к обобщенному пуассоновскому распределению, то есть к распределению случайной суммы равномерно ограниченных случайных величин $\{\xi_j\}$, когда число слагаемых N имеет пуассоновское распределение. Такой оценкой послужит результат приводимой ниже Теоремы 5.8.3.

Обговорим сначала некоторые обозначения. Совпадение распределений двух случайных величин X и Y будем обозначать $X \stackrel{d}{=} Y$. Случайную величину, имеющую пуассоновское распределение с параметром Λ, как и ранее, будем обозначать Π_Λ.

Рассмотрим некоторую случайную величину ξ. Пусть $S(\Lambda)$ – случайная величина, совпадающая по распределению со случайной суммой независимых копий случайной величины ξ, взятых в количестве $N \stackrel{d}{=} \Pi_\Lambda$, где случайная величина N не зависит от слагаемых.

Если $\mathsf{E}\xi = a$ и $\mathsf{D}\xi = b^2$, то $\mathsf{E}S(\Lambda) = \Lambda a$, $G^2 \equiv \mathsf{D}S(\Lambda) = \Lambda(a^2 + b^2)$.

Теорема 5.8.3. *Предположим, что случайная величина* ξ *удовлетворяет условию*

$$|\xi| \le m \quad \text{с вероятностью} \quad 1, \tag{5.8.7}$$

где m – некоторая положительная постоянная. Тогда для всех $x \geq 0$

$$\mathsf{P}(S(\Lambda) - \Lambda a \geq Gx) \leq \exp\Big\{ -x^2 \frac{(1+\zeta)\ln(1+\zeta') - \zeta'}{\zeta^2}\Big\},$$

где $\zeta = xm/G$, $\zeta' = \min\{\zeta, e-1\}$.

Отметим, что по форме данный результат очень близок к оценке из (Bennett, 1962), полученной для сумм неслучайного числа ограниченных случайных величин. Однако в соответствующей оценке Беннетта вместо величины ζ' фигурирует ζ, что, естественно, обеспечивает более высокий порядок убывания правой части указанной оценки по сравнению с результатом Теоремы 5.8.3 при растущем ζ, то есть при x, растущем быстрее, чем величина G – стандартное отклонение суммы $S(\Lambda)$. При значениях $\zeta \leq e-1$ (то есть в зоне значений x, привлекающей главное внимание исследователей) правые части указанных оценок совпадают.

Аналогичный (5.8.7) порядок убывания правой части имеет оценка для вероятности больших уклонений обобщенного пуассоновского распределения, полученная в (Ротарь, 1976) (по-видимому, именно в этой работе впервые получена экспоненциальная оценка для хвостов распределений пуассоновских случайных сумм). Отметим, что оценка Г. В. Ротарь получена путем прямого переноса метода доказательства неравенства Бернштейна на ситуацию случайных сумм, поэтому результат Теоремы 5.8.3 в определенном смысле должен быть настолько же точнее оценки из (Ротарь, 1976), насколько оценка Беннета точнее, чем классическое неравенство Бернштейна. Проведенные численные расчеты подтверждают это. Естественно, данный вопрос требует точного математического сравнения упомянутых результатов. Здесь мы это сравнение проводить не будем.

Полное доказательство Теоремы 5.8.3 приводится в разделе 5.8.4. Отметим, что при доказательстве этой теоремы используются несколько лемм, содержащихся в указанном разделе. Однако формулировку одной из этих лемм мы приведем уже здесь (см. Лемму 5.8.1 ниже). Это связано с тем, что данная лемма может иметь самостоятельное значение, так как дает возможность получать новые оценки для $\mathsf{P}(S(\Lambda) - \mathsf{E}S(\Lambda) \geq Gx)$, где слагаемые случайной суммы $S(\Lambda)$ равномерно ограничены, за счет построения "базовых" оценок для распределений сумм неслучайного числа слагаемых вида $\sum_{j=1}^{n} Z_j$ для ситуации, в которой моменты одинаково распределенных центрированных случайных величин Z_j удовлетворяют условиям вида (5.8.8). При доказательстве Теоремы 5.8.3 (см. раздел 5.8.6) в качестве "базовой" оценки (для сумм с неслучайным индексом) взята оценка, формулируемая в разделе 5.8.4 в виде Леммы 5.8.6. Естественно, улучшение данной оценки приведет к построению (с помощью Леммы 5.8.1) новых экспоненциальных оценок для случайных сумм при равномерно ограниченных слагаемых, более точных, чем результат Теоремы 5.8.3.

Определение 5.8.1. Определим при любом h, удовлетворяющем условию $h \leq 2/(e-1)-1$, и при любом $m>0$ класс распределений $K'(h,m)$ как класс всех распределений таких центрированных случайных величин Z, что при всех $k=2,3,\dots$ выполняются неравенства

$$|\mathsf{E}Z^k| \leq m[1+h(k-1)!]\mathsf{E}Z^2. \tag{5.8.8}$$

Лемма 5.8.1. *Если для любой случайной величины Z, распределение которой принадлежит классу $K'(h,m)$, при $n=1,2,\dots$ и $x \in \Xi\{n\mathsf{E}Z_1^2\}$, где $\Xi\{\cdot\}$ есть некоторое подмножество неотрицательной полупрямой, справедлива некоторая оценка*

$$\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} Z_j \geq G_n x\Big) \leq U(x,h,m,G_n)$$

(где $Z_i \stackrel{d}{=} Z$ суть независимые случайные величины, $i=1,\dots,n$, $G_n = n\mathsf{E}Z^2$), то для случайной величины $S(\Lambda) \stackrel{d}{=} \{\Pi_\Lambda,\xi\}$, где $\xi \leq m$ с вероятностью 1, при $G=\mathsf{D}S(\Lambda)$ и $x\in\Xi\{G^2\}$ справедлива оценка

$$\mathsf{P}(S(\Lambda)-\mathsf{E}S(\Lambda) \geq Gx) \leq \inf_{h\leq 2/(e-1)-1} U(x,\Lambda/n,m,G).$$

Итак, перейдем к формулировке основанных на Теореме 5.8.3 результатов, содержащих оценки для минимально допустимой страховой ставки в ситуации, когда объем страхового портфеля N является случайной величиной, распределенной по закону Пуассона с известным параметром Λ. Как и ранее, предполагается, что для случайной страховой суммы S выполняется условие $|S| \leq C$ с вероятностью 1.

Отметим, что параметры случайной величины R и определяемой аналогично п. 5.8.2 случайной величины W в данном случае таковы:

$$\mathsf{E}W=\Lambda h,\quad \mathsf{D}W=\Lambda(h^2+g^2),\quad \mathsf{E}R=r+\Lambda h,\quad \mathsf{D}R=\mathsf{D}W.$$

Имеем:

$$\mathsf{P}(W<u)=\mathsf{P}\Big(\sum_{j=1}^{N} H_j-\Lambda h<u-\Lambda h\Big)=\mathsf{P}\Big(\sum_{j=1}^{N}\xi_j+\Lambda h>-u+\Lambda h\Big),$$

где $\xi_j = -H_j$; $\mathsf{E}\xi_j = -h$. Условие на вероятность “неразорения” (5.8.2) сводится к следующему:

$$\mathsf{P}(R < 0) = \mathsf{P}\Big(\sum_{j=1}^{N} \xi_j + \Lambda h \geq r + \Lambda h\Big) < 1 - Q,$$

Очевидно, что $|\xi_j| = |H_j| \leq C$. Применяя Теорему 5.8.3, с учетом того, что $G^2 = \Lambda \mathsf{E}\xi_1^2 = \Lambda(h^2 + g^2)$, получаем следующее утверждение.

Теорема 5.8.4. *При* $u \leq \Lambda h$

$$\mathsf{P}(W < u) < \exp\Big\{ -\frac{\Lambda(h^2+g^2)}{C^2}[(1+\zeta)\ln(1+\zeta') - \zeta']\Big\}, \qquad (5.8.9)$$

где $\zeta = C(-u + \Lambda h)/(\Lambda(h^2+g^2))$, $\zeta' = \min\{\zeta, e-1\}$.

Отметим, что эта теорема так же, как и Теорема 5.8.1, имеет самостоятельное значение, так как задает гарантированную оценку вероятности того, что итоговый “доход” окажется меньше заданного числа. Применение центральной предельной теоремы для пуассоновских случайных сумм (см. раздел 1.7) позволяет заменить оценку (5.8.9) асимптотической формулой

$$\mathsf{P}(W < u) \sim \Phi\Big(\frac{u - \Lambda h}{\Lambda(h^2+g^2)}\Big). \qquad (5.8.10)$$

Аналогично п. 5.8.2, последняя формула дает меньшие значения вероятности, приведенной в левой части неравенства, но формула (5.8.9), в отличие от (5.8.10), применима для любых конечных Λ, удовлетворяющих условиям Теоремы 5.8.4.

Следствие 5.8.3. *При* $r \geq 0$

$$\mathsf{P}(R < 0) < \exp\Big\{ -\frac{\Lambda(h^2+g^2)}{C^2}[(1+\zeta)\ln(1+\zeta') - \zeta']\Big\},$$

где

$$\zeta = C(r + \Lambda h)/(\Lambda(h^2+g^2)), \quad \zeta' = \min\{\zeta, e-1\}.$$

Если $r + \Lambda h \geq (e-1)\Lambda(h^2+g^2)/C$, *то*

$$\mathsf{P}(R < 0) \leq \exp\Big\{(e-2)\frac{\Lambda(h^2+g^2)}{C^2} - \frac{\Lambda h}{C}\Big\}\exp\Big\{-\frac{r}{C}\Big\}.$$

Последнее неравенство может трактоваться также как аналог неравенства Лундберга (см. раздел 8.7.1) для рассматриваемой задачи.

Перейдем к вычислению верхней оценки для минимально допустимой страховой ставки. Введем при $w \geq 0$ функцию $F(w)$, равную

$$F(w) = \begin{cases} (1+w)\ln(1+w) - w & \text{при} \quad w \leq e-1, \\ 2 - e + w & \text{при} \quad w \geq e-1. \end{cases}$$

Очевидно, функция $F(w)$ непрерывна и монотонно возрастает по w. Далее, определим формально функцию $T(u)$ при $u > 0$ как решение уравнения $F(T(u)) = u$.

В силу монотонности функции $F(w)$ функция $T(u)$ однозначно определена при $u \geq 0$ и также монотонно возрастает. Очевидно, что при $u \geq 1$ мы имеем равенство $T(u) = u + e - 2$.

Будем в дальнейшем считать функцию $T(u)$ заданной (ее значения при $u \leq 1$ нетрудно получить численно).

Теорема 5.8.5 *Пусть*

$$q = \frac{\Lambda g_0}{C} T\Big(\frac{C^2}{\Lambda g_0^2} \ln \frac{1}{1-Q}\Big).$$

Если среднее количество договоров страхования Λ удовлетворяет условию

$$\Lambda^2 > q^2(1+V^2), \tag{5.8.11}$$

то минимально допустимая страховая ставка z_0 удовлетворяет неравенству

$$z_0 \leq z' = A + d',$$

где величина d' при $\rho^2 \leq q^2(1+V^2)B^2$ определяется как

$$d' = \frac{[(\Lambda^2 - q^2(1+V^2))q^2(1+V^2)B^2 + q^2V^2\rho^2]^{1/2} - \rho}{\Lambda^2 - q^2(1+V^2)},$$

а при $\rho^2 > q^2(1+V^2)B^2$ – как $d' = 0$ (то есть в таком случае минимально допустимая страховая ставка равна A).

Д о к а з а т е л ь с т в о Теоремы 5.8.5 содержится в разделе 5.8.6.

Аналогично п. 5.8.2 следует выяснить, насколько ограничительным является условие (5.8.11) на среднее количество договоров страхования Λ.

Так как $F(w) \sim w^2/2$ при $w \to 0$, то $T^2(u) \sim 2u$ при $u \to 0$. Значит, при $\Lambda \to \infty$

$$T^2\Big(\frac{C^2}{\Lambda g_0^2} \ln \frac{1}{1-Q}\Big) \sim 2\frac{C^2}{\Lambda g_0^2} \ln \frac{1}{1-Q} \quad \text{и} \quad q \sim \Big[2 \ln \frac{1}{1-Q} \Lambda\Big]^{1/2}.$$

Итак, правая часть (5.8.11) имеет при $\Lambda \to \infty$ меньший порядок, чем левая часть. Значит, начиная с некоторого конечного Λ, которое нетрудно найти численно, (5.8.11) выполняется.

Рассмотрим также асимптотику оценки для z, полученной в Теореме 5.8.5, при $\Lambda \to \infty$. Из вида только что указанной асимптотики для q вытекает, что при неограниченном возрастании Λ растет и q, и, значит, имеет место следующий результат.

Следствие 5.8.4. *Для минимально допустимой страховой ставки имеет место оценка*

$$z_0 \le z' = A + d',$$

где при $N \to \infty$

$$d' \sim \Big[2\ln\frac{1}{1-Q}\Big]^{1/2}\frac{(1+V^2)^{1/2}B}{\Lambda^{1/2}},$$

Отметим, что эта асимптотика не зависит от r и что порядок величины d' по Λ является “правильным”, т. е. совпадает с порядком аналогичной величины, соответствующей минимально допустимой страховой ставке (см. Следствие 5.6.2 или работу (Шоргин, 1997)).

5.9 Доказательства теорем.

5.9.1 Доказательство теоремы 5.8.2.

Доказательству теоремы 5.8.2 предпошлем следующие две леммы.

Лемма 5.9.1. *Функция* $U(x,y)$ *убывает по* y.

Доказательство. Очевидно,

$$[\ln U(x,y)]'_y = -\frac{[2y + x - xy^2][\ln(1+x/y) - \ln(1-xy)] - 2x(1+y^2)}{(1+y^2)^2}.$$

Обозначая $(1+x/y)/(1-xy) = 1+u$, получаем:

$$[\ln U(x,y)]'_y = -\frac{2y+x-xy^2}{(1+y^2)^2}\Big[\ln(1+u) - \frac{2u}{2+u}\Big].$$

Так как $2y+x-xy^2 > 0$, а также $\ln(1+u) - 2u/(2+u) > 0$ при $u > 0$, то при $x > 0$ справедливо неравенство $[\ln U(x,y)]'_y < 0$. Лемма доказана. □

Лемма 5.9.2. *Функция $S(p, y)$ при фиксированном y убывает по p, а при фиксированном p убывает по y.*

Доказательство. 1. В силу монотонного убывания функции $U(x, y)$ по x при любом фиксированном y обратная к ней по аргументу x функция $S(p, y)$ также монотонно убывает по p при любом фиксированном y.

2. Так как $U(S(p, y), y) = p$, а функция $U(x, y)$ убывает по x, то знак частной производной функции S по p совпадает со знаком частной производной функции $U(x, y)$ по y. Как отмечалось выше, $U(x, y)$ убывает по y и, следовательно, $S(p, y)$ также убывает по y. Лемма доказана. □

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 5.8.2. Прежде всего отметим, что величина $\mathsf{P}(R < 0)$ убывает с ростом d, и, следовательно, если при некотором $d = d'$ справедливо (5.8.2), то это неравенство справедливо и при всех $d \geq d'$.

Так как $\mathsf{P}(R < 0) = \mathsf{P}(W < -r)$, то в силу следствия 5.8.1 и формулы (5.8.5) при $0 \leq r \leq N(L - h)$

$$\mathsf{P}(R < 0) \leq U^N(\eta, g/L),$$

где $\eta = (r + Nh)/(Ng)$. Если же $r > N(L - h)$, то $\mathsf{P}(R < 0) = 0$. Значит, для справедливости (5.8.2) достаточно, чтобы при $0 \leq r \leq N(L - h)$

$$U(\eta, g/L) \leq (1 - Q)^{1-N}, \tag{5.9.1}$$

либо чтобы выполнялось неравенство $\eta > L/g$.

Очевидно, что любая величина z, удовлетворяющая (5.9.1), является верхней оценкой для минимально допустимой страховой ставки. Отметим, что параметры h и g зависят от d. Поэтому ниже мы заменим неравенство (5.9.1) на несколько усиленное неравенство; любое решение "усиленного" неравенства, по-прежнему, будет являться верхней оценкой для z_0, при этом результат будет получен в "замкнутом" виде.

Из леммы 5.9.1 следует, что замена в левой части (5.9.1) величины g на ее нижнюю оценку g_0 (не зависящую от d) приводит к усилению неравенства, т. е. любое z, удовлетворяющее условию

$$U(\eta, g_0/L) \leq (1 - Q)^{1/N}, \tag{5.9.2}$$

заведомо удовлетворяет и (5.9.1). Это значит, что величина d', являющаяся нижней гранью решений (5.9.2), заведомо является верхней оценкой минимально допустимой страховой ставки.

В силу (5.8.6) справедливо неравенство

$$(1 - Q)^{1/N} > g_0^2/(L^2 + g_0^2) \tag{5.9.3}$$

Заметим, что в случае, когда (5.9.3) не выполняется, величина $(1 - Q)^{1/N}$ строго меньше минимального значения функции U по η, и неравенство (5.9.2) не имеет решений; это означает, что величина Q выбрана слишком близкой к единице для данных параметров N, g_0, L, или что N слишком мало для данных параметров Q, g_0, L.

В силу убывания функции $S(p, y)$ по y и условия (5.8.6) неравенство (5.9.2) эквивалентно неравенству $\eta \geq S((1 - Q)^{1/N}, g_0/L)$. Функция S определена в точке $((1 - Q)^{1/N}, g_0/L)$, так как в силу (5.9.3)

$$\frac{g_0^2/L^2}{1 + g_0^2/L^2} \leq (1 - Q)^{1/N}.$$

Итак, z является верхней оценкой для минимально допустимой страховой ставки, если выполняется хотя бы одно из неравенств:

$$\eta \geq S((1 - Q)^{1/N}, g_0/\Lambda) \tag{5.9.4}$$

(причем это неравенство можно рассматривать без ограничений на r) и

$$\eta > L/g. \tag{5.9.5}$$

Так как правая часть (5.9.4) с ростом N стремится к нулю ($S(1, y) = 0$), то условие (5.9.5) можно опустить. При этом верхняя оценка ставки может, вообще говоря, возрасти, но при достаточно больших N этого увеличения не происходит. Итак, следует рассмотреть неравенство

$$\frac{r + Nh}{g} \geq NS((1 - Q)^{1/N}, g_0/L). \tag{5.9.6}$$

Так как $q = NS((1-Q)^{1/N}, g_0/L)$, то неравенство (5.9.6) является квадратным неравенством относительно d, которое можно записать в виде

$$(N - q^2V^2)d + 2\rho Nd + \rho^2 - q^2(1 + V^2)B \geq 0. \tag{5.9.7}$$

Сразу отметим, что при $\rho^2 \geq q^2(1+V^2)B$ и при $d = 0$ неравенство (5.9.7) выполняется, то есть в этом случае при $d = 0$ выполняется (5.8.2). В силу соображений, приведенных в начале доказательства данной теоремы, это означает, что (5.8.2) выполняется при всех $d > 0$, то есть величина $z = A$ является искомой минимально допустимой страховой ставкой.

Теперь рассмотрим случай $\rho^2 < q^2(1 + V^2)B^2$. Пусть

$$\Delta = \rho N + (N - qV^2)[q^2(1 + V^2)B - \rho^2] = (N - qV^2)q^2(1 + V^2)B + qV\rho^2.$$

Величина Δ пропорциональна дискриминанту квадратного трехчлена, фигурирующего в левой части (5.9.7). Так как $N^2 - q^2V^2 > 0$, то старший коэффициент квадратного неравенства (5.9.7) положителен и $\Delta > 0$. Значит, (5.9.7) имеет место при $d \geq d'$, где $d' = (-\rho + \Delta^{1/2})/(N^2 - q^2V^2)$, то есть $z' = A + d'$ является верхней оценкой минимально допустимой страховой ставки. Кроме того, верхней оценкой минимально допустимой страховой ставки является единица. Тем самым доказательство теоремы завершено. □

5.9.2 Доказательство теоремы 5.8.3.

Для того чтобы доказать теорему 5.8.3, нам потребуются некоторые предварительные результаты. Среди этих результатов – сформулированная в разделе 5.8.2 лемма 5.8.1; отметим, что утверждение этой леммы очевидным образом вытекает из приводимых ниже лемм 5.9.3 и 5.9.5.

Пусть рассматриваемая в формулировке теоремы 5.8.3 случайная вкличина ξ имеет характеристическую функцию $g(t)$. Пусть n – произвольное натуральное число, $h = \Lambda/n$. Рассмотрим случайную величину $S(h)$, имеющую характеристическую функцию

$$\widehat{g}(t) = \exp\{h(g(t) - 1)\}. \tag{5.9.8}$$

Так как характеристическая функция случайной величины $S(\Lambda)$ равна $\widehat{g}^n(t)$, то случайная величина $S(\Lambda)$ распределена так же, как сумма n независимых случайных величин $\xi_i' \stackrel{d}{=} S(h)$. Отметим, что $\mathsf{E}\, S(h) = ah = a\Lambda/n$, $\mathsf{D}\, S(h) = h(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)\Lambda/n$.

Отсюда немедленно вытекает следующее утверждение, которое, несмотря на простоту доказательства, играет главную роль при доказательстве теоремы 5.8.3.

Лемма 5.9.3. *Пусть распределение случайной величины ξ с характеристической функцией $g(t)$ принадлежит некоторому классу K, причем из этого вытекает, что распределение случайной величины $S(h) - ah$ с характеристической функцией* (5.9.8) *при значениях h из некоторого множества θ принадлежит некоторому другому классу $K'(h)$. Если при любом $h \in \theta$ и $n = 1, 2, \ldots$ для всех последовательностей одинаково распределенных случайных величин $Z_1, Z_2, \ldots$ с* $\mathsf{E}\, Z = 0$, *общее распределение которых принадлежит классу $K'(h)$, имеет место некоторая оценка*

$$\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} Z_i \geq x[n\,\mathsf{E}\, Z_1^2]^{1/2}\Big) \leq U(x, h, n)$$

(при $x \in \Omega\{n\,\mathsf{E}\,Z_1^2\}$, где $\Omega\{n\,\mathsf{E}\,Z_1^2\}$ – некоторое подмножество неотрицательной полупрямой, зависящее от величины $n\,\mathsf{E}\,(Z_1^2)$), то при любых $\Lambda > 0$ и $x \in \Omega(G^2)$

$$\mathsf{P}\,(S(\Lambda) - \mathsf{E}\,S(\Lambda) > Gx) \leq \inf_{n\;\Lambda/n \in \theta} U(x, \Lambda/n, n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых $x \geq 0$, $x \in \Omega(G^2)$ и n таких, что $h = \Lambda/n \in \theta$ и независимых случайных величин $S_i(h) \stackrel{d}{=} S(h)$

$$\mathsf{P}\Big(\frac{S(\Lambda) - \mathsf{E}\,S(\Lambda)}{G} \geq x\Big) = \mathsf{P}\Big(\frac{1}{G}\sum_{i=1}^{n}[S_i(h) - \mathsf{E}\,S_i(h)] \geq x\Big) \leq U(x, h, n)$$

(неравенство имеет место, поскольку общее распределение случайных величин $Z = S_i(h) - \mathsf{E}\,S_i(h)$, $i = 1, \ldots, n$, принадлежит классу $K'(h)$, а $n\,\mathsf{E}\,Z_1^2 = G^2$). В силу произвольности параметра n имеет место утверждение леммы. $\square$

Обозначим моменты случайной величины ξ (при условии их существования) $\alpha_k = \mathsf{E}\,\xi^k$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Очевидно, $\alpha_2 = a^2 + b^2$.

Лемма 5.9.4. *Если конечен n-й момент случайной величины ξ, то при $0 \leq k \leq n$ центральные моменты $\mu_k(h) = \mathsf{E}\,[S(h) - ha]^k$ случайной величины $S(h)$ могут быть вычислены по следующим рекуррентным формулам:*

$$\mu_0(h) = 1, \quad \mu_1(h) = 0, \quad \mu_k(h) = h\Big[\alpha + \sum_{j=2}^{k-2} C_{k-1}^j \mu_j(h)\alpha_{k-j}\Big] \quad \text{при} \quad k \geq 2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим характеристическую функцию случайной величины $S(h) - ha$ через $\widehat{G}(t, h)$, $\widehat{G}(t, h) = \exp\{h(g(t) - 1 - ita)\}$. Очевидно, что

$$i\mu_k(h) = \frac{d^k}{dt^k}\widehat{G}(t, h)\Big|_{t=0} = h\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\{[g'(t) - ia]\widehat{G}(t, h)\}\Big|_{t=0} =$$

$$= h\sum_{j=0}^{k-2} C_{k-1}^j \widehat{G}(t, h)\Big|_{t=0}\frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}}g(t)\Big|_{t=0} = h\sum_{j=0}^{k-2} C_{k-1}^j i^j \mu_j(h) i^{k-j}\alpha_{k-j},$$

откуда следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 5.9.4 дополняет утверждение 2 Теоремы 2.1.2, устанавливающее рекуррентные соотношения для *начальных* моментов пуассоновских случайных сумм.

Лемма 5.9.5. *Если случайная величина ξ удовлетворяет условию (5.8.7) и*

$$h \leq 2/(e - 1) - 1, \tag{5.9.9}$$

то при $k \geq 2$

$$|\mu_k(h)| \leq \mu_2(h)\mu^{k-2}[1 + h\,(k-1)!]. \tag{5.9.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем по индукции. Очевидно, что $\mu_2(h)$ удовлетворяет условию леммы. Отметим, что $\mu_2(h) = h\alpha_2$.

Пусть утверждение леммы справедливо при $j = 2, \ldots, k-1$, $k \geq 3$. Отметим, что при $j \geq 2$ и $h \leq 2/(e-1) - 1$

$$1 + h(j-1)! \leq j!/(e-1). \tag{5.9.11}$$

В силу леммы 5.9.4

$$h^{-1}|\mu_k(h)| \leq |\alpha_k| + \sum_{j=2}^{k-2} C_{k-1}^j |\mu_j(h)||\alpha_{k-j}|.$$

Используя условие на случайную величину ξ, предположение индукции и (5.9.9)–(5.9.11), имеем

$$h^{-1}|\mu_k(h)| \leq \alpha_2 m^{k-2}\Big[1 + (k-1)!\frac{h}{e-1}\sum_{j=2}^{k-2}\frac{1}{(k-1-j)!}\Big] \leq$$

$$\leq \alpha m^{k-2}[1 + h(k-1)!] = h^{-1}\mu_2(h)m^{k-2}[1 + h(k-1)!].$$

Лемма доказана. □

Лемма 5.9.6. *Если распределение случайной величины* Z *принадлежит классу* $K'(h,m)$, *то при* $G_n = n\,\mathsf{E}\,Z^2$ *для независимых случайных величин* $Z_j \stackrel{d}{=} Z$ *справедливо неравенство*

$$\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n Z_i \geq G_n x\Big) \leq U(x,h,m,G_n) = \exp\Big\{\frac{p^2}{2}G_n^2 F_h(pm) - pG_n x\Big\}, \tag{5.9.12}$$

где $p = p(h)$ *– решение уравнения*

$$e^{pm} - 1 + h\Big\{2pm\Big(\ln\frac{1}{1-pm} - pm - \frac{p^2m^2}{2}\Big) + \frac{p^4m^4}{1-pm}\Big\} = \zeta, \tag{5.9.13}$$

где $\zeta = xm/G$ *(причем величина* $p(h)$ *существует и единственна),*

$$F_h(v) = \frac{e^v - 1 - v}{v^2/2} + 2h\Big(\ln\frac{1}{1-v} - v - v^2\Big).$$

При этом правая часть (5.9.12) *является возрастающей функцией аргумента* h.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что при любом $s > 0$, при котором существует $\mathsf{E}\exp(sZ)$,

$$\mathsf{E}\exp(sZ) = 1 + \frac{s^2}{2}\,\mathsf{E}\,Z^2 + \frac{s^3}{6}\,\mathsf{E}\,Z^3 + \cdots .$$

Условие (5.8.8) позволяет мажорировать правую часть последнего равенства при $v = s\mu < 1$ величиной

$$1 + \frac{s^2}{2}\,\mathsf{E}\,Z^2\Big(1 + 2m\frac{1+2!h}{3!}s + 2m\frac{1+3!h}{4!}s^2 + \cdots\Big) =$$

$$= 1 + \frac{s^2}{2}\,\mathsf{E}\,Z^2\Big[1 + 2\Big(sm\frac{1}{3!} + s^2m^2\frac{1}{4!} + \cdots\Big) + 2h\Big(sm\frac{1}{3} + s^2m^2\frac{1}{4!} + \cdots\Big)\Big] =$$

$$= 1 + \frac{s^2}{2}\,\mathsf{E}\,Z^2\Big[\frac{e^v - 1 - v}{v^2/2} + 2h\Big(\ln\frac{1}{1-v} - v - \frac{v^2}{2}\Big)\Big] =$$

$$= 1 + \frac{s^2}{2}\,\mathsf{E}\,Z^2F_h(v) \le \exp\Big\{\frac{s^2}{2}\,\mathsf{E}\,Z^2F_h(v)\Big\}.$$

Пусть

$$f(h,s) = \frac{s^2}{2}G_n^2F_h(sm) - sG_nx =$$

$$= \frac{G_n^2}{m^2}(e^{sm} - 1 - sm) + s^2G_n^2h\ln\Big(\frac{1}{1-sm} - sm - \frac{s^2m^2}{2}\Big) - sG_n^2x.$$

Имеем:

$$\mathsf{P}(S(\Lambda) \ge G_nx) \le [\mathsf{E}\exp(sZ)]^n\exp\{-sG_nx\} \le$$

$$\le \exp\Big\{\frac{s^2}{2}G_n^2F_h(sm) - sG_nx\Big\} = \exp\{f(h,s)\}.$$

Нетрудно убедиться, что минимум функции $f(h,s)$ достигается при $s = p(h)$, где $p(h)$ определяется в соответствии с (5.9.13); так как в левой части (5.9.13) фигурирует функция, монотонно возрастающая на интервале (0,1) от 0 до ∞, то $p(h)$, очевидно, существует и лежит в пределах $0 < p < 1$. Кроме того, отметим, что при любом s функция $f(h,s)$ возрастает по h и, значит, $\min_s f(h,s)$ также возрастает по h. Тем самым лемма доказана. □

Приступим к доказательству теоремы 5.8.3. В соответствии с леммами 5.9.5–5.9.6 и 5.8.1

$$\mathsf{P}(S(\Lambda) - A \ge Gx) \le \inf_{h \ge 2/(e-1)-1}\exp\Big\{\frac{p^2}{2}G_n^2F_h(pm) - pG_nx\Big\} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\exp\Big\{\frac{p^2}{2}G_n^2F_h(pm) - pG_nx\Big\}. \qquad (5.9.14)$$

где $\zeta = xm/G$, $p = p(h)$ определяется в соответствии с (5.9.13) (последнее равенство и существование предела вытекают из того, что правая часть (5.9.12) является возрастающей функцией по h).

Обозначим символом q решение уравнения $e^{qm} - 1 = \zeta$, то есть $q = \ln(1+\zeta)/m$. Отметим, что всегда имеет место неравенство $p(h) < q$.

Если $qm < 1$, то есть $\zeta < e - 1$, то $p(h)\mu < 1$ и предел левой части (5.9.13) при $h \to 0$ равен $e^{qm} - 1$. Значит, в этом случае $p(h) \to q$, $F_h(pm) \to F_0(qm)$, и соотношение (5.9.14) приобретает вид

$$\mathsf{P}(S(\Lambda) - A \geq Gx) \leq \exp\Big\{G_n^2 \frac{\zeta - \ln(1+\zeta)}{m^2} - G_n x \frac{\ln(1+\zeta)}{m}\Big\} =$$

$$= \exp\Big\{-x\frac{(1+\zeta)\ln(1+\zeta) - \zeta}{\zeta^2}\Big\}. \tag{5.9.15}$$

Если $qm \geq 1$, то есть $\zeta \geq e - 1$, то $p(h)m \to 1$ при $h \to 0$. Обозначим символом q' величину $1/m$. При этом $p(h) \to q'$. Так как в этом случае

$$\lim_{h\to 0} h\Big[2pm\Big(\ln\frac{1}{1-pm} - pm - \frac{p^2m^2}{2}\Big) + \frac{p^4m^4}{1-pm}\Big] = \zeta - e + 1,$$

то

$$\lim_{h\to 0} h\Big(2\ln\frac{1}{1-pm} + \frac{1}{1-pm}\Big) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{1-pm}\Big\{2\frac{\ln[1/(1-pm)]}{1-pm} + 1\Big\} = \zeta - e + 1.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{h\to 0} h\Big[\ln\frac{1}{1-pm} - pm - \frac{p^2m^2}{2}\Big] = 0, \quad \lim_{h\to 0} F_h(pm) = -\frac{q'm}{q'^2m^2/2}$$

и

$$\lim_{h\to 0}\exp\Big\{\frac{p^2}{2}G_n^2F_h(pm) - pG_nx\Big\} = \exp\Big\{G_n^2\frac{e^{q'm} - 1 - q'm}{m^2/2} - q'G_nx\Big\}.$$

Положим $\zeta' = e - 1 = e^{q'm} - 1$. Тогда последнее выражение можно переписать как

$$\exp\Big\{G_n^2\frac{\zeta' - \ln(1+\zeta')}{m^2} - G_nx\frac{\ln(1+\zeta')}{m}\Big\} =$$

$$= \exp\Big\{\frac{x^2[\zeta' - \ln(1+\zeta')]}{\zeta^2} - x\frac{\ln(1+\zeta')}{\zeta}\Big\} =$$

$$= \exp\Big\{-x^2\frac{(1+\zeta)\ln(1+\zeta') - \zeta'}{\zeta^2}\Big\}. \tag{5.9.16}$$

Объединяя (5.9.15) и (5.9.16), получаем утверждение теоремы.

5.9.3 Доказательство теоремы 5.8.5.

Для доказательства теоремы 5.8.5 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5.9.7. *При любом фиксированном x функция $y^2F(x/y)$ монотонно возрастает по y.*

Доказательство. При $x/y > e-1$ утверждение леммы очевидно, а при $x/y \le e-1$ вытекает из того, что

$$[y^2F(x/y)]'_y = (2y+x)\ln(1+x/y)-2x = y[(2+x/y)\ln(1+x/y)-2x/y] \ge 0$$

и

$$\lim_{y\to 0} y^2F(x/y) = 0. \quad \square$$

Приступим к доказательству теоремы 5.8.5. Так как $\mathsf{P}(R<0) = \mathsf{P}(W<-r)$, то в силу следствия 5.8.3

$$\mathsf{P}(R<0) \le \exp\Big\{-\frac{\Lambda(h^2+g^2)}{C^2}[(1+\zeta)\ln(1+\zeta')-\zeta']\Big\},$$

где $\zeta = C(r+\Lambda h)/(\Lambda(h^2+g^2))$, $\zeta' = \min\{\zeta, e-1\}$, и, следовательно,

$$\mathsf{P}(R<0) \le \exp\Big\{-\frac{\Lambda(h^2+g^2)}{C^2}F(\zeta)\Big\}.$$

Так как $G^2 = \Lambda(h^2+g^2)$, то $\zeta = C\eta/G$, где $\eta = (r+\Lambda h)/G$, и, значит,

$$\mathsf{P}(R<0) < \exp\Big\{-\frac{G^2}{C^2}F\Big(\frac{C\eta}{G}\Big)\Big\}.$$

Значит, для выполнения условия (5.8.2) на вероятность “неразорения” достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\exp\Big\{-\frac{G^2}{C^2}F\Big(\frac{C\eta}{G}\Big)\Big\} \le 1-Q. \qquad (5.9.17)$$

Из леммы 5.9.7 следует, что замена в левой части (5.9.17) величины G^2 на ее нижнюю оценку (не зависящую от d) $G_0^2 = \Lambda g_0^2$ приводит к усилению неравенства, то есть любое d, удовлетворяющее условию

$$\exp\Big\{-\frac{G_0^2}{C^2}F\Big(\frac{C\eta}{G_0}\Big)\Big\} \le 1-Q, \qquad (5.9.18)$$

заведомо удовлетворяет и (5.9.17). Это значит, что величина d', являющаяся нижней гранью решений (5.9.18), заведомо является верхней оценкой минимально допустимой страховой ставки. Неравенство (5.9.18) эквивалентно следующему:

$$F\Big(\frac{C\eta}{\Lambda^{1/2}g_0}\Big) \geq \frac{C^2}{\Lambda g_0^2}\ln\frac{1}{1-Q}. \tag{5.9.19}$$

В свою очередь, в силу возрастания функции $F(w)$ по w неравенство (5.9.19) эквивалентно следующему неравенству:

$$\eta = \frac{r+\Lambda h}{[\Lambda(h^2g^2)]^{1/2}} \geq \frac{\Lambda^{1/2}g_0}{C}T\Big[\frac{C^2}{\Lambda g_0^2}\ln\frac{1}{1-Q}\Big]. \tag{5.9.20}$$

Очевидно, неравенство (5.9.20) является квадратным неравенством относительно d:

$$[\Lambda - q(1+V^2)]d + 2\rho\Lambda d + \rho^2 - q^2(1+V^2)B^2 \geq 0. \tag{5.9.21}$$

Пусть

$$\Delta = \rho\Lambda + (\Lambda - q(1+V^2))[q^2(1+V^2)B - \rho^2] =$$

$$[\Lambda - q(1+V^2)]q^2(1+V^2)B + q(1+V^2)\rho^2.$$

Величина Δ пропорциональна дискриминанту квадратного трехчлена, фигурирующего в левой части (5.9.21). Из (5.8.11) вытекает, что $\Lambda - q^2(1+V^2) > 0$ и, следовательно, $\Delta > 0$. Значит, (5.9.21) имеет место при $d \geq d'$, где

$$d' = \frac{-\rho + \Delta^{1/2}}{\Lambda^2 - q^2(1+V^2)}.$$

Отметим, что при $\rho \geq q^2(1+V^2)B^2$ и при $d = 0$ неравенство (5.9.21) выполняется, то есть в этом случае при $d = 0$ выполняется (5.8.2). Аналогично соображениям, приведенным в доказательстве теоремы 5.8.2, это означает, что при всех $d \geq 0$ выполняется (5.8.2), то есть величина $z = A$ является минимально допустимой страховой ставкой. Если же $\rho < q^2(1+V^2)B^2$, то условие (5.8.2) выполняется при $d \geq d'$, то есть $z = \min\{1, A+d'\}$ – верхняя оценка минимально допустимой страховой ставки. Доказательство теоремы 5.8.5 завершено. □

5.10 Аппроксимация необходимого резервного капитала страховой компании, обслуживающей много неоднородных контрактов

В этом разделе мы рассмотрим статическую модель страхования с точки зрения страховой компании, обслуживающей n клиентов, то есть портфель которой содержит n страховых контрактов. Мы будем считать, что число контрактов в портфеле велико, то есть $n \to \infty$. Каждый контракт характеризуется (неслучайной) величиной $a_{n,j}$ возможной выплаты по нему и вероятностью $p_{n,j} \in [0, 1]$, с которой эта выплата может быть осуществлена, $j = 1, \ldots, n$. Тогда суммарные выплаты по рассматриваемому портфелю представляют собой случайную величину

$$D_n = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} V_{n,j}, \tag{5.10.1}$$

где $V_{1,n}, \ldots, V_{n,n}$ – случайные величины, принимающие значения 0 и 1 с вероятностями $p_{n,j}$ и $q_{n,j} = 1 - p_{n,j}$ соответственно. Другими словами, $V_{n,j}$ – это индикатор страхового случая по j-му контракту. Мы будем предполагать, что при каждом $n \geq 1$ случайные величины $V_{1,n}, \ldots, V_{n,n}$ независимы.

Если контракты однородны, то

$$a_{n,j} \equiv a > 0 \quad \text{и} \quad p_{n,j} \equiv p, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5.10.2}$$

и случайная величина D_n имеет вид

$$D_n = aB_n(p),$$

где $B_n(p)$ – случайная величина, имеющая биномиальное распределение с параметрами n и p.

В данном разделе мы уделим основное внимание неоднородной ситуации, то есть такой, в которой нарушаются условия (5.10.2). Мы будем изучать распределение случайной величины D_n. С формальной точки зрения мы будем иметь дело с суммой взвешенных индикаторов в так называемой схеме Пуассона бернуллиевых испытаний. Для заданного малого положительного числа α нас будет интересовать асимптотическое поведение α-необходимого резервного капитала $S_{n,\alpha}$, который определяется как $(1 - \alpha)$-квантиль распределения случайной величины D_n и имеет смысл такого порога, который превышается суммарными выплатами с малой вероятностью α (или за который суммарные выплаты не выходят с большой вероятностью $1-\alpha$):

$$\mathsf{P}(D_n \geq S_{n,\alpha}) \geq \alpha, \quad \mathsf{P}(D_n \leq S_{n,\alpha}) \geq 1-\alpha. \tag{5.10.3}$$

Опираясь на результаты работ (Бенинг и Королев, 1998), (Albers, Bickel and Van Zwet, 1976) и (Molenaar, 1970), в данном разделе мы построим асимптотические разложения по n α-необходимого резервного капитала $S_{n,\alpha}$ и приведем соответствующие формулы для приближенного вычисления $S_{n,\alpha}$. Мы также рассмотрим некоторые частные случаи.

5.10.1 Вспомогательные утверждения.

Чтобы построить асимптотические разложения для α-необходимого резервного капитала $S_{n,\alpha}$, мы, следуя работе (Albers, Bickel and Van Zwet, 1976), вначале сформулируем условия регулярности, которым должны удовлетворять числа $a_{n,j}$ и $p_{n,j}$.

1°. Предположим, что существуют положительные абсолютные постоянные c и C такие, что

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p_{n,j}(1-p_{n,j})a_{n,j}^2 \geq c \quad \text{и} \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}^4 \leq C; \tag{5.10.4}$$

2°. Предположим, что существуют положительные абсолютные постоянные δ и ε такие, что для некоторого $t \geq n^{-3/2}\log n$ справедливо неравенство

$$\lambda\{x:\ \exists j:\ |x-a_{n,j}|<t,\ \varepsilon \leq p_{n,j} \leq 1-\varepsilon\} \geq \delta n t, \tag{5.10.5}$$

где символ $\lambda\{B\}$ обозначает лебегову меру измеримого множества B.

Условие (5.10.5) означает, что среди чисел $a_{n,j}$ не должно быть слишком много одинаковых. Заметим, что для случая (5.10.2) это условие не выполняется. Условие (5.10.5), например, выполнено, если существует целое $k \geq \delta n/2$ и индексы j_m, $m=1,\ldots,k$, для которых

$$a_{n,j_{m+1}} - a_{n,j_m} \geq 2n^{-3/2}\log n \quad \text{и} \quad \varepsilon \leq p_{n,j_m} \leq 1-\varepsilon, \quad m=1,\ldots,k.$$

Условия (5.10.4) и (5.10.5) выполнены, к примеру, в случае, когда

$$p_{n,j} \equiv p > 0, \quad a_{n,j} = \Psi(j/n), \quad j=1,\ldots,n, \tag{5.10.6}$$

а функция $\Psi(t)$ дифференцируема на $[0,1]$, причем

$$0 < C_1 \leq |\Psi'(t)| \leq C_2 < \infty, \quad t \in [0,1]. \tag{5.10.7}$$

Условия (5.10.4) и (5.10.5) выполнены также и тогда, когда функция $\Psi(t)$ из (5.10.6) не является ограниченной. Например, эти условия выполнены, если $\Psi(t)$ не равна постоянной тождественно, непрерывно дифференцируема на $(0,1)$ и

$$\int_0^1 (\Psi(t))^4 dt < \infty,$$

причем функция $\Psi(t)$ монотонна в некоторых окрестностях точек 0 и 1.

Обозначим математическое ожидание, дисперсию, третий и четвертый семиинварианты случайной величины D_n соответственно через m_n, σ_n^2, $\kappa_{3,n}$ и $\kappa_{4,n}$. Легко видеть, что

$$m_n = \sum_{j=1}^n a_{n,j} p_{n,j}, \qquad \sigma_n^2 = \sum_{j=1}^n a_{n,j}^2 p_{n,j}(1-p_{n,j}), \tag{5.10.8}$$

$$\kappa_{3,n} = -\sqrt{n}\sigma_n^{-3} \sum_{j=1}^n a_{n,j}^3 p_{n,j}(1-p_{n,j})(2p_{n,j}-1), \tag{5.10.9}$$

$$\kappa_{4,n} = n\sigma_n^{-4} \sum_{j=1}^n a_{n,j}^4 p_{n,j}(1-p_{n,j})(1-6p_{n,j}+6p_{n,j}^2). \tag{5.10.10}$$

Стандартную нормальную функцию распределения и ее плотность обозначим соответственно через $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$. В работе (Albers, Bickel and Van Zwet, 1976) доказано следующее утверждение (см. Теорему 2.1 там).

Лемма 5.10.1. *Предположим, что выполнены условия* (5.10.4) *и* (5.10.5). *Тогда существует конечная положительная постоянная A, зависящая только от c, C, δ и ε, такая, что*

$$\sup_x |\mathsf{P}(D_n^* \le x) - F_n(x)| \le An^{-5/4}, \tag{5.10.11}$$

где

$$D_n^* = \frac{D_n - m_n}{\sigma_n}, \tag{5.10.12}$$

$$F_n(x) = \Phi(x) + \varphi(x)\Big(\frac{Q_{1,n}(x)}{\sqrt{n}} + \frac{Q_{2,n}(x)}{n}\Big), \tag{5.10.13}$$

$$Q_{1,n}(x) = -\frac{\kappa_{3,n}}{6}(x^2-1), \tag{5.10.14}$$

$$Q_{2,n}(x) = -\frac{\kappa_{4,n}}{24}(x^3-3x) - \frac{\kappa_{3,n}^2}{72}(x^5-10x^3+15x). \tag{5.10.15}$$

Следующее утверждение доказано в работе (Бенинг и Королев, 1998) (также см. (Бенинг и Королев, 2000a) и (Бенинг и Королев, 2000b)). Пусть $\{Z(t),\ t \geq 0\}$ – случайный процесс. Для $\beta \in (0,1)$ и $t \geq 0$ левую β-квантиль случайной величины $Z(t)$ обозначим $u_\beta(t)$:

$$u_\beta(t) = \inf\{x:\ \mathsf{P}(Z(t) < x) \geq \beta\}.$$

Лемма 5.10.2. *Предположим, что для одномерной функции распределения случайного процесса $Z(t)$ при $t \to \infty$ справедливо асимптотическое разложение вида*

$$\mathsf{P}(Z(t) < x) = G_0(x) + t^{-1/2}G_1(x) + t^{-1}G_2(x) + o(t^{-1}),$$

причем функции $G_0''(x)$, $G_1'(x)$ и $G_2(x)$ непрерывны и $G_0'(x) > 0$. Тогда для любого $\beta \in (0,1)$

$$u_\beta(t) \ = \ w_\beta - \frac{G_1(w_\beta)}{G_0'(w_\beta)} \cdot t^{-1/2} +$$

$$+ \ \frac{G_0'(w_\beta)G_1(w_\beta)G_1'(w_\beta) - \left(G_0'(w_\beta)\right)^2 G_2(w_\beta) - \frac{1}{2}G_1^2(w_\beta)G_0''(w_\beta)}{\left(G_0'(w_\beta)\right)^3} \cdot t^{-1} +$$

$$+ o(t^{-1}),$$

где $G_0(w_\beta) = \beta$.

С целью изучения однородной ситуации мы будем использовать следующий результат, доказанный в (Molenaar, 1970).

Лемма 5.10.3. *Пусть $B_n(p)$ – биномиально распределенная случайная величина с параметрами n и $p \in (0,1)$. Если $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ таково, что*

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} = O(1) \qquad (n \to \infty), \tag{5.10.16}$$

то справедливо соотношение

$$\mathsf{P}(B_n(p) \leq k) = \Phi\Big(x_{k+1/2} + \frac{(2p-1)(x_{k+1/2}^2 - 1)}{6\sqrt{np(1-p)}} +$$

$$+ \frac{(5 - 14p(1-p))x_{k+1/2}^3 + 2(p(1-p)-1)x_{k+1/2}}{72np(1-p)}\Big) + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big). \tag{5.10.17}$$

5.10.2 Основные результаты.

В этом разделе мы построим асимптотические разложения α-необходимого резервного капитала $S_{n,\alpha}$ и приведем соответствующие формулы для приближенного вычисления $S_{n,\alpha}$ как в общем (неоднородном), так и в однородном случае. Квантиль порядка $\beta \in (0,1)$ стандартного нормального распределения обозначим u_β

Теорема 5.10.1. *Предположим, что выполнены условия регулярности* (5.10.4) *и* (5.10.5). *Тогда*

$$S_{n,\alpha} = m_n + \sigma_n u_{1-\alpha} + \frac{\sigma_n \varkappa_{3,n}}{6\sqrt{n}}(u_{1-\alpha}^2 - 1)+$$

$$+\frac{\sigma_n u_{1-\alpha}}{12n}\Big[\frac{\varkappa_{3,n}^2}{3}(5 - 2u_{1-\alpha}^2) + \frac{\varkappa_{4,n}}{2}(u_{1-\alpha}^2 - 3)\Big] + O\Big(\frac{1}{n^{3/4}}\Big). \qquad (5.10.18)$$

Доказательство. Учитывая определение величины $S_{n,\alpha}$, леммы 5.10.1 и 5.10.2, мы получаем

$$S_{n,\alpha} = m_n + \sigma_n\Big[u_{1-\alpha} - \frac{Q_{1,n}(u_{1-\alpha})}{\sqrt{n}}+$$

$$+\frac{\varphi^2(u_{1-\alpha})Q_{1,n}(u_{1-\alpha})(\varphi'(u_{1-\alpha})Q_{1,n}(u_{1-\alpha}) + \varphi(u_{1-\alpha})Q'_{1,n}(u_{1-\alpha}))}{n\varphi^3(u_{1-\alpha})}-$$

$$-\frac{\varphi^3(u_{1-\alpha})Q_{2,n}(u_{1-\alpha}) + \frac{1}{2}\varphi^2(u_{1-\alpha})Q_{2,n}^2(u_{1-\alpha})\varphi'(u_{1-\alpha})}{n\varphi^3(u_{1-\alpha})}\Big] + O\Big(\frac{1}{n^{5/4}}\Big).$$

Далее, используя формулу $\varphi'(u_{1-\alpha}) = -u_{1-\alpha}\varphi(u_{1-\alpha})$ и вид полиномов $Q_{1,n}$ и $Q_{2,n}$ (см. (5.10.14) и (5.10.15)), после несложных преобразований получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Из Теоремы 5.10.1 вытекает приближенная формула

$$S_{n,\alpha} \approx m_n + \sigma_n u_{1-\alpha} + \frac{\sigma_n \varkappa_{3,n}}{6\sqrt{n}}(u_{1-\alpha}^2 - 1)+$$

$$+\frac{\sigma_n u_{1-\alpha}}{12n}\Big[\frac{\varkappa_{3,n}^2}{3}(5 - 2u_{1-\alpha}^2) + \frac{\varkappa_{4,n}}{2}(u_{1-\alpha}^2 - 3)\Big] + O\Big(\frac{1}{n^{3/4}}\Big),$$

которой можно пользоваться на практике.

Теперь рассмотрим однородный случай, определяемый условиями (5.10.2).

Теорема 5.10.2. *Предположим, что выполнены условия* (5.10.2), *так что $D_n = B_n(p)$, причем $0 < p < 1$. Тогда*

$$S_{n,\alpha} = a\Big[\frac{1}{2} + np + u_{1-\alpha}\sqrt{np(1-p)} + \frac{(2p-1)(1-u_{1-\alpha}^2)}{6}+$$

$$+\frac{u_{1-\alpha}[u_{1-\alpha}^2(2p(p-1)-1)-14p(p-1)-2]}{72\sqrt{np(1-p)}}\Big]+O\Big(\frac{1}{n}\Big). \qquad (5.10.19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $k=k(a,\alpha,n)$ определяется условием $S_{n,\alpha}=ak$. Если

$$x_{k-1/2}+\frac{(2p-1)(x_{k-1/2}^2-1)}{6\sqrt{np(1-p)}}+$$

$$+\frac{(5-14p(1-p))x_{k-1/2}^3+2(p(1-p)-1)x_{k-1/2}}{72np(1-p)}=u_{1-\alpha}+O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big),$$

то по Лемме 5.10.3 мы имеем

$$\mathsf{P}(D_n\geq S_{n,\alpha})=\mathsf{P}(B_n(p)\geq k)=1-\mathsf{P}(B_n(p)\leq k-1)=\alpha+O(n^{-3/2}).$$

Отсюда после несложных преобразований мы получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Из Теоремы 5.10.2 вытекает приближенная формула

$$S_{n,\alpha}=a\Big[\frac{1}{2}+np+u_{1-\alpha}\sqrt{np(1-p)}+\frac{(2p-1)(1-u_{1-\alpha}^2)}{6}+$$

$$+\frac{u_{1-\alpha}[u_{1-\alpha}^2(2p(p-1)-1)-14p(p-1)-2]}{72\sqrt{np(1-p)}}\Big],$$

которой можно пользоваться на практике в однородной ситуации.

5.10.3 Примеры.

Пример 5.10.1. Рассмотрим “симметричный” случай $p_{n,j}\equiv\frac{1}{2}$. Тогда $\kappa_{3,n}=0$ (см. (5.10.9)), и аппроксимация (5.10.17) принимает вид

$$S_{n,\alpha}=m_n+\sigma_n u_{1-\alpha}+\frac{\sigma_n u_{1-\alpha}\kappa_{4,n}(u_{1-\alpha}^2-3)}{24n}+O(n^{-3/4}). \qquad (4.1)$$

Если, более того, $a_{n,j}=j/n$, то, как легко видеть,

$$m_n=\frac{n+1}{2},\quad \sigma_n^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{24n},\quad \kappa_{4,n}=-\frac{12[3n(n+1)-1]}{5[n(2n+3)+1]},$$

и формула (5.10.18) показывает, что

$$S_{n,\alpha}=\frac{n+1}{4}+\frac{\sqrt{(n+1)(2n+1)}[3n(n+1)-1]u_{1-\alpha}(3-u_{1-\alpha}^2)}{20\sqrt{6}n^{3/2}[n(2n+3)+1]}+$$

$$+O(n^{-3/4}).$$

Пример 5.10.2. Если мы рассмотрим *нормированные* суммарные потери $D_n^* = (D_n - m_n)/\sigma_n$ страховой компании, то асимптотическое поведение при $n \to \infty$ *нормированного* α-необходимого резервного капитала $S_{n,\alpha}^*$, который определяется как $(1-\alpha)$-квантиль распределения случайной величины D_n^*, описывается соотношением

$$S_{n,\alpha}^* = u_{1-\alpha} + \frac{\kappa_{3,n}}{6\sqrt{n}}(u_{1-\alpha}^2 - 1) + \frac{u_{1-\alpha}}{12n}\left[\frac{\kappa_{3,n}^2}{3}(5 - 2u_{1-\alpha}^2) + \frac{\kappa_{4,n}}{2}(u_{1-\alpha}^2 - 3)\right] +$$

$$+O(n^{-5/4}).$$

В "симметричном" случае $p_{n,j} \equiv \frac{1}{2}$ последняя формула приобретает наиболее простой вид

$$S_{n,\alpha}^* = u_{1-\alpha} + \frac{u_{1-\alpha}\kappa_{4,n}}{24n}(u_{1-\alpha}^2 - 3) + O(n^{-5/4}).$$

Пример 5.10.3. Если $D_n = aB_n(p)$, $p = \frac{1}{2}$, то из Теоремы 5.10.2 мы сразу получаем, что

$$S_{n,\alpha} = a\left[\frac{1 + n + u_{1-\alpha}\sqrt{n}}{2} + \frac{u_{1-\alpha}(1 - u_{1-\alpha}^2)}{24\sqrt{n}}\right] + O(n^{-1}).$$

Глава 6

Дискретная динамическая модель коллективного риска

6.1 Понятие о дискретной динамической модели страхования

В главе 5 рассматривалась модель индивидуального риска (*статическая* модель страхования). Рассмотрение этой модели давало возможность ввести предположение о факторизуемости исков, которое требует изучения множества именно договоров страхования, а не "абстрактных" исков, не связываемых с конкретными договорами и, соответственно, с конкретными премиями (такие задачи будут рассмотрены в следующих главах, темой которых будут общие *динамические* модели страхования). В таком контексте материал данной главы как бы является переходным от статических к общим динамическим моделям страхования.

В настоящем разделе мы продолжаем использовать идею факторизации исков, но переходим в рамках данной идеи *от статики к динамике*. Здесь будет рассмотрен вопрос о том, какого рода задачи могут быть рассмотрены и какие результаты могут быть получены в условиях факторизационной модели для постановок, типичных для *динамической модели* и прежде всего связанных с вероятностью неразорения страховщика на "бесконечном" интервале времени.

Забегая вперед, обратимся к классической динамической модели Лундберга–Крамера (см., например, (Эмбрехтс и Клюппельберг, 1993)):

$$R(t) = r + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \qquad (6.1.1)$$

где $R(t)$ – остаток средств страховой компании (surplus), r – начальный капитал, c – коэффициент, характеризующий интенсмивность процесса поступления страховых премий, $N(t)$ – точечный процесс моментов выплат, Y_i $(i = 1, 2, \ldots)$ – сумма, выплачиваемая в i-й момент скачка процесса $N(t)$ (чаще всего предполагаемая неотрицательной).

Ограничимся в нашем рассмотрении случаем, когда $N(t)$ является простым процессом восстановления. Тогда

$$N(t) = \max\Big\{n > 0: \sum_{i=1}^{n} T_i \le t\Big\},$$

где $\{T_i\}$ — последовательность одинаково распределенных случайных величин, независимых в совокупности со случайными величинами $\{Y_i\}$. При этом предположении величина $R(t)$ в моменты $\{t_i = T_1 + \cdots + T_i\}$ может быть записана как

$$R(t_i) = R(t_{i-1}) + cT_i - Y_i \tag{6.1.2}$$

$(i = 1, 2, \ldots; t_0 = 0, R(t_0) = r)$. Эта запись демонстрирует тот факт, что по сути последовательность $R_i = R(t_i)$ представляет собой случайное блуждание, порождаемое величинами $cT_i - Y_i$, и традиционная задача классической теории риска – изучение вероятности разорения, то есть величины $\mathsf{P}(\min_i R_i < 0) = \psi(r)$ – является задачей о вероятности пересечения случайным блужданием $\{R_i\}$ нулевого уровня.

Нетрудно убедиться, что представление (6.1.2), принципиально относящееся к динамической модели, не может быть использовано в ситуации, когда иски факторизуемы, так как процесс поступления премий в (6.1.1), как, впрочем, и в рассматриваемых в литературе более общих моделях, всегда считается независимым от отдельных выплат, что, естественно, не имеет места в случае, когда премия по каждому отдельному договору и выплата по нему не являются независимыми случайными величинами, а именно это – существенный признак Ф-модели.

Возможным путем обобщения представления (6.1.1)–(6.1.2) является рассмотрение не обязательно положительных исков, то есть изучение вместо (6.1.2) представления $R_i = R_{i-1} + H_i$, где случайные величины H_i имеют смысл разности суммы поступивших за время $(t_{i-1}, t_i]$ премий и величины выплат в момент t_i. Отметим, что предположение, что страховые выплаты могут быть не обязательно положительными, также рассматривалось в классической теории риска. Однако в “обычной” ситуации, когда под процессом $N(t)$ понимается точечный процесс моментов выплат по отдельным договорам страхования, случайные величины H_i и R_{i-1} для ситуации факторизуемых исков оказываются зависимыми, поскольку H_i зависит от страховой суммы S по договору, для которого выплата произошла в момент t_i, однако и в состав величины R_{i-1} входит премия по этому же договору, естественно, также зависящая от S. Независимость случайных величин H_i и R_{i-1} при факторизуемости исков достигается лишь в том случае, когда в сумму R_{i-1} входят только премии по договорам, как бы не имеющим отношения к выплате в момент t_i. Это возможно, в свою очередь, только в том случае, когда после каждого момента выплат t_i действие ранее заключенных договоров страхования считается завершенным, и сумму H_i образуют премии и выплаты по договорам, заключенным в интервале $(t_{i-1}, t_i]$. Итак, "вложить" статическую модель с факторизуемыми исками в динамическую модель удается, если рассматривать в качестве t_i не моменты выплат по отдельным договорам страхования а некоторые более редкие моменты, относительно которых существует соглашение, что действие всех ранее заключенных договоров прекращается в каждый из таких моментов, и в очередной период $(t_i, t_{i+1}]$ страховщик "входит", имея только накопленную за время $(0, t_i]$ сумму страхового фонда R_i.

Тем самым мы приходим к необходимости ограничиться дискретной динамической моделью страхования (ДД-моделью), в которой предполагается, что страховщик имеет в начале своей деятельности начальный капитал (фонд) r; в течение некоторого периода времени (называемого *тест-периодом*; в (Beard, Pentikainen and Pessonen, 1978) – test period) длительности T (естественный пример – $T = 1$ год) в страховой фонд страховщика поступают страховые премии, связанные с заключением договоров страхования, и происходит выплата из этого фонда страховых возмещений. Считается, что страховщик может при необходимости пользоваться краткосрочным "беспроцентным" кредитом на срок до конца тест-периода, то есть в случае, когда в течение тест-периода (до его окончания) возникает необходимость выплаты возмещения, превышающего имеющийся фонд, разорения не происходит. По итогам работы страховщика за тест-период делается вывод либо о неплатежеспособности (разорении) – если сумма фонда, имевшегося в начале тест-периода, и собранных за этот тест-период премий оказалась меньше суммы возмещений, выплаченных за тест-период, либо – в противном случае – о продолжении страховой деятельности на очередной тест-период. Предполагается, что в момент окончания тест-периода все имевшиеся ранее договоры страхования являются завершенными, и "перехода" претензий по этим договорам на очередной тест период не происходит. Такая модель имеет практический смысл в случае, когда длительность одного договора страхования мала по сравнению с временем T, или когда все договоры страхования каждого тест-периода заключаются одновременно в начале тест-периода на срок T.

Вероятностью разорения страховщика в данном случае, как в обычной динамической модели, назовем вероятность того, что неплатежеспособность наступит в результате хотя бы одного тест-периода. Аналогичные модели рассматривались, например, в (Beard, Pentikainen and Pessonen, 1978), (Бенинг и Ротарь, 1993), (Ротарь и Бенинг, 1994); отмечается, что модель такого типа может интерпретироваться также следующим образом: требования на выплату возмещений, поступившие в течение тест-периода, оплачиваются в его конце. Тем самым данная модель состоит из последовательности “вложенных” в нее статических моделей, каждая из которых действует в течение одного тест-периода.

Величина минимально допустимой страховой ставки в данной главе определяется иначе, чем в главе 5. А именно, от страховой ставки требуется, чтобы она обеспечивала необходимую вероятность неразорения страховщика не в течение одного тест-периода, как это делалось ранее, а в течение бесконечного числа тест-периодов.

Следует отметить, что результаты, обычно получаемые при исследовании вероятности разорения в динамической модели страхования, используют более тонкие характеристики распределения суммы выплат, чем несколько первых моментов. Как правило, определение *коэффициента Лундберга* (называемого также *характеристическим* или *подстроечным коэффициентом* – adjustment coefficient), определяющего асимптотическое поведение вероятности разорения, требует решения *характеристического уравнения*, в котором участвует преобразование Лапласа распределения суммы выплат (см., например, (Эмбрехтс и Клюппельберг, 1993). Поскольку в ДД-модели в центре внимания оказывается распределение не индивидуального страхового иска, а величины дохода W, полученного страховщиком за тест-период, возникает задача вычисления (или оценки) коэффициента Лундберга для распределения случайной величины W.

В данной главе приводятся верхние (гарантированные) оценки минимальной страховой ставки, обеспечивающей заданную вероятность неразорения страховщика в рамках описанной выше ДД-модели страхования и Ф-модели страховых исков, для следующих двух ситуаций:

1) когда распределение дохода страховщика W за любой тест-период считается нормальным с заданными моментами (эти моменты естественным образом выражаются через параметры распределения количества договоров страхования N, поступивших за этот тест-период, значение принятой страховой ставки z и параметры случайных величин S и X);

2) без принятия каких-либо предположений о распределении случайной величины W, но в предположении, что все страховые суммы равномерно ограничены.

Перейдем к формальной постановке задачи в части, общей для обеих этих ситуаций.

6.2 Формальная постановка задачи определения минимально допустимой страховой ставки в дискретной динамической модели страхования

Количество договоров страхования (исков), заключаемых в течение тест-периода, как и ранее, обозначается N. Величина N предполагается случайной с известными первыми двумя моментами $\Lambda = \mathsf{E}N$, $M^2 = \mathsf{D}N$.

Предположим, что портфель всех исков (договоров страхования, заключаемых в течение всех тест-периодов) является портфелем однородных факторизуемых исков (см. главу 5), то есть имеет место представление $Y_j = S_j X_j$. Введем в рассмотрение те же параметры A, B^2, V^2, что и в разделе 5.4: $A = \mathsf{E}X_j$, $B^2 = \mathsf{D}X_j$,

$$V^2 = \frac{\mathsf{D}S_j}{(\mathsf{E}S_j)^2} = \frac{\mathsf{E}S_j^2}{(\mathsf{E}S_j)^2} - 1.$$

Пусть $\mu = \mathsf{E}S_j$. Доход страховщика за один тест-период составляет $W = \sum_{j=1}^{N} H_j$, где случайные величины $H_j = S_j(z - X_j)$, имеют тот же смысл, что и в разделе 5.4. Как и ранее, предполагается, что в начальный момент времени страховщик располагает начальным капиталом $r = \mu\rho$.

Если рассматриваются k последовательных тест-периодов, то страховой фонд за это время равен

$$R_k = r + \Omega_k, \tag{6.2.1}$$

где $\Omega_k = W_1 + \cdots + W_k$, $\{W_m\}$ – последовательность независимых случайных величин, распределенных так же, как случайная величина W. Случайная последовательность $\{\Omega_k\}$ является процессом с независимыми приращениями. Вероятность наступления события "$\{R_k < 0\} = \{\Omega_k < -r\}$ хотя бы для одного значения $k = 1, 2, \ldots$" является вероятностью разорения страховщика в дискретной динамической модели страхования за бесконечное время и будет обозначаться (при заданной ставке z) $\psi(r, z)$ (см., например, (Beard, Pentikainen and Pessonen, 1978)). Отметим, что функция $\psi(r, z)$ при фиксированном r является невозрастающей по z и, значит, в случае, когда для некоторой ставки $z = z'$ выполняется неравенство

$$\psi(r, z) \leq \epsilon, \tag{6.2.2}$$

то это неравенство будет выполнено и для всех $z > z'$.

Задачей данного раздела является получение верхней оценки минимально допустимой страховой ставки z_0. Под минимально допустимой страховой ставкой в рамках дискретной динамической модели страхования понимается величина $z_0 = \inf\{z\psi(r, z) \leq 1{-}Q,\ z \geq A\}$, где $Q < 1$ есть допустимое для страховщика значение вероятности неразорения.

Ниже мы будем использовать обозначением $\epsilon = 1 - Q$.

Приведем утверждение, которое в дальнейшем будет играть основную роль. Оно аналогично неравенству Лундберга для классической модели (6.1.1), но относится к дискретной динамической модели (6.2.1), в которой случайные величины W могут принимать значения различных знаков. Здесь это утверждение приводится в той формулировке, в которой оно фактически доказано в (Beard, Pentikainen and Pessonen, 1978).

Утверждение 6.2.1. *Пусть функция $U(s) = \mathsf{E}\exp\{-sW\}$ конечна на некотором интервале $s \in [0, s')$. Если на этом интервале существует решение $s = s_0 > 0$ уравнения $U(s) = 1$, то справедлива оценка $\psi(r, z) \leq \exp\{-s_0 r\}$.*

Если дополнительно известно, что $\lim_{s\to s'} U(s) > 1$, то уравнение $U(s) = 1$ заведомо имеет положительный корень.

Нам будет достаточно этого простого варианта неравенства Лундберга для случая “знакопеременных” убытков, поскольку в дальнейшем будут рассматриваться модели, в которых функция $U(s) = \mathsf{E}\exp\{-sW\}$ существует при всех положительных s.

6.3 Оценки страховых ставок в дискретной динамической модели страхования при нормальном распределении дохода за тест-период

Естественно, распределение случайной величины W может быть в точности нормальным только в некоторых достаточно редких случаях, например, если N – вырожденная случайная величина, а все случайные величины H_j нормальны. Известно (см., например, (Kruglov and Titov, 1988)), что невырожденная случайная величина W не может иметь нормального распределения в случае, когда N – невырожденная случайная величина. Поэтому предположение о нормальности распределения случайной величины W носит модельный (приближенный) характер. Тем не менее, предельные теоремы для сумм и случайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин указывают, когда имеются основания для такого предположения, то есть когда модель, рассматриваемая в дванном разделе может использоваться как асимптотическая аппроксимация. А именно, следует рассматривать такие распределения случайной величины N, что случайная сумма любых одинаково распределенных случайных величин с ненулевым средним и конечным третьим моментом, индекс которой распределен так же, как N, имеет асимптотически нормальное распределение с соответствующими моментами при неограниченном возрастании $\Lambda = \mathsf{E}N$. Примерами таких случайных величин N являются вырожденная и пуассоновская случайные величины.

Использование нормальной аппроксимации для распределения дохода страховщика за один тест-период позволяет существенно упростить проблему вычисления характеристического коэффициента, который при этом естественным образом определяется двумя моментами распределения дохода, благодаря чему итоговые результаты определяются двумя моментами распределения иска. Такого рода результаты, полученные при условиии постоянства страховых премий (и без факторизации индивидуальных страховых исков), хорошо известны. Новизна и большая гибкость результатов данного раздела связана именно с учетом факторизуемости исков, которая, как уже отмечалось, позволяет учитывать возможность флуктуаций страховых сумм и, следовательно, премий.

Далее в данном разделе мы будем предполагать, что случайная величина W имеет нормальное распределение с моментами $\alpha = \mathsf{E}W = \Lambda h$, $\beta^2 = \mathsf{D}W = \Lambda g^2 + M^2 h$.

Как и ранее, положим $w = V^2 + M^2/\Lambda$.

Теорема 6.3.1. *Если W имеет нормальное распределение, то для любого фиксированного значения Q, $0 < Q < 1$, в случае, если начальный капитал удовлетворяет условию*

$$\rho = \frac{r}{\mu} > \frac{w(1-A)^2 + (1+V^2)B^2}{2(1-A)} \ln \frac{1}{\epsilon}, \tag{6.3.1}$$

где $\epsilon = 1 - Q$, минимальная допустимая страховая ставка z_0 удовле-

творяет неравенству

$$z_0 \leq z' = A + d', \tag{6.3.2}$$

где

$$d' = \frac{2(1+V^2)B^2}{\rho x + [\rho^2 x^2 - 4w(1+V^2)B^2]^{1/2}}, \qquad x = \frac{2}{\ln(1/\epsilon)}, \tag{6.3.3}$$

причем оценка (6.3.2) *дает нетривиальное* (*меньшее* 1) *значение минимальной допустимой страховой ставки.*

Доказательство теоремы 6.3.1 приводится в разделе 6.5.1.

Следует заметить, что величина w может считаться ограниченной только в том случае, когда ограниченной является величина M^2/Λ. Если учесть, что рассматриваемая модель имеет прикладной смысл только в случае "растущего" числа договоров страхования, заключаемых на каждом тест-периоде, то указанная выше величина может быть достаточно большой, так что условие (6.3.1) может оказаться весьма жестким. Если же рассмотреть схему серий, в которой от номера серии n зависят $\Lambda = \Lambda_n$, $M = M_n^2$, $r = r_n$, причем $r_n \to \infty$, величины A, B, μ и V постоянны, а параметры $w_n = V + M_n^2/\Lambda_n$ и $\rho_n = r_n/\mu$ удовлетворяют при всех n условию (6.3.1), то, очевидно, $w_n = o\left(\rho_n^2\right)$, и имеет место следующая асимптотическая формула.

Следствие 6.3.1. *В условиях теоремы* 6.3.1, *если выполняется условие* (6.3.1), *для минимальной допустимой страховой ставки справедлива оценка* $z \leq z' = A + d'$, *где при* $r \to \infty$

$$z' \sim A + \frac{(1+V^2)\mu B^2}{2r} \ln \frac{1}{\epsilon}.$$

6.4 Оценки страховых ставок в дискретной динамической модели страхования при равномерно ограниченных страховых суммах

Как уже отмечалось, применение модели предыдущего раздела, в которой распределение дохода страховщика W за один тест-период является нормальным, оправданно, если количество договоров страхования N (или среднее значение количества договоров страхования если N является случайной величиной) может считаться "весьма большим". фактически результат теоремы 6.3.1 может рассматриваться (при определенных условиях) как верхняя асимптотическая оценка минимальной допустимой страховой ставки при неограниченном росте $\mathsf{E}N$. Однако, как говорилось выше, предположение о нормальности распределения случайной величины W всегда является определенной идеализацией реальной ситуации, и тем самым, особенно при “умеренных” значениях $\mathsf{E}N$, результаты предыдущего параграфа могут иметь заметную погрешностью. Для того чтобы получить оценки страховых тарифов, гарантированно обеспечивающие при любом N (как детерминированном, так и случайном) требуемую вероятность неразорения, необходимо иметь некоторую дополнительную информацию относительно распределения индивидуального иска, помимо двух моментов (значений которых достаточно для получения оценок из предыдущего раздела).

Как известно, точное вычисление коэффициента Лундберга требует знания распределения отдельного иска. В (Beard, Pentikainen and Pessonen, 1978) получены, в частности, гарантированные оценки для коэффициента Лундберга, инвариантные относительно распределения случайного иска, в условиях, когда справедливы дополнительные предположения, состоящие в том, что случайный иск равномерно ограничен, а случайная величина W имеет обобщенное пуассоновское распределение. В указанной работе отмечено, что это предположение может быть обосновано тем, что на практике риски страховщика обычно ограничиваются за счет перестрахования.

В данном ппараграфе, используя факторизуемость исков, мы рассмотрим (аналогично разделу 5.8) условие равномерной ограниченности случайной страховой суммы. Обоснование этого условия содержится в разделе 5.8. Мы получим нижнюю оценку для коэффициента Лундберга, использующую только два первых момента указанного распределения и имеющееся ограничение на величину страховой суммы. На основании этой оценки будет построена верхняя оценка для минимальной допустимой страховой ставки.

Мы будем пользоваться всеми обозначениями п. 5.3. Предположим, что $S_j \le C$ с вероятностью 1 для некоторого числа $C \in (0, \infty)$.

Перед тем как сформулировать основной результат параграфа, определим функцию $E(x)$ следующим образом:

$$E(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x};$$

при $x = 0$ доопределим функцию $E(x)$ по непрерывности значением $E(0) = 0$. Отметим, что при $x \to 0$ имеет место асимптотика $E(x) \sim x/2$.

Функция $E(x)$ строго монотонно и неограниченно возрастает при $x \ge 0$. Значит, функция $G(y)$, обратная функции $E(x)$, однозначно определена при всех $y \geq 0$. Значения функции $G(y)$ при различных значениях y нетрудно найти численно.

Теорема 6.4.1. *В рамках предположений разделов* 6.2 *и* 6.3 *имеют место следующие утверждения*:

1. *Вероятность разорения при* $0 < z < 1$ *удовлетворяет неравенству*

$$\psi(r,z) \leq \exp\{-G(v)r/C\}, \tag{6.4.1}$$

где $v = Ch/(h^2+g^2)$.

2. *Для любого фиксированного значения* Q, $0 < Q < 1$, *в случае, если начальный капитал* r *удовлетворяет условию*

$$E\Big(\frac{C}{r}\ln\frac{1}{\epsilon}\Big) < \frac{C(1-A)}{\mu(1+V^2)[(1-A)^2+B^2]}, \tag{6.4.2}$$

где $\epsilon = 1-Q$, *гарантированная оценка минимальной допустимой страховой ставкиимеет вид* $z \leq z' = A + d'$, *где*

$$d' = \frac{2(1+V^2)B^2}{\rho q + [\rho^2 q^2 - 4(1+V^2)^2 B^2]^{1/2}}, \qquad q = C\Big[\mu E\Big(\frac{C}{r}\ln\frac{1}{\epsilon}\Big)\Big]^{-1}, \tag{6.4.3}$$

причем величина $z' = A + d'$, *где* d' *определяется в соответствии с* (6.4.3), *является нетривиальной* (*меньшей* 1) *верхней оценкой минимальной допустимой страховой ставки.*

Доказательство теоремы 6.4.1 приводится в разделе 6.5.2.

Так как правая часть (6.4.2) зависит от параметров, считающихся в данном разделе постоянными, то это условие заведомо выполняется, начиная с некоторого значения r; при $r \to \infty$ из (6.4.3) и поведения функции $E(x)$ получаем следующую асимптотику.

Следствие 6.4.1. *В условиях теоремы* 6.3.1 *для минимальной допустимой страховой ставки справедлива оценка* $z \leq z' = A + d'$, *где при* $r \to \infty$

$$z' \sim A + \frac{(1+V^2)\mu B^2}{2r}\ln\frac{1}{\epsilon}.$$

Замечание 6.4.1. Асимптотика, определяемая в следствии 6.4.1 (при $r \to \infty$) для гарантированной оценки минимальной допустимой страховой ставки при равномерно ограниченных страховых суммах совпадает с соответствующей асимптотикой, полученной в следствии 6.3.1 при условии нормальности распределения дохода страховщика за тест-период. Это означает, что с ростом начального капитала r разница между моделями, рассмотренными в пп. 6.3 и 6.4, “стирается” (естественно, при выполнении условия (6.3.1)). При этом конкретное значение ограничения C в ситуации, когда $r \to \infty$, не имеет значения. Совпадение указанных асимптотик очевидным образом связано с тем, что в обоих случаях при всех $s > 0$ существует функция $\mathsf{E}\exp\{-sH\}$, где H – случайная величина, имеющая смысл "дохода" страховщика по отдельному договору (в модели, рассматриваемой в п. 6.3, величину H можно определить, исходя из того, что случайная величина W с нормальным распределением представляется в виде любого числа n независимых одинаково распределенных слагаемых, имеющих нормальное распределение с соответствующими моментами). Более подробное рассмотрение этого вопроса лежит за пределами постановок, рассматриваемых в данной главе, и может явиться предметом дальнейших исследований.

6.5 Доказательства теорем

6.5.1 Доказательство теоремы 6.3.1.

Пусть $U(s) = \mathsf{E}\exp\{-sW\}$. Так как W имеет нормальное распределение с параметрами α и β, то $U(s) = \exp\{(\beta^2 s^2 - 2\alpha s)/2\}$; функция $U(s)$ существует при всех s. Пусть s_0 – положительный корень уравнения $U(s) = 1$. Очевидно, $s_0 = 2\alpha/\beta^2$. Параметр s_0 является коэффициентом Лундберга; в соответствии с утверждением 6.2.1 имеет место неравенство $\psi(r, z) \leq \exp\{-s_0 r\}$. Отсюда следует, что для выполнения неравенства (6.2.2) достаточно, чтобы выполнялось неравенство $s_0 \geq \ln(1/\epsilon)/r$, или

$$\frac{\alpha}{\beta^2} > \frac{\ln(1/\epsilon)}{2r}. \qquad (6.5.1)$$

Воспользуемся имеющимися выражениями для величин α и β^2. Неравенство (6.5.1) принимает вид $f(d) = wd^2 - xd + (1 + V^2)B^2 \leq 0$. Если функция $f(d)$ строго положительна при всех d, то, очевидно, данным методом найти оценку для минимальной допустимой страховой ставки нельзя. Это происходит при "достаточно малых" r, точнее, при $\rho < 2w^{1/2}(1 + V^2)^{1/2}B/x$.

Пусть выполняется неравенство

$$\rho \geq w^{1/2}(1 + V^2)^{1/2}B \ln(1/\epsilon). \qquad (6.5.2)$$

В этом случае минимальное значение d, при котором $f(d) = 0$, определяется из (6.3.3); это значение равно d'.

В силу сделанных выше замечаний неравенство (6.2.2) выполняется при всех $z \geq z' = A + d'$ и, значит, $z_0 \leq z'$. Следует учесть, что формула

(6.3.3) дает нетривиальный результат только в случае, когда $d' < 1 - A$ (в силу того, что величина иска по договору страхования не превышает страховой суммы, при $z = 1$, то есть при $d = 1 - A$, для любых $r \geq 0$ имеет место $\psi(r, z) = 0$). Нетрудно убедиться, что $d' < 1 - A$ в случае, когда выполняется (6.3.1).

Итак, если (6.3.1) не выполняется, то формула (6.3.3) не имеет практического смысла, поскольку дает значение d', превышающее заведомо приемлемое значение $1 - A$. Очевидно, что условие (6.3.1) является более сильным, чем (6.5.2) (так как из неравенства (6.3.1) следует, что $f(1 - A) < 0$, и, значит, уравнение $f(d) = 0$ имеет решения).

6.5.2 Доказательство теоремы 6.4.1.

Введем величину $\Theta = \inf\{x : \mathsf{P}(X \leq x) = 1\}$. Очевидно, что: $\Theta \leq 1$; $X \leq \Theta$ с вероятностью 1; $A < \Theta$ (так как случайная величина X невырожденна), а также $\psi(r, \Theta) = 0$. Кроме того, при любом $\zeta < X$ существуют такие положительные числа ω и γ, что $\mathsf{P}(X > z + \omega) = \gamma$, то есть $\mathsf{P}(S(z - X) < -S\omega) = \gamma$; значит, случайная величина $H = S(z - X)$ принимает с положительной вероятностью отрицательные значения.

Предположим, что $z < \Theta$. Пусть $\widetilde{U}(s) = \mathsf{E}\exp\{-sH\}$. Отметим, что данная функция существует при всех s, так как

$$|H_j| = S|z - X_j| \leq C. \tag{6.5.3}$$

Производящую функцию случайной величины N обозначим $\eta(t)$:

$$\eta(t) = \mathsf{E}t^N.$$

Эта функция заведомо определена при $|t| \leq 1$. Поэтому при $\widetilde{U}(s) \leq 1$ можно задать функцию $U(s) = \eta(\widetilde{U}(s))$. Нетрудно видеть, что в области $\{s \ : \widetilde{U}(s) \leq 1\}$ справедливо равенство $U(s) = \mathsf{E}\exp\{-sW\}$. Рассмотрим такое s_0, что $\widetilde{U}(s_0) = 1$. Существование s вытекает из утверждения 6.2.1, так как (см. выше) существуют такие положительные величины θ и γ, что $\mathsf{P}(H < -\theta) > \gamma$; значит, $\widetilde{U}(s) \geq \gamma\exp\{sq\} \to \infty$ при $s \to \infty$. Очевидно, что $U(s_0) = \eta(\widetilde{U}(s_0)) = \eta(1) = 1$, то есть s является решением и уравнения $\widetilde{U}(s_0) = 1$.

Итак, значение коэффициента Лундберга в рассматриваемых условиях зависит только от распределения случайной величины H и не зависит от распределения числа договоров страхования. Для построения оценки величины s воспользуемся условием равномерной ограниченности величины страховой суммы. В силу (6.5.3) при $k \geq 2$

$$\mathsf{E}|H|^k \leq C^{k-2}\mathsf{E}H^2 = C^{k-2}(h^2 + g^2).$$

Очевидно, что при всех s

$$\widetilde{U}(s) = 1 - s\,\mathsf{E}H + \frac{s^2}{2}\mathsf{E}H^2 - \frac{s^2}{6}\mathsf{E}H^3 + \cdots \le$$

$$\le 1 - sh + \frac{s^2}{2}(h^2+g^2)\Big[1 + \frac{sC}{3} + \frac{(sC)^2}{12} + \cdots\Big] =$$

$$= 1 - sh + s(h^2+g^2)\frac{e^{sC} - 1 - sC}{(sC)^2}.$$

Значит, s удовлетворяет неравенству

$$h \le \frac{1}{C}(h^2+g^2)\frac{e^{s_0C} - 1 - s_0C}{s_0C},$$

или, иначе,

$$\frac{Ch}{h^2+g^2} \le E(s_0C). \tag{6.5.4}$$

В соответствии с утверждением 6.2.1 имеем $\psi(r,z) \le \exp(-s_0r)$. Отметим, что из последнего неравенства и (6.5.4) вытекает гарантированная верхняя оценка вероятности разорения (6.4.1). Эта оценка доказана при $z < \Theta$. Однако при $z \ge \Theta$ справедливо равенство $\psi(r,z) = 0$, то есть (6.4.1) также имеет место (6.4.1).

Переходя к решению основной задачи (оценка ставки премии), из (6.4.1) получаем, что для выполнения условия (6.2.2) на вероятность неразорения достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{Ch}{h^2+g^2} \ge E\Big(\frac{C}{r}\ln\frac{1}{\epsilon}\Big),$$

или $q\mu h \ge h^2 + g^2$. Последнее неравенство можно переписать в виде

$$f(d) = (1+V^2)d - qd + (1+V^2)B \le 0. \tag{6.5.5}$$

Осуществляя элементарный анализ неравенства (6.5.5) аналогично рассуждениям из доказательства теоремы 6.2.1, получаем вторую часть утверждения теоремы 6.4.1.

Глава 7

Модели коллективного риска (динамические модели)

7.1 Процессы риска Спарре Андерсена. Классический процесс риска

Рассмотрим текущий резерв страховой компании. Он складывается из начального капитала u и страховых премий, внесенных каждым из клиентов, заключивших контракт в течение интервала времени $[0,t]$, за вычетом страховых выплат по страховым случаям в течение этого интервала. Пусть ζ_i – страховой взнос i-го клиента. Тогда доход страховой компании за время $[0,t]$ равен

$$R_+(t) = \sum_{i=1}^{N_+(t)} \zeta_i,$$

где $N_+(t)$ – количество контрактов, заключенных за время $[0,t]$.

Пусть T_i и X_i, $i \geq 1$, – последовательности моментов и размеров страховых выплат соответственно ($0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$). Положим $N_-(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$, то есть $N_-(t)$ – количество страховых выплат за время $[0,t]$. Тогда суммарные потери страховой компании за время $[0,t]$ будут равны

$$R_-(t) = \sum_{i=1}^{N_-(t)} X_i,$$

так что “динамическая компонента” резерва страховой компании в момент времени t равна

$$R_d(t) = R_+(t) - R_-(t) = \sum_{i=1}^{N_+(t)} \zeta_i - \sum_{i=1}^{N_-(t)} X_i. \tag{7.1.1}$$

Пусть u – начальный капитал страховой компании.

Определение 7.1.1. Процесс $R(t) = u + R_d(t)$, где $R_d(t)$ определяется соотношением (7.1.1), будем называть *процессом риска.*

Определим *момент разорения* τ как

$$\tau = \inf\{t : R(t) + u < 0\}.$$

Поскольку процесс $R_+(t)$, а также величины T_i и X_i, $i \geq 1$, предполагаются случайными, то и процесс риска $R(t)$, и момент разорения τ также случайны, причем в задачах, представляющих практический интерес, случайная величина τ является несобственной в том смысле, что $\mathsf{P}(\tau < \infty) < 1$.

Определение 7.1.2. Величина

$$\psi(u) = \mathsf{P}(\tau < \infty | R(0) = u)$$

называется *вероятностью разорения на бесконечном промежутке времени* при начальном капитале u. Пусть $t \geq 0$. Величина

$$\psi(t, u) = \mathsf{P}(\tau \leq t | R(0) = u)$$

называется *вероятностью разорения на конечном промежутке времени* $[0, t]$ при начальном капитале u.

Иногда удобнее иметь дело с *вероятностью неразорения*

$$\phi(u) = 1 - \psi(u), \quad u \geq 0.$$

Для $u < 0$ положим $\phi(u) = 0$.

Модель (7.1.1) имеет один довольно существенный аналитический недостаток: в ней случайные процессы $R_+(t)$ и $R_-(t)$ не являются независимыми, так как всегда, очевидно, $N_-(t) \leq N_+(t)$. С другой строны, процесс $N_+(t)$ формально нельзя считать прореживанием процесса $N_-(t)$, поскольку между заключением страхового контракта и страховой выплатой по этому контракту, очевидно, имеется некоторый (случайный) временной сдвиг.

С целью упрощения модели теперь предположим, что случайные величины ζ_i, $i = 1, 2, \ldots$ независимы между собой и от процесса $N_+(t)$ и имеют одно и то же распределение, причем существует $b = \mathsf{E}\zeta_1$. Самым простым предположением о виде процесса $N_+(t)$ является, естественно, то, что этот процесс – однородный пуассоновский с некоторой интенсивностью λ_+. Тогда, очевидно,

$$\mathsf{E}R_+(t) = b\lambda_+ t, \quad t \geq 0.$$

Если к тому же разброс возможных значений случайной величины ζ_i вокруг ее математического ожидания b невелик, то ступенчатый случайный процесс $R_+(t)$, описывающий доход страховой компании, можно приблизить его математическим ожиданием, имеющим вид линейной функции: $R_+(t) \approx ct$, где $c = b\lambda_+$.

Далее, предположим, что случайные величины X_i, $i = 1, 2, \ldots$, независимы между собой и от процесса $N_-(t)$. Более того, пусть случайные величины X_i имеют одну и ту же функцию распределения $F(x)$, а процесс $N_-(t)$ является процессом восстановления, то есть случайные величины $\theta_i = T_i - T_{i-1}$, $i \geq 1$, независимы и одинаково распределены. Более того, предположим, что $\mathsf{E}X_1 = \mu < \infty$ и $\mathsf{E}\theta_1 = \alpha < \infty$.

Таким образом, с помощью упрощающих предположений мы приходим к следующей модели.

Определение 7.1.3. *Процессом риска Спарре Андерсена* называется случайный процесс вида

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad t \geq 0,$$

где $c > 0$, $N(t)$ – процесс восстановления, $X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины с общей функцией распределения $F(x)$ такой, что $F(0) = 0$, независимые от процесса $N(t)$ (для определенности мы полагаем, что $\sum_{k=1}^{0} = 0$).

Определение 7.1.4. *Нагрузкой (коэффициентом) безопасности* называется величина

$$\rho = \frac{c\alpha - \mu}{\mu} = \frac{c\alpha}{\mu} - 1.$$

Нагрузка безопасности ρ иногда называется *относительной нагрузкой безопасности.* Она имеет смысл "удельного" дохода страховой компании в единицу времени.

Определение 7.1.5. *Классическим процессом риска* называется процесс риска Спарре Андерсена, в котором $N(t)$ – пуассоновский процесс с некоторой интенсивностью $\lambda > 0$.

Для классического процесса риска, очевидно, нагрузка безопасности имеет вид

$$\rho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1.$$

Несложно видеть, что для процесса риска Спарре Андерсена $R(t)$

$$\mathsf{E}R(t) = u + (c - \mu/\alpha)t.$$

Поэтому, если $c\alpha < \mu$ (что соответствует отрицательной нагрузке безопасности), то ожидаемое значение резерва линейно убывает с ростом t. Можно показать, что в этом случае при любом значении начального капитала u вероятность разорения $\psi(u)$ равна единице.

7.2 Определение и простейшие свойства пуассоновского процесса

Разделы 7.2 – 7.7 посвящены описанию различных математических моделей потоков страховых требований. Основное внимание уделяется пуассоновскому процессу как наилучшей модели хаотических потоков и его обобщениям – смешанным, неоднородным и дважды стохастическим пуассоновским процессам.

Данный раздел посвящен простейшему пуассоновскому процессу и его свойствам. Здесь и в дальнейшем мы делаем акцент на тех свойствах пуассоновского процесса, которые позволяют считать его основной математической моделью потока событий, которые абсолютно хаотично рассредоточены во времени.

Определение 7.2.1. Случайный процесс $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$, называется *пуассоновским*, если он обладает следующими свойствами:

1. $\xi(t)$ – процесс с независимыми приращениями, то есть для любых $n, t_0, \ldots, t_n$ (n – натуральное, $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ – вещественные) случайные величины $\xi(t_1) - \xi(t_0), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ независимы;

2. $\xi(t)$ – однородный процесс, то есть для любых s, t и $h > 0$ случайные величины $\xi(t+h) - \xi(t)$ и $\xi(s+h) - \xi(s)$ одинаково распределены;

3. $\xi(0) = 0$;

4. при $h \downarrow 0$ и некотором $\lambda > 0$

$$\mathsf{P}(\xi(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h);$$

$$\mathsf{P}(\xi(h) = 1) = \lambda h + o(h);$$

$$\mathsf{P}(\xi(h) \geq 2) = o(h).$$

Найдем распределение случайной величины $\xi(t)$ при произвольном $t > 0$. С этой целью рассмотрим её производящую функцию

$\psi_t(s) = \mathsf{E}s^{\xi(t)}$, определенную при $|s| \le 1$. По свойствам 1, 2 и 3 для произвольного $h > 0$ мы имеем

$$\psi_{t+h}(s) = \mathsf{E}s^{\xi(t+h)} = \mathsf{E}s^{\xi(t+h)-\xi(t)+\xi(t)} =$$
$$= \mathsf{E}s^{\xi(t)}\mathsf{E}s^{\xi(t+h)-\xi(t)} = \mathsf{E}s^{\xi(t)}\mathsf{E}s^{\xi(h)} = \psi_t(s)\psi_h(s). \qquad (7.2.1)$$

По свойству 4 при $h \downarrow 0$ в силу ограниченности s

$$\psi_h(s) = (1 - \lambda h + o(h)) + s(\lambda h + o(h)) + o(h) = 1 - \lambda h(1 - s) + o(h).$$

Подставляя это выражение в (7.2.1), мы получаем

$$\psi_{t+h}(s) = \psi_t(s)(1 + \lambda h(s - 1) + o(h)),$$

откуда

$$\frac{\psi_{t+h}(s) - \psi_t(s)}{h} = \lambda(s - 1)\psi_t(s) + o(1). \qquad (7.2.2)$$

Устремляя в (7.2.2) $h \downarrow 0$, мы приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\psi_t(s)}{dt} = \lambda(s - 1)\psi_t(s),$$

решением которого, удовлетворяющим начальному условию $\psi_0(s) \equiv 1$ (см. свойство 3), является функция

$$\psi_t(s) = \exp\{\lambda t(s - 1)\}. \qquad (7.2.3)$$

Раскладывая функцию (7.2.3) в ряд по степеням s, мы получаем

$$\psi_t(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}s^k. \qquad (7.2.4)$$

Функция (7.2.4), будучи степенным рядом, однозначно определяется коэффициентами при степенях s. Но с учетом определения производящей функции это означает, что

$$\mathsf{P}(\xi(t) = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Другими словами, случайная величина $\xi(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λt,

$$\xi(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t).$$

Итак, пуассоновский процесс принимает только целые неотрицательные значения. При этом свойство 4 означает, что траектории пуассоновского процесса не убывают, кусочно-постоянны, непрерывны справа, а их скачки имеют одинаковую величину, равную единице.

Мы сразу же замечаем, что

$$\mathsf{E}\xi(t) \equiv \mathsf{D}\xi(t) \equiv \lambda t.$$

Поэтому λ имеет смысл среднего числа скачков пуассоновского процесса за единицу времени. Параметр λ называется *интенсивностью пуассоновского процесса.*

Пусть $\tau_0 = 0, \tau_1, \ldots$ – точки скачков пуассоновского процесса. Большой интерес представляет вопрос о том, каковы распределения случайных величин $\tau_n - \tau_{n-1}$, $n \geq 1$, то есть о распределении длин интервалов времени между скачками пуассоновского процесса. Вначале мы дадим не вполне строго обоснованный ответ на этот вопрос, отложив строгое доказательство до следующего раздела.

Итак, пуассоновский процесс однороден, поэтому величины $\tau_n - \tau_{n-1}$, $n \geq 1$, распределены одинаково. Пуассоновский процесс имеет независимые приращения, поэтому эти величины независимы. Вследствие однородности, чтобы определить тип распределения этих величин, нам достаточно рассмотреть лишь одну из них, скажем, $\tau_1 - \tau_0 = \tau_1$. Событие $\{\tau_1 > t\}$ эквивалентно событию $\{\xi(t) = 0\}$. Поэтому

$$\mathsf{P}(\tau_1 \leq t) = 1 - \mathsf{P}(\tau_1 > t) = 1 - \mathsf{P}(\xi(t) = 0) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Другими словами, случайные величины $\tau_n - \tau_{n-1}$, $n \geq 1$, независимы и имеют одно и то же показательное распределение с параметром λ.

Если точки скачков пуассоновского процесса отождествить с моментами регистрации некоторых однотипных событий, то $\xi(t)$ принимает смысл общего количества событий, зарегистрированных до момента t. В этом смысле оказывается очень полезно рассматривать пуассоновский процесс как точечный процесс на полупрямой $t \geq 0$.

Определение 7.2.2. Последовательность случайных величин $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ называется *точечным процессом*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1° если $\tau_n < \infty$, то $\tau_{n+1} > \tau_n$;

2° для всякого $t < \infty$ найдется такое n, что $\tau_n > t$.

Со всяким точечным процессом $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ можно связать случайную целочисленную неотрицательную (считающую) меру $\nu(A)$, определенную на борелевских множествах A, положив

$$\nu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}(\tau_k \in A).$$

Реализацией случайной считающей меры является обычная считающая мера. Каждая траектория точечного процесса однозначно определяет реализацию случайной считающей меры и наоборот. Поэтому иногда точечные процессы определяют как случайные меры. Например, если $A = [0, t)$, а $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ – точки скачков пуассоновского процесса $\xi(t)$, то, очевидно,

$$\nu([0, t)) = \xi(t).$$

7.3 Пуассоновский точечный процесс как модель абсолютно хаотичного распределения событий во времени

Пусть $n \geq 1$ – произвольное целое число, $[a, b]$ – произвольный непустой интервал, $\{\tau_j\}_{j\geq 1}$ – точки скачков пуассоновского процесса с некоторой интенсивностью $\lambda > 0$. Найдем условное совместное распределение точек скачков пуассоновского процесса, попавших в интервал $[a, b]$, при условии, что на этом интервале пуассоновский процесс имеет ровно n скачков. Перенумеруем точки скачков так, чтобы τ_1 оказалась наименьшей из точек скачков, попавших в $[a, b]$.

Теорема 7.3.1. *Условное совместное распределение случайных величин $\tau_1, \ldots, \tau_n$ при условии $\xi(b) - \xi(a) = n$ совпадает с совместным распределением вариационного ряда, построенного по выборке объема n из равномерного распределения на $[a, b]$.*

Доказательство. Если $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ – случайный вектор с совместной плотностью $f(x_1, \ldots, x_n)$, $h > 0$, то при $h \downarrow 0$

$$\mathsf{P}(\eta_j \in [x_j, x_j + h),\ j = 1, \ldots, n) = f(x_1, \ldots, x_n)h^n + o(h^n).$$

Мы будем использовать это соотношение. Пусть $a = t_0 + h < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = b$, а $h > 0$ столь мало, что $h < \min_{0\leq j\leq n}(t_{j+1} - t_j)$. Найдем условную вероятность $\mathsf{P}(\tau_j \in [t_j, t_j + h),\ j = 1, \ldots, n \mid \xi(b) - \xi(a) = n)$. Очевидно, что

$$\mathsf{P}(\tau_j \in [t_j, t_j + h),\ j = 1, \ldots, n \mid \xi(b) - \xi(a) = n) =$$
$$= \frac{\mathsf{P}(\tau_j \in [t_j, t_j + h),\ j = 1, \ldots, n;\ \xi(b) - \xi(a) = n)}{\mathsf{P}(\xi(b) - \xi(a) = n)} =$$
$$= \frac{\mathsf{P}(\tau_j \in [t_j, t_j + h),\ j = 1, \ldots, n)}{\mathsf{P}(\xi(b) - \xi(a) = n)}. \qquad (7.3.1)$$

Рассмотрим событие, стоящее под знаком вероятности в числителе правой части соотношения (7.3.1). Оно эквивалентно тому, что в интервалы $[t_{j-1} + h, t_j)$, $j = 1, \ldots, n + 1$, не попала ни одна точка скачков, а в каждый из интервалов $[t_j, t_j + h)$, $j = 1, \ldots, n$, попало ровно по одной точке скачков. Поэтому, используя однородность пуассоновского процесса и независимость его приращений мы будем иметь

$$\mathsf{P}(\tau_j \in [t_j, t_j + h),\ j = 1, \ldots, n) =$$

$$= \mathsf{P}(\xi(t_j) - \xi(t_{j-1} + h) = 0,\ j = 1, \ldots, n+1;$$

$$\xi(t_j + h) - \xi(t_j) = 1,\ j = 1, \ldots, n) =$$

$$= (\lambda h)^n \exp\{-n\lambda h\}\times$$

$$\times \exp\{-\lambda[t_1 - a + t_2 - t_1 - h + \ldots + t_n - t_{n-1} - h + b - t_n - h]\} =$$

$$= (\lambda h)^n \exp\{-\lambda(b - a)\}. \tag{7.3.2}$$

Далее,

$$\mathsf{P}(\xi(b) - \xi(a) = n) = \exp\{-\lambda(b - a)\}\frac{\lambda^n (b - a)^n}{n!} \tag{7.3.3}$$

Подставляя (7.3.2) и (7.3.3) в (7.3.1), получаем

$$\mathsf{P}(\tau_j \in [t_j, t_j + h),\ j = 1, \ldots, n \mid \xi(b) - \xi(a) = n) = \frac{n!}{(b - a)^n} h^n.$$

С учетом сказанного в самом начале доказательства мы заключаем, что совместная условная плотность случайных величин $\tau_1, \ldots, \tau_n$ при условии $\xi(b) - \xi(a) = n$ равна $n!/(b - a)^n$. Но, как известно, именно такой вид имеет совместная плотность порядковых статистик, построенных по выборке объема n из равномерного распределения на $[a, b]$. Теорема доказана. □

Как мы обещали в предыдущем разделе, вернемся к вопросу о совместном распределении случайных величин $\zeta_j = \tau_j - \tau_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n$, в пуассоновском точечном процессе. В соотношении (7.3.2) положим $a = 0$, $b = t_n$. Тогда

$$\mathsf{P}(\tau_j \in [t_j, t_j + h),\ j = 1, \ldots, n) = \lambda^n \exp\{-\lambda t_n\} h^n.$$

Как и при доказательстве Теоремы 7.3.1, отсюда мы заключаем, для совместной плотности $p_{\tau_1,\ldots,\tau_n}(t_1, \ldots, t_n)$ случайных величин $\tau_1, \ldots, \tau_n$ справедливо соотношение

$$p_{\tau_1,\ldots,\tau_n}(t_1, \ldots, t_n) = \lambda^n \exp\{-\lambda t_n\}.$$

Но якобиан преобразования $\tau_j \longmapsto \zeta_j = \tau_j - \tau_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n$, равен единице ($\tau_0 = 0$). Поэтому, обозначая $s_j = t_j - t_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n$, для совместной плотности $p_{\zeta_1,\ldots,\zeta_n}(s_1,\ldots,s_n)$ случайных величин $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ мы получаем представление

$$p_{\zeta_1,\ldots,\zeta_n}(s_1,\ldots,s_n) = \lambda^n \exp\{-\lambda(s_1+\ldots+s_n)\} = \prod_{j=1}^{n} \lambda e^{-\lambda s_j},$$

что означает, что случайные величины $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ независимы и одинаково показательно распределены с параметром λ.

Равномерное распределение принято считать "наиболее непредсказуемым" среди всех распределений, сосредоточенных на конечном интервале (в следующем разделе этому высказыванию мы придадим более конкретную форму). Другими словами, равномерное распределение лучше других соответствует представлению об абсолютно хаотичном расположении точек на отрезке. Поэтому доказанная выше Теорема 7.3.1 убедительно свидетельствует о том, что пуассоновский точечный процесс является как нельзя более подходящей моделью потока случайных событий, абсолютно хаотично рассредоточенных во времени.

В Теореме 7.3.1 концы интервала $[a,b]$ выбирались неслучайно. Оказывается, что если концы рассматриваемого интервала отождествить с какими-либо точками скачков пуассоновского процесса, сделав их тем самым случайными, то свойство равномерности распределения точек скачков, расположенных внутри такого случайного интервала, сохранится. Действительно, очень легко убедиться, что условная плотность $p_{\zeta_j|\zeta_j+\zeta_{j+1}=s}(x)$ случайной величины ζ_j при условии $\zeta_j+\zeta_{j+1}=s$, где $s>0$ произвольно, равна $s^{-1}\mathbf{1}(0\le x\le s)$, что соответствует равномерному распределению на интервале $[0,s]$.

7.4 Информационные свойства пуассоновского процесса

Как мы видели в предыдущих разделах, пуассоновский процесс тесно связан с равномерным и показательным распределениями. Теорема 7.3.1 о равномерности распределения точек скачков пуассоновского процесса на любом интервале приводит нас к заключению о том, что пуассоновский процесс описывает поведение во времени дискретных хаотических систем, характерными свойствами которых являются наибольшая непредсказуемость или наименьшая определенность. Однако, оказывается, что свойство максимальной неопределенности характеризует не только равномерное, но и показательное распределение. Показательное распределение характеризует пуассоновский процесс в классе процессов восстановления.

Определение 7.4.1. Пусть $\xi_0 = 0$, а $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые неотрицательные одинаково распределенные случайные величины. Процессом восстановления называется случайный процесс

$$\nu(t) = \max\{n :\ \xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Очевидно, что если случайные величины $\{\xi_j\}_{j\geq 1}$ имеют показательное распределение с некоторым параметром $\lambda > 0$, то $\nu(t)$ – пуассоновский процесс.

Перед тем как продемонстрировать, что показательное распределение в некотором смысле обладает свойством наибольшей неопределенности, мы опишем саму математическую модель неопределенности. Интуитивно ясно, что понятие неопределенности тесно связано с понятием информации. В свою очередь, в 20-30-х годах XX столетия Хартли и Шеннон предложили связать понятия информации и вероятности. Такой подход оказался вполне разумным и плодотворным.

Пусть A и B – события, вероятности которых положительны.

Определение 7.4.2. Информацией (по Шеннону), содержащейся в событии B относительно события A, называется

$$I(A|B) = \log \frac{\mathsf{P}(A|B)}{\mathsf{P}(A)}.$$

Если $B = A$, то, очевидно, $I(A|A) = -\log \mathsf{P}(A)$. Таким образом, мы приходим к следующему важному определению.

Определение 7.4.3. Информацией (по Шеннону), содержащейся в событии A, называется

$$I(A) = -\log \mathsf{P}(A). \tag{7.4.1}$$

Смысл этих определений легко пояснить, рассмотрев простейшие свойства введенных понятий. Эти свойства оказываются аналогичными тем, которые должны быть присущи информации с точки зрения здравого смысла.

1. Осуществление события, вероятность которого невелика, как правило, несет в себе больше информации, нежели осуществление события, вероятность которого значительна. Например, в начале нашего столетия представлялось практически невероятно обнаружить живой экземпляр считавшегося давно вымершим вида кистеперых рыб. Когда же такая рыба – целакант – была поймана, фактически произошла революция в ихтиологии. В то же время, поимка любого экземпляра рыбы такого распространенного вида

как, скажем, треска, может нести в себе информацию разве что о месте прохождения косяка этих рыб и никакой научной революции не вызывает.

2. Если события A и B независимы, то, очевидно, осуществление события B не дает никакой информации о событии A. Действительно, в этом случае мы имеем
$$I(A|B) = \log 1 = 0.$$

3. Если события A и B независимы, то их одновременное осуществление несет в себе столько же информации, сколько содержится в каждом из них в отдельности. Действительно, в этом случае мы имеем
$$I(AB) = -\log \mathsf{P}(AB) = -\log(\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)) =$$
$$= -\log \mathsf{P}(A) - \log \mathsf{P}(B) = I(A) + I(B).$$

Логарифмическое определение информации (7.4.1) восходит к Хартли (Hartley, 1928). Основание логарифма не играет определяющей роли и существенно лишь для выбора единицы измерения информации. Обычно используют логарифмы по основанию 2, для которых единица информации содержится в событии, вероятность которого $1/2$. Такая единица информации называется бит (от английского bit (кусочек) или как аббревиатура термина BInary digiT (двоичный разряд)). Единица информации, порожденная натуральными логарифмами, называется нат (nat).

Пусть $\mathcal{E}$ – эксперимент, в котором может осуществиться лишь один из n исходов $A_1, \ldots, A_n$. Обозначим $\mathsf{P}(A_i) = p_i$ (очевидно, что $p_1 + \ldots + p_n = 1$). Тогда мы можем считать информацию, полученную в результате этого эксперимента, случайной величиной, принимающей значения $I(A_1), \ldots, I(A_n)$ соответственно с вероятностями $p_1, \ldots, p_n$. Обозначим эту случайную величину $Q(\mathcal{E})$. Введем следующую интегральную информационную характеристику $\mathcal{E}$.

Определение 7.4.4. Энтропией $H(\mathcal{E})$ эксперимента $\mathcal{E}$ называется величина
$$H(\mathcal{E}) = \mathsf{E}Q(\mathcal{E}) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i. \qquad (7.4.2)$$

Энтропия эксперимента может служить мерой его неопределенности, что подтверждается совпадением свойств формально введенной величины $H(\mathcal{E})$, приводимых в следующей теореме, с ожидаемыми с позиций здравого смысла свойствами разумной меры неопределенности.

Теорема 7.4.1. *Величина $H(\mathcal{E})$ обладает следующими свойствами.*

1°. $H(\mathcal{E}) \geq 0$,*причем равенство достигается тогда и только тогда, когда существует $i \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $p_i = 1$.*

2°. *Пусть $\mathcal{E}_0$ – эксперимент с n равновероятными исходами. Тогда $H(\mathcal{E}) \leq H(\mathcal{E}_0)$, каким бы ни был эксперимент $\mathcal{E}$ с таким же числом n возможных исходов.*

3°. *Пусть $\mathcal{E}_1$ – эксперимент с $n-1$ исходом, построенный из эксперимента $\mathcal{E}$ с помощью объединения двух исходов, скажем, A_i и A_j $(i \neq j)$, и пусть $\mathcal{E}_2$ – эксперимент с исходами A_i и A_j, вероятности которых (в рамках $\mathcal{E}_2$) соответственно равны $p_i/(p_i+p_j)$ и $p_j/(p_i+p_j)$. Тогда*

$$H(\mathcal{E}) = H(\mathcal{E}_1) + (p_i + p_j)H(\mathcal{E}_2).$$

4°. *Энтропия $H(\mathcal{E})$ зависит не от $A_1, \dots, A_n$, а от $p_1, \dots, p_n$, будучи симметрической функцией переменных $p_1, \dots, p_n$.*

5°. *Энтропия $H(\mathcal{E})$ – непрерывная функция от $p_1, \dots, p_n$.*

Доказательство. 1°. Доопределив функцию $f(p) = -p \log p$ по непрерывности нулем при $p = 0$, заметим, что $f(p) \geq 0$, причем $f(p) = 0$ тогда и тлько тогда, когда $p = 0$ или $p = 1$.

2°. Обозначим $g(x) = x \log x$. Легко убедиться, что $g''(x) \geq 0$ при $x \in [0, 1]$, то есть $g(x)$ выпукла при указанных x. Это означает, что для любых неотрицательных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ таких, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, при любых неотрицательных $y_1, \dots, y_n$

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(y_i).$$

Положим $\alpha_i = \frac{1}{n}$, $y_i = p_i$. Тогда в силу последнего неравенства

$$H(\mathcal{E}_0) = -\log\frac{1}{n} = -n\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{n} \log\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{n}\right)\right] \geq -n \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{n} \log p_i = H(\mathcal{E}),$$

что и требовалось доказать.

3°. Во-первых, покажем, что $H(\mathcal{E}_1) \leq H(\mathcal{E})$. Действительно,

$$H(\mathcal{E}_1) = -\sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq i}} p_k \log p_k - (p_i + p_j) \log(p_i + p_j) =$$

$$= -\sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq i}} p_k \log p_k - p_i \log(p_i + p_j) - p_j \log(p_i + p_j) \leq$$

$$\leq -\sum_{\substack{k\neq i\\ k\neq i}} p_k \log p_k - p_i \log p_i - p_j \log p_j = H(\mathcal{E}_1).$$

Во-вторых, вычислим

$$H(\mathcal{E}) - H(\mathcal{E}_1) = -p_i \log p_i - p_j \log p_j + (p_i + p_j)\log(p_i + p_j) =$$

$$= (p_i + p_j)\left[-\frac{p_i}{p_i + p_j}\log p_i - \frac{p_j}{p_i + p_j}\log p_j + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{p_i}{p_i + p_j} + \frac{p_j}{p_i + p_j}\log(p_i + p_j)\right)\right] =$$

$$= (p_i + p_j)\left[-\frac{p_i}{p_i + p_j}\log\frac{p_i}{p_i + p_j} - \frac{p_j}{p_i + p_j}\log\frac{p_j}{p_i + p_j}\right] = (p_i + p_j)H(\mathcal{E}_2),$$

что и требовалось доказать.

Наконец, пункты 4° и 5° очевидны. Теорема доказана. □

Из свойства 2° энтропии видно, что энтропия эксперимента с максимальной неопределенностью максимальна, а из свойства 1° вытекает, что энтропия минимальна в полностью “определенном” эксперименте. Свойство 3° показывает, что энтропия в определенном смысле аддитивна: при увеличении неопределенности за счет увеличения числа исходов энтропия возрастает, причем прирост энтропии пропорционален вероятности дополнительных исходов. Эти свойства показывают, что энтропия, определяемая соотношением (7.4.2), является вполне разумной мерой неопределенности стохастического эксперимента с конечным числом исходов. Более того, Д. К. Фаддееву удалось показать, что система свойств 1° – 5° однозначно определяет функционал (7.4.2) (Фаддеев, 1956) (см. также (Яглом и Яглом, 1973)). Другими словами, если мы захотим сконструировать какую-либо меру неопределенности, которая должна обладать вполне естественно ожидаемыми от такой характеристики свойствами 1° – 5°, то мы неизбежно придем к энтропии.

Очевидно, вместо экспериментов с n исходами мы можем рассматривать дискретные случайные величины, принимающие какие-либо значения $x_1, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_n$, считая, что значение x_i случайной величины X наблюдается в результате осуществления исхода A_i эксперимента $\mathcal{E}$. Поэтому по аналогии с (7.4.2) мы можем определить энтропию простой случайной величины X как

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i,$$

или, вводя плотность $p(x)$ распределения X относительно считающей меры

$$p(x) = \begin{cases} p_i, & x = x_i,\ i = 1, \ldots, n; \\ 0, & x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}, \end{cases}$$

как

$$H(X) = -\mathsf{E} \log p(X). \tag{7.4.3}$$

По формальной аналогии с (7.4.3), если X – абсолютно непрерывная случайная величина с лебеговой плотностью $p(x)$, то определим энтропию $H(X)$ величины X так же, как (7.4.3). Однако, аналогия таких определений энтропии дискретной и абсолютно непрерывной случайных величин оказывается чисто формальной. Как известно, каждая случайная величина X как функция элементарного исхода может быть представлена в виде поточечного предела последовательности простых случайных величин X_n. Тогда, конечно же, $X_n \Rightarrow X$. Но если мы попытаемся использовать предельный переход при неограниченно увеличивающемся числе значений аппроксимирующих простых случайных величин для того, чтобы получить энтропию предельной абсолютно непрерывной случайной величины X в виде (7.4.3), мы неизбежно потерпим неудачу, так как предел энтропий аппроксимирующих простых случайных величин оказывается бесконечным. Тем не менее, выражение в правой части (7.4.3) оказывается пределом для "стандартизованных" энтропий аппроксимирующих простых случайных величин в следующем смысле. По сути энтропия (7.4.3) абсолютно непрерывной случайной величины определяет среднюю информацию, содержащуюся в X по сравнению с "бесконечно большой аддитивной постоянной". Чтобы пояснить сказанное, разобьем область значений величины X на непересекающиеся интервалы Δ_i равной длины δ. Определим соответствующую дискретную аппроксимацию X_δ случайной величины X, полагая X_δ равной некоторому фиксированному элементу интервала Δ_i, если X попадает в этот интервал. Тогда $X_\delta \Rightarrow X$ $(\delta \to 0)$, и при некоторых условиях регулярности на плотность $p(x)$ величины X для некоторых точек $x_i^* \in \Delta_i$ мы имеем

$$\begin{aligned} H(X_\delta) = -\sum_i \mathsf{P}(X \in \Delta_i) \log \mathsf{P}(X \in \Delta_i) = -\sum_i p(x_i^*)\delta \log(p(x_i^*)\delta) = \\ -\sum_i p(x_i^*)\delta \log p(x_i^*) - \sum_i p(x_i^*)\delta \log \delta = \\ -\sum_i p(x_i^*)\delta \log p(x_i^*) - \log \delta. \end{aligned} \tag{7.4.4}$$

Первое слагаемое в правой части (7.4.4) представляет собой интегральную сумму Дарбу для величины $H(X)$, определяемой соотношением

(7.4.3). Поэтому мы можем записать

$$H(X) = \lim_{\delta \to 0} [H(X_\delta) + \log \delta]. \tag{7.4.5}$$

Таким образом, величину $H(X)$, определенную для абсолютно непрерывной случайной величины X соотношением (7.4.3) и являющуюся пределом нормированных мер неопределенности, саму можно считать мерой неопределенности стохастического эксперимента, в результате которого наблюдается случайная величина X, то есть мерой неопределенности ее распределения.

В соответствии с Определением 7.4.2, величину $-\log \delta$ в соотношении (7.4.5) можно интерпретировать как информацию, содержащуюся в событии, вероятность которого равна δ. Таким образом, эта величина может характеризовать рост неопределенности X_δ, вызванный квантованием. Поэтому можно считать, что $H(X)$ характеризует неопределенность абсолютно непрерывной случайной величины, обусловленную формой ее распределения. При этом, однако, соотношение (7.4.3) имеет разный смысл для дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин.

Определение 7.4.5. Величина $H(X)$, определенная для абсолютно непрерывной случайной величины X соотношением (7.4.3), называется дифференциальной энтропией случайной величины X.

Рассмотрим теперь вопрос о том, какие абсолютно непрерывные распределения имеют наибольшую дифференциальную энтропию. Ответ на него укажет на наиболее неопределенные (непредсказуемые) абсолютно непрерывные случайные величины.

В вариационном исчислении хорошо известен следующий метод решения так называемой изопериметрической задачи.

Пусть $p(x)$ – некоторая функция вещественного аргумента x, a и b – некоторые числа, $a < b$. Предположим, что заданы функции $F(x, p(x))$, $\phi_i(x, p(x))$ и числа a_i, $i = 1, \ldots, n$. Известно, что функция $p(x)$, обращающая в максимум функционал

$$J(p) = \int_a^b F(x, p) dx$$

при условиях

$$\int_a^b \phi_i(x, p) dx = a_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{7.4.6}$$

находится из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial p} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial p} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial \phi_n}{\partial p} = 0. \tag{7.4.7}$$

Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – неопределенные коэффициенты, определяемые подстановкой решения уравнения (7.4.7) в условия (7.4.6) (см., например, (Эльсгольц, 1969)).

Теорема 7.4.2. 1°. *Пусть случайная величина X имеет равномерное распределение на некотором отрезке $[-a, a]$. Тогда $H(X) \geq H(Y)$ для любой случайной величины Y, удовлетворяющей условию $\mathsf{P}(|Y| \leq a) = 1$.*

2°. *Пусть случайная величина X имеет показательное распределение с некоторым параметром $\mu > 0$. Тогда $H(X) \geq H(Y)$ для любой случайной величины Y, удовлетворяющей условиям $\mathsf{P}(Y \geq 0) = 1$ и $\mathsf{E}Y = \mu^{-1}$.*

3°. *Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение с некотрыми параметрами a и σ^2. Тогда $H(X) \geq H(Y)$ для любой случайной величины Y, удовлетворяющей условиям $\mathsf{E}Y = a$, $\mathsf{D}Y = \sigma^2$.*

Доказательство. 1°. Положим $F(x, p) = -p \log p$, $\phi_1(x, p) = p$. Тогда мы имеем задачу

$$J(p) = -\int\limits_{-a}^{a} p \log p dx \ \rightarrow \ \max_p$$

при условии

$$\int\limits_{-a}^{a} \phi_1(x, p) dx = 1. \tag{7.4.8}$$

Уравнение (7.4.7) для этой задачи принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial p} + \lambda \frac{\partial \phi_1}{\partial p} = -(1 + \log p) + \lambda = 0.$$

Решением этого уравнения является функция $p(x) = e^{\lambda - 1}$. Эта функция постоянна по $x \in [-a, a]$. С учетом условия (7.4.8) мы заключаем, что $p(x) = \frac{1}{2a}\mathbf{1}(-a \leq x \leq a)$, то есто $p(x)$ – это плотность распределения, равномерного на $[-a, a]$.

2°. Положим $F(x, p) = -p \log p$, $\phi_1(x, p) = p$, $\phi_2(x, p) = xp$. Тогда мы имеем задачу

$$J(p) = -\int\limits_{0}^{\infty} p \log p dx \ \rightarrow \ \max_p$$

при условиях

$$\int\limits_{0}^{\infty} \phi_1(x, p) dx = 1, \quad \int\limits_{0}^{\infty} \phi_2(x, p) dx = \mu^{-1}. \tag{7.4.9}$$

Уравнение (7.4.7) для этой задачи принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial p} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial p} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial p} = -(1 + \log p) + \lambda_1 + \lambda_2 x = 0.$$

Решением этого уравнения является функция $p(x) = e^{\lambda_1 - 1 + \lambda_2 x}$. Подставляя эту функцию в условия (7.4.9), находим, что $e^{\lambda_1 - 1} = -\lambda_2$ и $\lambda_2 = -\mu$, то есть $p(x) = \mu e^{-\mu x} \mathbf{1}(x \geq 0)$.

3°. Не ограничивая общности, будем считать, что $a = 0$. Положим $F(x, p) = -p \log p$, $\phi_1(x, p) = p$, $\phi_2(x, p) = x^2 p$. Тогда мы имеем задачу

$$J(p) = -\int_{-\infty}^{\infty} p \log p dx \ \to \ \max_p$$

при условиях

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x, p) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(x, p) dx = \sigma^2. \tag{7.4.10}$$

Уравнение (7.4.7) для этой задачи принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial p} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial p} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial p} = -(1 + \log p) + \lambda_1 + \lambda_2 x^2 = 0.$$

Решением этого уравнения является функция $p(x) = e^{\lambda_1 - 1 + \lambda_2 x^2}$. Подставляя эту функцию в условия (7.4.10), находим, что $e^{\lambda_1 - 1} = \sqrt{-\lambda_2/\pi}$ и $\lambda_2 = -\frac{1}{2}\sigma^{-2}$, откуда $e^{\lambda_1 - 1} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, то есть $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$, $-\infty < x < \infty$. Теорема доказана.

Из пункта 2° Теоремы 7.4.2 вытекает, что пуассоновский процесс является наиболее неопределенным, наиболее хаотичным среди всех процессов восстановления с конечными математическими ожиданиями и абсолютно непрерывными распределениями длин ξ_j, $j \geq 1$, промежутков времени между последовательными “восстановлениями”, так как его характеризует показательное распределение случайных величин ξ_j, $j \geq 1$.

Связь пуассоновского процесса с еще одним наиболее неопределенным распределением – нормальным, – имеет асимптотический вид. Мы опишем ее в следующем разделе.

Здесь же, подводя итог, мы можем сделать следующий вывод. Теоремы 7.3.1 и 7.4.2 являются убедительными аргументами в пользу того, что пуассоновский процесс является самой подходящей математической моделью однородных и абсолютно хаотичных потоков однотипных событий.

7.5 Асимптотическая нормальность пуассоновского процесса

Пусть $N(t)$, $t \geq 0$, – пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$. Как мы видели выше, $\mathsf{E}N(t) \equiv \mathsf{D}N(t) \equiv \lambda t$. Целью данного раздела является доказательство асимптотической нормальности пуассоновского процесса в том смысле, что (см. также Теорему 1.5.6)

$$\mathsf{P}\left(\frac{N(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x\right) \Longrightarrow \Phi(x) \quad \text{при} \quad \lambda t \to \infty. \tag{7.5.1}$$

На самом деле, мы докажем более сильное утверждение, из которого будет вытекать (7.5.1). Мы покажем, что сходимось функций распределения, участвующих в (7.5.1), равномерна по x и укажем оценку скорости этой равномерной сходимости. Пусть C_0 – абсолютная постоянная в неравенстве Берри-Эссеена,

$$0.4097 < \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}} \leq C_0 \leq 0.7655,$$

(см. раздел 1.4).

Теорема 7.5.1. *При любых $\lambda > 0$, $t > 0$*

$$\sup_x \left|\mathsf{P}\left(\frac{N(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x\right) - \Phi(x)\right| \;\leq\; \frac{C_0}{\sqrt{\lambda t}}. \tag{7.5.2}$$

Доказательство аналогично доказательству Леммы 2.4.2.

Рассуждая точно так же, как при доказательстве Леммы 2.4.2, но используя неравномерную оценку скорости сходимости в центральной предельной теореме вместо неравенства Берри-Эссеена, можно доказать следующий результат.

Теорема 7.5.1. *При любых $\lambda > 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$*

$$(1+|x|^3)\left|\mathsf{P}\left(\frac{N(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x\right) - \Phi(x)\right| \;\leq\; \frac{32}{\sqrt{\lambda t}}.$$

Обратим внимание, что пуассоновский процесс обладает свойством асимптотической нормальности при $\lambda t \to \infty$, что выполнено, например, при фиксированной интенсивности, но при неограниченно растущем времени или при фиксированном времени, но при неограниченно растущей интенсивности.

7.6 Смешанные пуассоновские процессы

Однородные пуассоновские процессы, определенные в разделе 7.1, могут рассматриваться как хорошие “начальные приближения” при построении математических моделей хаотических потоков событий. Однако для построения более гибких, а стало быть, и более адекватных моделей, довольно жесткие ограничения, задающие пуассоновский процесс, надо ослабить. При этом хотелось бы сохранить свойство хаотичности, присущее пуассоновским процессам. Естественной попыткой обобщить классический пуассоновский процесса будет отказ от условия постоянства интенсивности. Мы пойдем еще дальше и будем считать, что интенсивность сама может являться случайным процессом. Данный раздел посвящен простейшему обобщению, согласно которому любая траектория случайного процесса, играющего роль интенсивности, постоянна. Такой случай может быть интерпретирован следующим образом: в момент $t = 0$ происходит случайный эксперимент, результатом которого является значение некоторой положительной случайной величины Λ. При $t > 0$ процесс развивается в соответствии с определением однородного пуассоновского процесса, интенсивность которого равна упомянутому выше значению случайной величины Λ.

Поясним сказанное конкретными определениями. Схема изложения материала данного раздела следует обзорам (Эмбрехтс и Клюппельберг, 1993) и (Гранделл, 1998) (см. также (Grandell, 1997).

Пусть $\mathcal{M}$ – множество всех таких функций $\mu = \{\mu(t);\ t \geq 0\}$, что:

(i) $\mu(0) = 0$;

(ii) $\mu(t) < \infty$ для всех $t < \infty$;

(iii) $\mu(\cdot)$ не убывает и непрерывна справа.

Пусть $\mathcal{N}$ обозначает целочисленные и бесконечнозначные элементы в $\mathcal{M}$. Как правило, элементы из $\mathcal{N}$ мы будем обозначать ν. Далее, пусть

$$\mathcal{N}_S = \{\nu \in \mathcal{N};\, \nu(t) - \nu(t-) = 0 \text{ или } 1\},$$

то есть $\nu \in \mathcal{N}_S$ возрастает строго на единицу в точках роста.

Пусть $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ и $\mathcal{B}(\mathcal{N})$ – σ-алгебры, порожденные проекциями, то есть $\mathcal{B}(\mathcal{M}) = \sigma\{\mu \in \mathcal{M};\ \mu(t) \leq y,\ t \geq 0,\ y < \infty\}$ и $\mathcal{B}(\mathcal{N}) = \sigma\{\nu \in \mathcal{N};\ \nu(t) \leq y,\ t \geq 0,\ y < \infty\}$. Известно, что $\mathcal{N} \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ и $\mathcal{N}_S \in \mathcal{B}(\mathcal{N})$.

Точечный процесс $N = \{N(t);\ t \geq 0\}$ – это измеримое отображение измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathcal{N}))$. *Распределением* процесса N называется вероятностная мера Π на $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathcal{N}))$.

Менее формально, точечный процесс описывает случайное размещение точек на фазовом пространстве $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Случайный процесс $N(\cdot)$ иногда называют *считающим процессом*, и $N(t)$ обозначает число таких точек, попавших в интервал $(0, t]$. В актуарных приложениях $N(t)$ часто интерпретируется как число страховых требований на промежутке $(0, t]$. В дальнейшем мы часто будем говорить не о точках, а о моментах осуществления некоторых событий.

Вполне естественно рассматривать точечные процессы, определенные на фазовых пространствах, отличных от $\mathbb{R}_+$. Например, иногда (см. Breiman, 1963) естественно рассматривать точечные процессы, определенные на $\mathbb{R}$. В таком случае считающий процесс задается соотношением

$$N(t) = \begin{cases} N\{(0,t]\}, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -N\{(t,0]\}, & t < 0, \end{cases}$$

где $N\{A\}$ обозначает число точек на множестве $A \subset \mathbb{R}$.

Точечный процесс называется *стационарным*, если “сдвинутый” точечный процесс N_s, определяемый соотношением $N_s(t) = N(s+t) - N(s)$, имеет одно и то же распределение для всех $s \geq 0$. В этом случае $\mathsf{E}N(t) = \alpha \cdot t$, где α называется *интенсивностью* N.

Точечный процесс называется *ординарным*, если $\Pi(\mathcal{N}_S) = 1$. Таким образом, ординарный точечный процесс описывает случайное распределение “изолированных” точек.

Предположим, что событие произошло в момент времени t, что то же самое, что $N(t) - N(t-) = 1$. Для стационарного процесса вероятность осуществления события в любой фиксированный момент времени $t > 0$ равна нулю. Формально, так как $\nu(0) = 0$ для всех $\nu \in \mathcal{N}$, осуществление события в момент 0 *невозможно*. В связи с приводимой ниже Теоремой 7.6.8, тем не менее, желательно допустить такую возможность. Чтобы справиться с этой неувязкой, касающейся только обозначений, мы расширим $\mathcal{N}$ до $\mathcal{N}_E$, где $\mathcal{N}_E$ – множество всех таких функций $\nu = \{\nu(t);\ t \geq 0\}$, что или $\nu(\cdot) \in \mathcal{N}$, или $\nu(\cdot) - 1 \in \mathcal{N}$. Распределение Π может быть продолжено до меры на $(\mathcal{N}_E, \mathcal{B}(\mathcal{N}_E))$, если положить

$$\Pi(B) = \Pi(B \cap \mathcal{N}), \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_E).$$

Дадим еще одно определение пуассоновского процесса (по сути это характеризация пуассоновского процесса в классе точечных процессов).

Определение 7.6.1. Точечный процесс N называется *пуассоновским процессом с интенсивностью* α, и распределением, обозначаемым Π_α, если

(i) $N(t)$ имеет независимые приращения;

(ii) $N(t)-N(s)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\alpha\cdot(t-s)$.

Пуассоновский процесс является стационарным и ординарным. Пуассоновский процесс с интенсивностью 1 называется *стандартным пуассоновским процессом*. Стандартный пуассоновский процесс будет обозначаться $N_1(t)$.

Основные определения

Пусть U – функция распределения неотрицательной случайной величины Λ.

Определение 7.6.2. Точечный процесс N называется *смешанным пуассоновским процессом* со *структурным распределением* U и обозначается $\mathrm{MPP}(U)$, если его распределение Π_U задается соотношением

$$\Pi_U(B)=\int_0^\infty \Pi_\lambda(B)\,dU(\lambda)\quad \text{для } B\in\mathcal{B}(\mathcal{N}).$$

Так как любой пуассоновский процесс стационарен, то и смешанный пуассоновский процесс является стационарным.

Определение 7.6.2 приводит к следующей интуитивной интерпретации смешанного пуассоновского процесса N: сначала реализуется значение λ неотрицательной случайной величины Λ, и при этом условии N является пуассоновским процессом с интенсивностью λ.

Более точно, мы рассматриваем (Λ,N) как измеримое отображение, действующее из измеримого пространства $(\Omega,\mathcal{F})$ (снабженного мерой P) в $(\mathbb{R}_+\times\mathcal{N},\mathcal{B}(\mathbb{R}_+\times\mathcal{N}))$, где

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+\times\mathcal{N})=\sigma\{(\lambda,\nu)\in\mathbb{R}_+\times\mathcal{N};\ \lambda\le x,\ \nu(t)\le y,\ t\ge 0,\ x,\,y<\infty\},$$

и имеющее распределение, задаваемое соотношением

$$\mathsf{P}(\Lambda\le x,\ N\in B)=\int_0^x \Pi_\lambda(B)\,dU(\lambda),\quad B\in\mathcal{B}(\mathcal{N}).$$

В рамках этого определения естественно рассматривать смешанный пуассоновский процесс как байесовскую версию пуассоновского процесса, а U – как *априорное распределение* интенсивности.

Иногда желательно, чтобы величина Λ явно входила в определение. В этом случае можно использовать следующее определение.

Определение 7.6.3. Пусть случайная величина Λ и стандартный пуассоновский процесс N_1 независимы. Точечный процесс $N=N_1\circ\Lambda$, где $N_1 \circ \Lambda(t) \equiv N_1(\Lambda t)$, называется смешанным пуассоновским процессом.

Определение 7.6.2 вполне естественно, оно использует распределения точечных процессов – понятие, появившееся на сравнительно недавних этапах развития теории стохастических процессов. Первоначальное определение смешанных пуассоновских процессов, данное Лундбергом в 1940 г. (см. (Lundberg, 1964)), было несколько другим. Перед тем как привести это изначальное определение, введем, на первый взгляд, более простое понятие.

Определение 7.6.4. Будем говорить, что случайная величина N имеет *смешанное пуассоновское распределение* и обозначать это как $\mathrm{MP}(t, U)$, если

$$p_n(t) \equiv \mathsf{P}(N(t) = n) = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t}\, dU(\lambda), \quad k = 0,\, 1, \ldots$$

Присутствие t в Определении 7.6.4 может вызвать некоторое недоумение. Однако, как мы увидим позднее, такой подход оказывается весьма полезным. Тем не менее, мы иногда будем вместо $\mathrm{MP}(1, U)$ использовать обозначение $\mathrm{MP}(U)$. Пусть U_t – функция распределения случайной величины Λt, то есть $U_t(\lambda) = U(\lambda/t)$. Легко видеть, что $\mathrm{MP}(t, U) = \mathrm{MP}(U_t)$.

Определение 7.6.5. Ординарный марковский точечный процесс N называется *процессом размножения* с интенсивностями $\kappa_n(t)$, если

$$p_{m,n}(t, t+h) = \begin{cases} 1 - \kappa_m(t)h + o(h), & n = m, \\ \kappa_m(t)h + o(h), & n = m+1, \\ o(h), & n > m+1 \end{cases}$$

при $h \downarrow 0$, где $p_{m,n}(s,t) \equiv P(N(t) = n | N(s) = m)$ для $0 \le s \le t$.

Теперь мы можем сформулировать исторически первое определение смешанного пуассоновского процесса, данное Лундбергом.

Определение 7.6.6. Процесс размножения N называется *смешанным пуассоновским процессом*, если случайная величина $N(t)$ имеет распределение $\mathrm{MP}(t, U)$ для всех $t \ge 0$ и некоторого распределения U.

На практике в качестве распределения U чаще всего выбирают $\Gamma(\gamma, \beta)$*-распределение*:

$$u(\lambda) \equiv U'(\lambda) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \lambda^{\gamma-1} e^{-\beta\lambda}, \quad \lambda \ge 0.$$

В этом случае случайная величина $N(t)$ имеет *отрицательное биномиальное распределение*, то есть

$$p_n(t) = {}^{n}_{\gamma+n-1} \left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^{\gamma} \left(\frac{t}{\beta+t}\right)^{n}, \quad n = 0,\, 1, \ldots \tag{7.6.1}$$

Соответствующий смешанный пуассоновский *процесс* называется *процессом Пойа*, и его интенсивности задаются формулой

$$\kappa_n(t) = \frac{\gamma+n}{\beta+t}\,. \tag{7.6.2}$$

В качестве первого обобщения (7.6.2) можно рассмотреть $\kappa_n(t) = \kappa_n/(\beta+t)$, допуская нелинейную зависимость интенсивностей от времени. Естественным дальнейшим обобщением (7.6.2) может быть, например, $\kappa_n(t) = \kappa_n \cdot v(t)$ для некоторой последовательности $\{\kappa_n\}$ и для некоторой функции $v(t)$. Тем не менее, см. Теорему 7.6.1, приводимую ниже, процесс размножения будет смешанным пуассоновским процессом тогда и только тогда, когда $\kappa_n(t)$ задается формулой (7.6.2).

Теорема 7.6.1. (Лундберг, 1964) *Пусть N – это* MPP(U) *с интенсивностями $\kappa_n(t)$. Следующие три утверждения эквивалентны*:

(i) *N является процессом Пойа или пуассоновским процессом;*

(ii) *$\kappa_n(t)$ линейна по n для любого фиксированного t;*

(iii) *$\kappa_n(t)$ есть произведение двух сомножителей, один из которых зависит только от n, а другой – только от t.*

Для любого смешанного пуассоновского процесса выполнено соотношение $\kappa_n(t) = E[\Lambda|N(t) = n]$. Поэтому $\kappa_n(t)$ можно рассматривать как *наилучшую оценку* (или как байесовскую оценку) величины Λ при условии, что $N(t) = n$.

Рассмотрим теперь несколько простых свойств смешанных пуассоновских процессов. Первое из них почти тривиально.

Теорема 7.6.2. *Пусть N –* MPP(U). *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \Lambda \quad \mathsf{P}\text{-п.н.}$$

Теперь рассмотрим свойства, связанные с безграничной делимостью.

Определение 7.6.7. Точечный процесс N называется *безгранично делимым*, если для каждого n существует точечный процесс N_n такой, что N имеет то же распределение, что и сумма n независимых копий N_n.

Это определение было бы корректнее сформулировать в терминах распределений, а не процессов или случайных величин. Дело в том, что существуют примеры вероятностных пространств, на которых даже пуассоновский процесс не будет безгранично делимым в смысле Определения 7.6.7, так как не для всякого n оказывается возможным определить на таких вероятностных пространствах *n независимых* копий процесса N_n (см. комментарий Дж. Дуба к книге (Gnedenko and Kolmogorov, 1954)). Для простоты мы будем считать, что базовое вероятностное пространство, на котором заданы все рассматриваемые здесь случайные величины и процессы, достаточно богато, так что процессы с *безгранично делимыми распределениями* безгранично делимы в смысле Определения 7.6.2.

Более подробно безгранично делимые точечные процессы рассмотрены в (Керстан, Маттес и Мекке, 1982).

Следующая теорема приведена в (B'uhlman and Buzzi, 1971).

Теорема 7.6.3. *Пусть N является* MPP(U)*, где U – распределение неотрицательной случайной величины Λ. Тогда N – безгранично делимый процесс, если и только если Λ безгранично делима.*

Доказательство. Предположим, что Λ безгранично делима. Тогда при каждом $n \geq 1$ имеет место представление $\Lambda \stackrel{d}{=} \Lambda_{n,1} + \ldots + \Lambda_{n,n}$, где случайные величины $\Lambda_{n,1}, \ldots, \Lambda_{n,n}$ независимы и одинаково распределены. Но тогда характеристическая функция случайного процесса N имеет вид

$$\mathsf{E}e^{isN} = \mathsf{E}\exp\{\Lambda(e^{is} - 1)\} = \mathsf{E}\exp\{(\Lambda_{n,1} + \ldots + \Lambda_{n,n})(e^{is} - 1)\} =$$
$$= \left(\mathsf{E}\exp\{\Lambda_{n,1}(e^{is} - 1)\}\right)^n,$$

что означает, что $N \stackrel{d}{=} N_1 + \ldots + N_n$, где случайные процессы $N_1, \ldots, N_n$ независимы и одинаково распределены, причем $N_i \sim \mathrm{MPP}(U_n)$, где U_n – функция распределения случайной величины $\Lambda_{n,1}$. Таким образом, N – безгранично делимый процесс.

Предположим теперь, что N – безгранично делимый процесс. Тогда случайная величина $N(t)$ безгранично делима для каждого t, и поэтому $N(t)/t$ безгранично делима. Так как $N(t)/t \to \Lambda$ (см. Теорему 7.6.2), и так как предел безгранично делимых случайных величин будет безгранично делимым, то Λ будет безгранично делимой. Теорема доказана. □

Подробный анализ процессов Пойа с точки зрения их безграничной делимости приведен в (Waymire and Gupta, 1983).

Любая смесь экспоненциальных распределений безгранично делима. Этот результат получен в (Goldie, 1967) и упоминается в (Феллер, 1984), т. 2. Отсюда вытекает, что время ожидания первого события у процесса MPP(U) с $U(0) = 0$ безгранично делимо.

Характеризация смешанных пуассоновских процессов

Характеризация в классе процессов размножения. Следующая теорема доказана в (Lundberg, 1964).

Теорема 7.6.4. *Пусть N является процессом размножения с интенсивностями $\kappa_n(t)$ и маргинальным распределением $p_n(t)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *N – смешанный пуассоновский процесс.*

(ii) *$\kappa_n(t)$ удовлетворяют соотношениям $\kappa_{n+1}(t) = \kappa_n(t) - \kappa_n'(t)/\kappa_n(t)$ для $n = 0, 1, \ldots$*

(iii) *$\kappa_n(t)$ и $p_n(t)$ удовлетворяют соотношениям $p_n(t) = \frac{t}{n}\kappa_{n-1}(t)p_{n-1}(t)$ для $n = 1, 2, \ldots$*

(iv) $\mathsf{E}[\kappa_{N(t)}(t)|N(s) = m] = \kappa_m(s)$ *для $0 < s \leq t$ и $m = 0, 1, \ldots$*

(v) $\mathsf{E}[N(t) - N(s)|N(s) = m] = \kappa_m(s)(t - s)$ *для $s \leq t$ и $m = 0, 1, \ldots$*

(vi) $\mathsf{P}(N(s) = m|N(t) = n) = C_n^m\,(s/t)^m\,(1 - s/t)^{n-m}$ *для $s \leq t$ и $m \leq n$.*

Утверждение (iv) Теоремы 7.6.4 наиболее примечательно. Предположим, что $\kappa_0(0) < \infty$. Так как N – марковский процесс, то

$$E[\kappa_{N(t)}(t)|N(s) = m] = E[\kappa_{N(t)}(t)|\mathcal{F}_t^N],$$

где $\mathcal{F}_t^N = \sigma\{N(s);\ s \leq t\}$. Поэтому $\mathcal{F}_t^N$ является σ-алгеброй, порожденной поведением процесса N до момента времени t, и представляет собой *внутреннюю историю* процесса N до момента времени t. $\mathbf{F}^N = (\mathcal{F}_t^N;\ t \geq 0)$ – *естественная фильтрация* процесса N.

Поэтому эта часть Теоремы 7.6.4 может быть переписана в следующем виде: *процесс размножения N с $\kappa_0(0) < \infty$ будет смешанным пуассоновским процессом тогда и только тогда, когда $\kappa_{N(t)}(t)$ будет $\mathbf{F}^N$-мартингалом.*

Утверждение (ii) Теоремы 7.6.4 является очень полезным характеризационным свойством. К примеру, на нем основано доказательство Теоремы 7.6.1. Предположим, что у нас имеется смешанный пуассоновский процесс N с интенсивностями $\kappa_n(t)$, который мы рассматриваем как процесс размножения, По некоторым причинам мы хотим обобщить модель и поэтому рассматриваем процесс размножения $N^{(\beta)}$ с интенсивностями $\kappa_n^{(\beta)}(t) = \beta \cdot \kappa_n(t)$. Тогда

$$\kappa_n^{(\beta)}(t) - \frac{d \log(\kappa_n^{(\beta)}(t))}{dt} = (\beta - 1 + 1) \cdot \kappa_n(t) - \frac{d \log(\kappa_n(t))}{dt} = (\beta - 1) \cdot \kappa_n(t) + \kappa_{n+1}(t).$$

Поэтому при $\beta \neq 1$ процесс $N^{(\beta)}$ является смешанным пуассоновским, если и только если $\kappa_{n+1}(t) = \kappa_n(t)$. Снова применяя (ii), видим, что это имеет место тогда и только тогда, когда N – пуассоновский процесс. Иначе говоря, весьма маловероятно, что непуассоновский процесс размножения, построенный с помощью теоретических или эмпирических соображений относительно его интенсивностей $\kappa_n(t)$, будет смешанным пуассоновским процессом.

Теорема 7.6.5. (McFadden, 1965) *Пусть N – процесс размножения, удовлетворяющий условиям*

(a) $\kappa_n(t)$ *дважды дифференцируема;*

(b) $\kappa_0(0) < \infty$*;*

(c) *Для каждых n и $T < \infty$ существует константа $C_{n,T} < \infty$ такая, что*
$p_{k,n+k}(s,t)\kappa_{n+k}(t) \leq C_{n,T}$ *для всех $k \geq 2$ и всех $s \leq t \leq T$.*

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) *N – смешанный пуассоновский процесс.*

(ii) *N – стационарный процесс.*

Характеризация в классе стационарных точечных процессов. Пусть N есть MPP(U), где U – распределение неотрицательной случайной величины Λ, и пусть U_c – распределение величины $c\Lambda$. Символом D_pN обозначим точечный процесс, полученный сохранением (в том же месте) каждой точки процесса с вероятностью p и удалением ее с вероятностью $1-p$ независимо от других точек. Процесс D_pN называется *p-прореживанием* процесса N и является MP$P(U_p)$. Мы можем "компенсировать" прореживание сжатием по времени. Более формально, определим оператор сжатия K_p как $K_pN(t) = N(t/p)$. Тогда сжатый по времени процесс K_pN будет MP$P(U_{1/p})$. Поэтому $K_pD_p\Pi_U = \Pi_U$ для любого смешанного пуассоновского процесса.

Теорема 7.6.6. (Nawrotzki, 1962) *Пусть N – стационарный точечный процесс с распределением* Π. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *N – смешанный пуассоновский процесс;*

(ii) $K_p D_p \Pi = \Pi$ *для некоторого* $p \in (0,1)$*;*

(iii) *при условии, что* $N(t) = n$*, моменты скачков равномерно распределены на отрезке* $[0,t]$ *для* $n \geq 1$ *и* $t > 0$.

В актуарных приложениях естественно рассматривать процесс N в качестве модели моментов наступления страховых случаев, хотя, с точки зрения страховой компании, возможно, больший интерес вызовет описание моментов поступления сообщений о требованиях или моментов выплат. Предположим, что у каждого случая имеется запаздывание, и что эти запаздывания описываются последовательностью независимых случайных величин $\{Y_k;\ k = 0,\ \pm1,\ \pm2, \ldots\}$ с общим распределением F. Будем считать эту последовательность независимой от N. Разумеется, страховой случай, о котором было сообщено после момента $t = 0$, мог произойти до момента $t = 0$, и поэтому мы будем рассматривать процесс N, определенный на $\mathbb{R}$ а не, как обычно, на $[0, \infty)$. В дальнейшем мы не будем предполагать, что $F(0) = 0$, хотя это и естественно в актуарных приложениях. Пусть T_n – момент n-го скачка N. Символом Π^F обозначим распределение точечного процесса N^F со скачками в точках $T_k + Y_k$. Будем называть процесс N^F *случайным сдвигом* процесса N.

Предположим, что F – нерешетчатое распределение, то есть не существует чисел c и d таких, что F сосредоточено на множестве $\{c,\ c \pm d,\ c \pm 2d, \ldots\}$.

Теорема 7.6.7. *Пусть N – стационарный точечный процесс, определенный на $\mathbb{R}$ и имеющий конечную интенсивность. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *N – смешанный пуассоновский процесс;*

(ii) $\Pi^F = \Pi$ *для некоторого неарифметического распределения* F.

Теорема 7.6.7 и соответствующие утверждения о сходимости к пуассоновскому процессу и к MPP имеют довольно долгую историю, восходящую к (Maruyama, 1955), (Добрушин, 1956), (Breiman, 1963), (Thedéen, 1964) и (Stone, 1968).

Рассмотрим множество $B \in \mathcal{B}(\mathcal{N})$. Определим “$B$-прореженный” процесс N^B с помощью соотношения

$$N^B\{ds\} = \mathbf{1}_B(N_s)N\{ds\}, \quad \text{где } \mathbf{1}_B(N) = \begin{cases} 1, & \text{если } N \in B, \\ 0, & \text{если } N \notin B. \end{cases}$$

Это означает, что процесс N^B состоит из таких точек процесса N, для которых сдвинутый точечный процесс N_s принадлежит B. Напомним, что $N_s(t) = N(s+t) - N(s)$. Очевидно, что процесс N^B стационарен.

Положим $\mathcal{N}^0 = \{\nu \in \mathcal{N}_E;\ \nu\{\{0\}\} = 1\}$. Пусть $\alpha\{B\}$ – интенсивность N^B. Из (Керстан, Маттес и Мекке, 1982), с. 309-311, следует, что $\alpha\{\,\cdot\,\}$ является мерой, то есть σ-аддитивной функцией на $(\mathcal{N}^0,\ \mathcal{B}(\mathcal{N}^0))$.

Определение 7.6.8. Пусть N – стационарный точечный процесс с распределением Π. Распределение Π^0, определяемое соотношением

$$\Pi^0(B) = \frac{\alpha\{B\}}{\alpha}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{N}^0),$$

называется *распределением Пальма.*

$\Pi^0(B)$ – это строгое определение распределения "$\Pi(B|N\{\{0\}\} = 1)$". Точечный процесс N^0 с распределением Π^0 называется *процессом Пальма.*

Часто удобно исключать событие в точке 0 и рассматривать *редуцированный* процесс Пальма $N^\dagger$ с распределением $\Pi^\dagger$. Процесс $N^\dagger$, вообще говоря, *не*стационарен, но интервалы между последовательными событиями $T_1^\dagger$, $T_2^\dagger - T_1^\dagger$, $T_3^\dagger - T_2^\dagger, \ldots$ образуют стационарную последовательность. Если N – пуассоновский процесс, то $\Pi = \Pi^\dagger$ что, фактически, является характеризацией пуассоновсого процесса. В этом случае и точечный процесс, и последовательность интервалов между событиями являются стационарными.

Теорема 7.6.8. (Mecke, 1976) *Пусть N – ординарный стационарный точечный процесс с конечной интенсивностью. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *N – смешанный пуассоновский процесс.*

(ii) *$N^\dagger$ – стационарный процесс.*

Характеризация в классе обобщенных точечных процессов. Точечный процесс N называется (возможно, нестационарным) смешанным пуассоновским процессом, MP$P(A, U)$, если это процесс Кокса с $\Lambda(t) = \Lambda \cdot A(t)$, где Λ – случайная величина с распределением U, а A – функция из $\mathcal{M}$. Очевидно, что $\mathsf{E}N(t) = A(t)\mathsf{E}\Lambda$. Процесс N является ординарным тогда и только тогда, когда функция A непрерывна.

Все стационарные точечные процессы удовлетворяют условию

$$\mathsf{P}(N(\infty) = 0 \text{ или } \infty) = 1. \tag{7.6.3}$$

Рассмотрим обобщения утверждений (vi) Теоремы 7.6.4 и (iii) Теоремы 7.6.6, независимо доказанных в (Kallenberg, 1973) и (Керстан, Маттес, Мекке, 1982, с. 99 и 105). Мы будем придерживаться терминологии, предложенной Калленбергом. Для каждого $t < \infty$, каждого $\mu \in \mathcal{M}$ и каждой дискретной случайной величины $\widetilde{N}$ мы можем построить точечный процесс N на $[0, t]$ следующим образом:

(i) Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины на $[0, t]$ с функцией распределения $F_X(x) = \mu(x)/\mu(t)$ для $0 \le x \le t$. Будем считать их независимыми от $\widetilde{N}$.

(ii) Пусть $N(t) = \widetilde{N}$ и пусть моменты скачков задаются как $X^{(1)}, \ldots, X^{(\widetilde{N})}$.

Точечный процесс, определенный таким образом, называется *смешанным выборочным процессом.*

Пусть для каждого t ${}^tN$ означает *сужение* N на $[0, t]$, т.е. ${}^tN(s) = N(\min(s, t))$.

Теорема 7.6.9. (Kallenberg, 1973), (Керстан, Маттес, Мекке, 1982) *Пусть N – точечный процесс, удовлетворяющий условию* (7.6.3), *и пусть $t_1, t_2, \ldots$ – действительные числа, такие что $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1°. *N – смешанный пуассоновский процесс.*

2°. *${}^{t_k}N$ – смешанный выборочный процесс для каждого k.*

Пусть $\mathcal{I}_U$ – множество конечных объединений интервалов из $[0, \infty)$.

Определение 7.6.9. Точечный процесс N называется *симметрично распределенным относительно* $\mu \in \mathcal{M}$, если распределение $(N\{A_1\}, \ldots, N\{A_n\})$ для всех n и для всех непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{I}_U$ зависит только от $(\mu\{A_1\}, \ldots, \mu\{A_n\})$.

Достаточно потребовать (Kallenberg, 1983), с. 73, чтобы $N\{A_1\}, \ldots, N\{A_n\}$ были перестановочными при любых непересекающихся $A_1, \ldots, A_n$, для которых $\mu\{A_1\} = \ldots = \mu\{A_n\}$.

Пусть, теперь, N – ординарный процесс, симметрично распределенный относительно μ. Для того, чтобы определить N, достаточно рассмотреть $\mathsf{P}(N\{A\} = 0)$. Из Определения 7.6.9 следует, что эти вероятности зависят только от $\mu\{A\}$. Следующая теорема является развитием результата (B́uhlman, 1960). По поводу дальнейших обобщений и смежных результатов см. (Kallenberg, 1983), с. 176.

Теорема 7.6.10. (Kallenberg, 1973) *Пусть N – ординарный точечный процесс, для которого выполнено* (7.6.3), *и μ – непрерывная функция из $\mathcal{M}$ с $\mu(\infty) = \infty$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1°. *N – смешанный пуассоновский процесс.*

2°. $\mathsf{P}(N\{A\} = 0) = \phi(\mu\{A\})$ *для некоторой функции* ϕ *и всех* $A \in \mathcal{I}_U$.

Теорему 7.6.10 вполне можно понять и не прибегая к идее "симметричных распределений", но при этом будут утеряны некоторые из ее предпосылок.

Рассмотрим процесс $\mathbf{1}_B(N)N\{ds\}$, где

$$\mathbf{1}_B(N) = \begin{cases} 1, & \text{если } N \in B, \\ 0, & \text{если } N \notin B, \end{cases}$$

который является модификацией ($\mathbf{1}_B(N)$ вместо $\mathbf{1}_B(N_s)$) "B-прореженного" процесса, использованного при определении распределения Пальма в стационарном случае. При фиксированном B определим отображение

$$\alpha\{B, ds\} = \mathsf{E}[\mathbf{1}_B(N)N\{ds\}],$$

которое в силу того, что $\mathbf{1}_B(N) \leq 1$, абсолютно непрерывно относительно $\alpha\{ds\}$.

Определение 7.6.10. Пусть N – ординарный точечный процесс с распределением Π. Распределение Π_s, задаваемое производной Радона-Никодима

$$\Pi_s(B) = \frac{\alpha\{B, ds\}}{\alpha\{ds\}}, \qquad B \in \mathcal{B}(\mathcal{N}),\ s \geq 0,$$

называется *распределением Пальма.*

Пусть, как и в стационарном случае, $N_s^\dagger$ означает редуцированный процесс Пальма, в котором исключено событие в точке s.

Теорема 7.6.11. (Kallenberg, 1973) *Пусть N – ординарный точечный процесс с конечной интенсивностью, для которого выполнено условие* (7.6.3). *Следующие утверждения эквивалентны:*

1°. *N – смешанный пуассоновский процесс.*

2°. *Распределение $N_s^\dagger$ не зависит от s почти всюду относительно α.*

Другие характеризации обобщенных пуассоновских процессов обсуждаются в (Grandell, 1997).

Смешанные пуассоновские распределения

В следующем утверждении мы собрали некоторые простые и широко известные свойства смешанных пуассоновских распределений.

Теорема 7.6.12. *Пусть N является* $\mathrm{MP}(t, U)$, *где U – распределение неотрицательной случайной величины Λ со средним μ_Λ и дисперсией σ_Λ^2. Тогда*

(i) $\mathsf{E}N = t\mu_\Lambda$;

(ii) $\mathsf{D}N = t\mu_\Lambda + t^2\sigma_\Lambda^2$;

(iii) $\frac{1}{t}\mathsf{P}(N > n) = \int\limits_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t}(1 - U(\lambda))\, d\lambda$;

(iv) $\mathsf{P}(\Lambda \le x | N = n) = \dfrac{\int_0^x \lambda^n e^{-\lambda t}\, dU(\lambda)}{\int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t}\, dU(\lambda)}$;

(v) $\mathsf{E}[\Lambda | N = n] = \dfrac{\int_0^\infty \lambda^{n+1} e^{-\lambda t}\, dU(\lambda)}{\int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t}\, dU(\lambda)}$;

(vi) *Производящая функция $G_N(s)$ случайной величины N определяется соотношением*

$$G_N(s) \equiv \mathsf{E}s^N = \widehat{u}(t(1-s)), \quad s \le 1;$$

где $\widehat{u}(v) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda v}\, dU(\lambda)$ – преобразование Лапласа случайной величины Λ.

Пункты (i) и (ii) этой теоремы можно получить также с помощью дифференцирования $G_N(s)$. Более того, при этом можно получить (см. (Ottestad, 1944)) и факториальные моменты

$$\mathsf{E}N(N-1)\cdots(N-k+1) = t^k \mathsf{E}\Lambda^k, \quad k = 1,\ 2, \ldots$$

Другой способ осмыслить (ii) – это рассмотреть представление $N = (N - t\Lambda) + t\Lambda$ и заметить, что

$$\mathsf{Cov}(N - t\Lambda, t\Lambda) = \mathsf{E}(N - t\Lambda)\, t\Lambda = \mathsf{E}\mathsf{E}[(N - t\Lambda)\, t\Lambda | \Lambda] = 0.$$

Мы можем интерпретировать $t\Lambda$ как “сигнал”, а $N - t\Lambda$ – как “шум”. Заметим, однако, что

$$\mathsf{D}[N - t\Lambda | \Lambda] = t\Lambda,$$

из чего следует, что $t\Lambda$ и $N - t\Lambda$ не являются независимыми.

В данном контексте естественно интерпретировать $\mathsf{D}[t\Lambda] = t^2\sigma_\Lambda^2$ как *дисперсию интенсивности*, а $\mathsf{D}[N - t\Lambda] = t\mu_\Lambda$ как *пуассоновскую дисперсию.*

Рассмотрим теперь некоторые соотношения между поведением $U(\lambda)$ для больших значений λ и соответствующим распределением процесса N.

Определение 7.6.11. Функция L называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если

$$L(x\lambda) \sim L(\lambda), \text{ то есть } \lim_{\lambda \to \infty} \frac{L(x\lambda)}{L(\lambda)} = 1,$$

для всех $x > 0$. Функция C называется *правильно меняющейся на бесконечности с показателем* γ, если

$$C(\lambda) = \lambda^\gamma L(\lambda)$$

для некоторой медленно меняющейся функции L.

Один из первых и простой результат, полученный в этом направлении, представлен следующим утверждением, доказанный в (Grandell, 1970). Мы будем использовать традиционное обозначение $\overline{U}(\lambda) = 1 - U(\lambda)$.

Теорема 7.6.13. *Предположим, что*

$$\overline{U}(\lambda) \sim L(\lambda)\lambda^\gamma, \quad \lambda \to \infty,$$

для $-1 < \gamma < 0$. *Тогда*

$$\mathsf{P}(N > n) \sim L(n)(n/t)^\gamma, \quad n \to \infty.$$

Следующее существенное обобщение этого результата приведено в (Willmot, 1990).

Теорема 7.6.14. *Предположим, что*

$$\overline{U}(\lambda) \sim L(\lambda)\lambda^\gamma e^{-\beta\lambda}, \quad \lambda \to \infty, \tag{7.6.4}$$

для $\beta \geq 0$ *и* $-\infty < \gamma < \infty$ ($\gamma < -1$, *если* $\beta = 0$). *Тогда*

$$\mathsf{P}(N > n) \sim \frac{L(n)\,t}{(\beta + t)^{\gamma+1}} \left(\frac{t}{\beta + t}\right)^n n^\gamma, \quad n \to \infty. \tag{7.6.5}$$

Сравнивая Теоремы 7.6.13 и 7.6.14, мы видим, что с формальной точки зрения, Теорема 7.6.14 не является строгим обобщением, так как при $\beta = 0$ эти теоремы применяются к различным значениям γ. Тем не менее при $\beta = 0$ формула (7.6.5) сводится к

$$\mathsf{P}(N > n) \sim L(n)(n/t)^\gamma, \quad n \to \infty, \tag{7.6.6}$$

как в Теореме 7.6.13. Заметим, что (7.6.6) влечет соотношение

$$\mathsf{P}(N > n) \sim L(n/t)(n/t)^{\gamma} \sim \overline{U}(n/t), \quad n \to \infty. \tag{7.6.7}$$

Следующая более сильная версия является весьма специальным случаем результата работы (Stam, 1973).

Теорема 7.6.15. *Пусть N является* $\mathrm{MP}(t, U)$, $\gamma < 0$. *Дополнительно предположим, что $\mu_\Lambda < \infty$, если $\gamma = -1$. Тогда*

$$\overline{U}(\lambda) \sim L(\lambda)\lambda^{\gamma}, \quad \lambda \to \infty,$$

если и только если

$$\mathsf{P}(N > n) \sim L(n)(n/t)^{\gamma}, \quad n \to \infty.$$

Примеры смешанных пуассоновских моделей.

Как уже упоминалось, на практике чаще всего в качестве U выбирают $\Gamma(\gamma, \beta)$-*распределение*. Ряд других структурных распределений обсуждается в (Grandell, 1997). Коротко остановимся на некоторых из этих моделей.

Пример 7.6.1. *Отрицательное биномиальное распределение.* Этот классический пример взят нами из (Кендалл и Стюарт, 1966), а авторы последнего источника, в свою очередь, позаимствовали его из (Greenwood and Yule, 1920). Самоубийство – редкое событие, и, руководствуясь теоремой Пуассона, можно было бы ожидать, что в последовательности больших выборок, скажем, среди населения большой страны (в цитированных источниках – Соединенного Королевства) за последовательные годы, частоты самоубийств должны подчиняться пуассоновскому закону. Однако это ожидание не оправдывается. Различные члены генеральной совокупности в различной мере подвержены возможности самоубийства; кроме того, склонность к самоубийству может меняться от года к году – например, в периоды кризисов она выше. Такое же непостоянство степени риска характерно и для несчастных случаев на производстве, для исследования которых до появления работы (Greenwood and Yule, 1920) использовали распределение Пуассона. В упомянутой работе была приведена примечательная таблица с данными о несчастных случаях за пять недель на производстве снарядов на одном из английских заводов во время первой мировой войны.

Число несчастных случаев	Наблюденная частота	Пуассоновское распределение с тем же средним	Распределение (7.6.7)
0	447	406	442
1	132	189	140
2	42	45	45
3	21	7	14
4	3	1	5
5 и более	2	0.1	2
Полная частота	647	648	648

Второй столбец этой таблицы содержит наблюдаемые значения. Пуассоновское распределение, представленное в третьем столбце, дает весьма посредственное приближение. Одна из возможных причин состоит в том, что разные индивидуумы в различной степени подвержены несчастным случаям.

В качестве рабочей гипотезы в работе (Greenwood and Yule, 1920) предполагалось, что генеральная совокупность состоит из элементов, в различной степени подверженных несчастным случаям. Это различие характеризуется различными значениями параметра λ пуассоновского распределения для различных категорий элементов генеральной совокупности, более того, распределение параметра λ задается плотностью

$$u_{\beta,\gamma}(\lambda) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} e^{-\beta\lambda}\lambda^{\gamma-1}, \qquad \lambda > 0.$$

При этом частота осуществления ровно j успехов (комментируя эти рассуждения, А. Н. Колмогоров – редактор перевода книги (Кендалл и Стюарт, 1966), – заметил, что, принимая во внимание характер данных, представленных в таблице, слово “успех” было бы более уместно заменить на слово “неудача”) равна

$$\mathsf{P}(N = j) = \int\limits_0^\infty \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} e^{-\beta\lambda}\lambda^{\gamma-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!} d\lambda =$$
$$= \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^\gamma \frac{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+j-1)}{j!(\beta+1)^j}. \qquad (7.6.7)$$

Это распределение приведено в четвертой колонке таблицы и демонстрирует лучшее согласие с наблюдаемыми частотами. Мы уже встречались с таким распределением. Это отрицательное биномиальное распределение. Отметим, что при $\gamma = 1$ мы получаем геометрическое распределение.

Пример 7.6.2. *Распределение Делапорте.* Пусть Λ имеет сдвинутое Γ-распределение с плотностью $u(\lambda)$, имеющей вид

$$u(\lambda) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)}(\lambda - \alpha)^{\gamma-1}e^{-\beta(\lambda-\alpha)}, \quad \lambda \geq \alpha.$$

Похоже, что это распределение является довольно естественным, где α можно понимать как “основной риск”. Эта модель была предложена в (Delaporte, 1960). В (Ruohonen, 1988) она была применена к различным данным, встречающимся в литературе, и изучена с более теоретической точки зрения в (Willmot and Sundt, 1989) и (Schŕoter, 1990).

Пример 7.6.3. *Распределение Зихеля.* Пусть Λ имеет *обобщенное обратное гауссовское распределение* с плотностью

$$u(\lambda) = \frac{(a/b)^{\gamma/2}}{2K_\gamma(\sqrt{ba}\,)}\lambda^{\gamma-1}e^{-(b\lambda^{-1}+a\lambda)/2}, \quad \lambda > 0,$$

где K_γ – модифицированная функция Бесселя третьего рода. обобщенное обратное гауссовское распределение было предложено в (Good, 1953) и тщательно изучено в (Jørgensen, 1982).

Наиболее важный случай – это $\gamma = -1/2$, в этом случае говорят, что Λ имеет *обратное гауссовское распределение*. Соответствующее смешанное пуассоновское распределение было впервые рассмотрено в случае обратного гауссовского структурного распределения в (Holla, 1967). Этот случай был в дальнейшем изучен в (Sichel, 1971), (Sichel, 1974), (Sichel, 1975) и (Willmot, 1987). В связи с этим смешанное пуассоновское распределение с обратным гауссовским структурным распределением называется распределением Зихеля.

Пример 7.6.4. *Бета-пуассоновское распределение.* Пусть Λ имеет бета-распределение с плотностью

$$u(\lambda) = \frac{\lambda^{a-1}(\lambda_1 - \lambda)^{b-1}}{B(a,b)\lambda_1^{a+b-1}}, \quad 0 < \lambda < \lambda_1 < \infty,$$

где $a > 0$, $b > 0$, а $B(a,b)$ – бета-функция Эйлера. Такое структурное распределение может на первый взгляд показаться несколько искусственным, но мы рассматриваем его главным образом из-за того, что в некоторых задачах теории риска определенный интерес представляет случай $\lambda_1 < \infty$. Такой выбор может быть просто обоснован замечанием о том, что бета-распределения составляют богатый класс законов с ограниченным носителем. В (Quinkert, 1957) бета-пуассоновское распределение рассматривается как модель для числа требований на промежутке времени именно по этой причине.

Хотя мы посчитали это распределение несколько искусственным, оно вполне естественно в некоторых биологических приложениях, см. (Beall and Rescia, 1953) (случай $a = 1$) и (Gurland, 1958).

Случай $a = b = 1$ означает, что Λ равномерно распределено на $[0, \lambda_1]$. Будем тогда говорить, что N имеет *равномерно-пуассоновское распределение*. Это распределение использовалось в (Bhattacharya and Holla, 1965).

Пример 7.6.5. *Обобщенное распределение Варинга*. Этот пример можно рассматривать как продолжение примера 7.6.1. Пусть вероятность того, что индивидуум с фиксированной "склонностью" Λ_1 и "подверженностью" Λ_2 к несчастному случаю будет иметь n несчастных случаев, равна

$$\mathsf{P}(X = n|\Lambda_1, \Lambda_2) = e^{-\Lambda_1\Lambda_2}\frac{(\Lambda_1\Lambda_2)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Предположим, что "подверженность" Λ_2 – случайная величина с гамма-распределением, задающимся плотностью

$$g(\lambda) = \frac{\gamma^\gamma}{\Gamma(\gamma)} e^{-\gamma\lambda}\lambda^{\gamma-1} \tag{7.6.8}$$

с некоторым параметром $\gamma > 0$, так что вероятность того, что случайно выбранный индивидуум со "склонностью" Λ_1 будет участником n несчастных случаев, равна

$$\mathsf{P}(X = n|\Lambda_1) = \frac{\gamma^\gamma\Lambda_1^n}{(\gamma + \Lambda_1)^{n+\gamma}\Gamma(\gamma)n!}\int\limits_0^\infty e^{-y}y^{n+\gamma-1}dy =$$

$$= \frac{\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n)\Gamma(\gamma)}\Big(\frac{\gamma}{\gamma+\Lambda_1}\Big)^\gamma\Big(\frac{\Lambda_1}{\gamma+\Lambda_1}\Big)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Это – отрицательное биномиальное распределение, которое нам встретилось в Примере 7.6.1. Теперь предположим, что "склонность" Λ_1 к несчастным случаям различна для разных категорий населения и по сути является случайной величиной с плотностью

$$p(\delta) = \frac{\Gamma(\rho+\kappa)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\kappa)} \cdot \frac{\delta^{\kappa-1}\gamma^\rho}{(\gamma+\delta)^{\rho+\kappa}}, \tag{7.6.9}$$

где ρ и κ – положительные параметры. Тогда вероятность того, что наугад выбранный индивидуум станет участником n несчастных случаев, равна

$$\mathsf{P}(X = n) = \frac{\Gamma(\rho+\kappa)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\kappa)} \cdot \frac{\Gamma(n+\gamma)}{n!\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^\infty y^{n+\kappa-1}(1+y)^{-(\rho+\kappa+\gamma+n)}dy =$$

$$= \frac{\Gamma(\rho+\kappa)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\kappa)} \cdot \frac{\Gamma(n+\gamma)}{n!\Gamma(\gamma)} \int\limits_0^1 u^{n+\kappa-1}(1-u)^{\rho+\gamma-1}du =$$

$$= \frac{\Gamma(\rho+\kappa)\Gamma(\rho+\gamma)\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\kappa+n)}{n!\Gamma(\rho)\Gamma(\gamma)\Gamma(\kappa)\Gamma(\rho+\gamma+\kappa+n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{7.6.10}$$

Как отмечено в книге (Seal, 1978), впервые распределение (7.6.10) было названо it обобщенным распределением Варинга в работе (Irwin, 1968). Случайная величина с обобщенным распределением Варинга является $\mathrm{MP}(U)$, где U – распределение случайной величины $\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2$, где величины Λ_1 и Λ_2 *стохастически* независимы и распределены в соответствии с плотностями $g(\lambda)$ (см. (7.6.8)) и $p(\delta)$ (см. (7.6.9)). Распределения случайных величин Λ_1 и Λ_2 связаны общим параметром γ. В работе (Irwin, 1975) показано, что если случайная величина X имеет обобщенное распределение Варинга, то

$$\mathsf{E}X = \frac{\gamma\kappa}{\rho-1}$$

при $\rho > 1$ и

$$\mathsf{D}X = \frac{\gamma\kappa(\rho+\gamma-1)(\rho+\kappa-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)}$$

при $\rho > 2$.

7.7 Определение и простейшие свойства дважды стохастических пуассоновских процессов

В этом разделе мы откажемся от требования о том, чтобы траектории процесса, характеризующего стохастическую интенсивность, были постоянны. Напомним, что именно такое условие определяет смешанные пуассоновские процессы, описанные в предыдущем разделе. Стандартный пуассоновский процесс будет обозначаться $N_1(t)$.

Вспомним, что, если $N_\lambda(t)$ – однородный пуассоновский процесс с некоторой интенсивностью $\lambda > 0$, то параметр λ, называемый интенсивностью, имеет смысл среднего числа скачков процесса (количества событий наблюдаемого потока) в единицу времени. При этом

$$\mathsf{P}(N_\lambda(t) = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{7.7.1}$$

и

$$\mathsf{E}N_\lambda(t) = \mathsf{D}N_\lambda(t) = \lambda t, \quad t > 0,$$

так что для любых $s, t > 0$

$$\frac{\mathsf{E}N_\lambda(t+s) - \mathsf{E}N_\lambda(t)}{s} = \lambda = \text{const}.$$

Из соотношения (7.7.1) легко видеть, что для любого $k = 0, 1, \ldots$

$$\mathsf{P}(N_\lambda(t) = k) = \mathsf{P}(N_1(\lambda t) = k), \quad t \geq 0, \tag{7.7.2}$$

то есть процессы $N_\lambda(t)$ и $N_1(\lambda t)$ *стохастически эквивалентны.*

Однако в реальной практике хаотические потоки не бывают однородными (например, вследствие воздействия внешних факторов. Неоднородные хаотические потоки событий естественно моделировать при помощи так называемых дважды стохастических пуассоновских процессов, иначе называемых процессами Кокса, см., например, (Bening and Korolev, 2002). Для наглядности, перед тем как определить дважды стохастический пуассоновский процесс, рассмотрим неоднородный пуассоновский поток событий $N^*(t)$, определяемый следующим образом. Пусть $\lambda(t)$ – некоторая положительная функция. Предположим, что функция $\lambda(t)$ интегрируема и обозначим

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau, \quad t \geq 0.$$

Неоднородный пуассоновский процесс $N^*(t)$, $t \geq 0$, определятся как случайный процесс с независимыми приращениями, траектории которого стартуют из нуля ($N^*(0) = 0$) и

$$\mathsf{P}(N^*(t) = k) = e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{7.7.3}$$

Тогда

$$\mathsf{E}N^*(t) = \Lambda(t), \quad t \geq 0,$$

так что

$$\lim_{s \downarrow 0} \frac{\mathsf{E}N^*(t+s) - \mathsf{E}N^*(t)}{s} = \lim_{s \downarrow 0} \frac{\Lambda(t+s) - \Lambda(t)}{s} = \frac{d\Lambda(t)}{dt} = \lambda(t), \quad t \geq 0.$$

Другими словами, при таком определении функция $\lambda(t)$ играет роль *мгновенной интенсивности* процесса в точке t. При этом, по аналогии с (7.7.2) из (7.7.3) мы получаем

$$\mathsf{P}(N^*(t) = k) = \mathsf{P}(N_1(\Lambda(t)) = k), \quad k = 0, 1, \ldots, \quad t \geq 0,$$

то есть процессы $N^*(t)$ и $N_1(\Lambda(t))$ стохастически эквивалентны.

Более строго неоднородный пуассоновский процесс определяется следующим образом. Пусть $\Lambda(t)$ – вещественная неубывающая функция, определенная на неотрицательной полуоси, и такая, что $\Lambda(0) = 0$ и $\Lambda(t) < \infty$ при каждом $t > 0$.

Определение 7.7.1. Точечный процесс $N(t)$, $t \geq 0$, называется *(неоднородным) пуассоновским процессом* с *мерой интенсивности* $\Lambda(t)$, если

(i) $N(t)$ – процесс с независимыми приращениями;

(ii) если $0 \leq s < t < \infty$, то приращение $N(t) - N(s)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\Lambda(t) - \Lambda(s)$.

При этом, если мера интенсивности $\Lambda(t)$ дифференцируема, то функция $\Lambda'(t) = \lambda(t)$ называется *(мгновенной) интенсивностью* процесса $N(t)$, а меру интенсивности $\Lambda(t)$ иногда называют *накопленной интенсивностью.*

Наконец, рассмотрим следующее естественное обобщение неоднородного пуасоновского процесса.

Определение 7.7.2. Случайный процесс $\Lambda(t)$, $t \geq 0$, с неубывающими непрерывными справа траекториями, удовлетворяющий условиям $\Lambda(0) = 0$, $\mathsf{P}(\Lambda(t) < \infty) = 1$ $(0 < t < \infty)$, называется *случайной мерой.*

Определение 7.7.3. Пусть $N_1(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, $\Lambda(t)$ – случайная мера, независимая от $N_1(t)$. Случайный процесс $N(t) = N_1(\Lambda(t))$ называется *дважды стохастическим пуассоновским процессом* (или *процессом Кокса*). В таком случае мы будем говорить, что процесс Кокса $N(t)$ управляется процессом $\Lambda(t)$ (или что процесс $\Lambda(t)$ контролирует процесс Кокса $N(t)$).

По аналогии с интерпретацией смешанного пуассоновского процесса, сейчас мы сформулируем интуитивные представления о процессе Кокса. По аналогии со сказанным в связи со смешаными пуассоновскими процессами, мы можем заметить, что процесс Кокса устроен следующим образом. Пусть $\ell(t, \omega)$ – реализация (траектория) случайной меры $\Lambda(t)$, соответствующая элементарному исходу ω. Тогда каждая реализация (траектория) процесса Кокса представляет собой траекторию неоднородного пуассоновского процесса с мерой интенсивности $\ell(t, \omega)$.

В полном объеме свойства процессов Кокса описаны в книгах (Grandell, 1976) и (Bening and Korolev, 2002). Здесь мы упомянем лишь некоторые из них.

Процессы Кокса оказываются тесно связанными с операцией прореживания (rarefaction, thinning) точечных процессов, описанной в предыдущем разделе. Напомним, что мы описали операцию простейшего прореживания точечного процесса (p-прореживания) следующим образом. Пусть $p \in (0,1]$ и пусть $N(t)$ – точечный процесс. Операция простейшего прореживания оставляет каждую точку процесса $N(t)$ неизменной с вероятностью p и удаляет ее с вероятностью $1-p$. Каждая точка оставляется или удаляется независимо от других. Таким образом p-прореженный процесс $N(t)$ будет обозначаться $N^{(p)}(t)$. Пусть $\mathcal{P}$ – множество всех точечных процессов, $\mathcal{C}$ – множество процессов Кокса. Оператор p-прореживания будет обозначаться символом D_p, $D_p : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$. Пусть $\mathcal{D} = \{D_pN : N \in \mathcal{P}\}$ – множество точечных процессов, получаемых с помощью p-прореживания.

Если $N(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью λ, то прореженный процесс $N^{(p)}(t)$ также является пуассоновским, но с интенсивностью $p\lambda$. Если под $\mathcal{P}$ подразумевать множество распределений точечных процессов, то можно заметить, что оператор p-прореживания обратим. В частности, если $N(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью λ, то $D_p^{-1}N(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью λ/p. Множество $\mathcal{C}$ процессов Кокса оказывается замкнутым относительно p-прореживания: $D_pN \in \mathcal{C}$ и $D_p^{-1}N \in \mathcal{C}$, если $N \in \mathcal{C}$.

Следующая теорема доказана в (Kallenberg, 1975).

Теорема 7.7.1. *Пусть $\{N_k\}_{k\geq 1}$ – последовательность точечных процессов. Предположим, что $\{p_k\}_{k\geq 1} \subset (0,1)$ так, что $p_k \to 0$ $(k \to \infty)$. Существует точечный процесс N такой, что соотношение*

$$D_{p_k}N_k \Longrightarrow N \qquad (k \to \infty)$$

имеет место тогда и только тогда, когда существует случайная мера Λ такая, что

$$p_kN_k \Longrightarrow \Lambda \qquad (k \to \infty).$$

Этот процесс N является процессом Кокса, управляемым процессом Λ.

Следующая характеризация процессов Кокса в терминах p-прореживания принадлежит Й. Мекке (Mecke, 1968).

Теорема 7.7.2 *Точечный процесс N может быть получен с помощью p-прореживания для любого $p \in (0,1)$ тогда и только тогда, когда N – процесс Кокса. Другими словами,*

$$\mathcal{C} = \bigcap_{p\in(0,1)} \mathcal{D}_p.$$

Взаимосвязь процессов Кокса и процессов восстановления имеет очень интересный вид. Напомним определение процесса восстановления.

Определение 7.7.4. Пусть N – точечный процесс с независимыми расстояниями Y_j, $j \geq 1$, между соседними точками. Если случайные величины $\{Y_j\}_{j\geq 1}$ одинаково распределены с общей функцией распределения H, то N называется *процессом восстановления*.

Положим $V_k = Y_1 + \ldots + Y_k$, $k \geq 1$. Предположим, что $N(t)$, $t \geq 0$, – процесс Кокса. Нас интересует вопрос: каким дополнительным условиям должен удовлетворять процесс $N(t)$, чтобы он был процессом восстановления. Предположим, что Let $N(t)$ контролируется случайной мерой $\Lambda(t)$ такой, что $\Lambda(0) = 0$, $\Lambda(\infty) = \infty$. Тогда $N_1(t) = N(\Lambda^{-1}(t))$, где $\Lambda^{-1}(t) = \sup\{s : \Lambda(s) \leq t\}$. Это означает, что $N_1(t) = \sup\{k \geq 1 : \Lambda(V_k) \leq t\}$. Таким образом, точками скачков стандартного пуассоновского процесса $N_1(t)$ являются $V_k^* = \Lambda(V_k)$ и, следовательно, $N(t)$ – процесс Кокса тогда и только тогда, когда случайные величины V_1^*, $V_2^* - V_1^*$, $V_3^* - V_2^*, \ldots$ независимы и имеют одно и то же показательное распределение.

Обратное утверждение имеет следующий вид.

Теорема 7.7.3. *Пусть N – процесс восстановления с некоторой функцией распределения интервалов между восстановления H,*

$$h(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dH(x), \qquad s \geq 0.$$

N является процессом Кокса тогда и только тогда, когда

$$h(s) = \frac{1}{1 - \log g(s)}, \tag{7.7.4}$$

где $g(s)$ – преобразование Лапласа–Стильтьеса некоторой невырожденной безгранично делимой функции распределения $G(x)$. Более того,

$$g(s) = \mathsf{E}\exp\{s\Lambda^{-1}(1)\} \qquad \Lambda^{-1}(0) = 0,$$

где $\Lambda(t)$ – случайная мера, контролирующая процесс $N(t)$.

Доказательство см. в (Kingman, 1964) или (Grandell, 1976). □

Теореме 7.7.3 можно придать иную формулировку.

Определение 7.7.5. Случайная величина X называется *геометрически безгранично делимой*, если для любого $p \in (0, 1)$ найдутся случайные величины ν_p, $\xi_{p,1}, \xi_{p,2}, \ldots$ такие, что

(i) $\mathsf{P}(\nu_p = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$;

(ii) случайные величины $\xi_{p,1}, \xi_{p,2}, \ldots$ одинаково распределены;

(iii) случайные величины ν_p, $\xi_{p,1}, \xi_{p,2}, \ldots$ независимы;

(iv) $X \stackrel{d}{=} \sum\limits_{j=1}^{\nu_p} \xi_{p,j}$.

Функция распределения геометрически безгранично делимой случайной величины также называется геометрически безгранично делимой.

Теорема 7.7.4. *Пусть N – процесс восстановления с некоторой функцией распределения интервалов между восстановления H. Процесс N является процессом Кокса тогда и только тогда, когда функция распределения H геометрически безгранично делима.*

Доказательство. Известно, что неотрицательная случайная величина геометрически безгранично делима тогда и только тогда, когда ее преобразование Лапласа–Стильтьеса удовлетворяет соотношению (7.7.4) с некоторой невырожденной безгранично делимой функцией распределения G (см., например, (Клебанов, Мания и Меламед, 1984) или (Gnedenko and Korolev, 1996)). Теорема доказана. □

При каждом фиксированном t распределение процесса Кокса $N(t) = N_1(\Lambda(t))$ является смешанным пуассоновским. Поэтому в развитие пунктов (i) и (ii) Теоремы 7.6.12 мы имеем

$$\mathsf{E}N(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathsf{P}(N(t) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) =$$

$$= \int_0^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\Big) d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) = \int_0^{\infty} \lambda d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) = \mathsf{E}\Lambda(t),$$

$$\mathsf{D}N(t) = \mathsf{E}N^2(t) - (\mathsf{E}N(t))^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \int_0^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) - (\mathsf{E}\Lambda(t))^2 =$$

$$= \int_0^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\Big) d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) - (\mathsf{E}\Lambda(t))^2 =$$

$$= \int_0^{\infty} (\lambda^2 + \lambda) d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) - (\mathsf{E}\Lambda(t))^2 =$$

$$= \mathsf{E}\Lambda^2(t) + \mathsf{E}\Lambda(t) - (\mathsf{E}\Lambda(t))^2 = \mathsf{D}\Lambda(t) + \mathsf{E}\Lambda(t)$$

при условии существования всех участвующих в этих соотношениях моментов, что гарантирует возможность менять порядок суммирования и интегрирования.

7.8 Общая предельная теорема о сходимости суперпозиций независимых случайных процессов

Процессы Кокса, введенные в предыдущем разделе, представляют собой суперпозицию двух независимых случайных процессов – стандартного пуассоновского процесса и случайной меры. К их изучению мы применим методы, традиционно используемые для анализа асимптотического поведения суперпозиций независимых случайных процессов. Такие объекты систематически изучались в монографиях (Сильвестров, 1974), (Gut, 1988), (Круглов и Королев, 1990), (Gnedenko and Korolev, 1996) и др.

Доказательства приводимых в этом разделе результатов об асимптотическом поведении процессов Кокса основаны на общей теореме о сходимости суперпозиций независимых случайных процессов, доказанной в (Korolev, 1996) (также см. (Gnedenko and Korolev, 1996) и (Bening and Korolev, 2002). Перед тем, как сформулировать эту теорему, напомним некоторые известные общие факты из области предельных теорем теории вероятностей, упомянутые в главе 1.

Предположим, что все рассматриваемые случайные величины, случайные векторы и случайные процессы, о которых пойдет речь в данном разделе, определены на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Напомним, что последовательность функций распределения $F_1, F_2, \ldots$ *сходится по распределению* к функции распределения F при $n \to \infty$ (обозначаем это $F_n \Longrightarrow F$), если $F_n(x) \to F(x)$ при $n \to \infty$ в каждой точке x, в которой предельная функция распределения непрерывна. Если $X, X_1, X_2, \ldots$ – случайные величины с функциями распределения $F, F_1, F_2, \ldots$ соответственно, то мы будем говорить, что последовательность $\{X_n\}$ сходится по распределению к X (обозначаем это $X_n \Longrightarrow X$), если $F_n \Longrightarrow F$.

Последовательность случайных величин (векторов) $\{X_n\}$ *слабо сходится* к случайной величине (случайному вектору) X, если

$$\mathsf{E}f(X_n) \longrightarrow \mathsf{E}f(X_n) \tag{7.8.1}$$

при $n \to \infty$ для любой непрерывной и ограниченной функции f. *В конечномерном случае* (а именно он рассматривался и будет впредь рассматриваться в книге) *слабая сходимость и сходимость по распределению эквивалентны.* По сути в (7.8.1) участвуют вероятностные меры, порожденные случайными величинами $X, X_1, X_2, \ldots$ (по ним берутся соответствующие интегралы). Поэтому понятие слабой сходимости в большей степени относится к вероятностным мерам, нежели к случайным величинам (векторам). Итак, мы будем говорить, что последовательность вероятностных мер $\{\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots\}$, определенных на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$, *слабо сходится* к вероятностной мере P, если

$$\int\limits_{\Omega} f(\omega)\mathsf{P}_n(d\omega) \longrightarrow \int\limits_{\Omega} f(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$$

при $n \to \infty$ для любой непрерывной и ограниченной функции f.

Семейство случайных величин $\{X_n\}$ называется *слабо компактным*, если каждая последовательность его элементов содержит слабо сходящуюся подпоследовательность. Известно, что семейство случайных величин $\{X_n\}$ слабо компактно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{R\to\infty} \sup_n \mathsf{P}(|X_n| > R) = 0$$

(см., например, (Гнеденко и Колмогоров, 1949), глава 2, раздел 9).

Расстояние (метрика) Леви $L_1(F_1, F_2)$ между функциями распределения F_1 и F_2 определяется как

$$L_1(F_1, F_2) =$$

$$= \inf\{h > 0: \ F_1(x-h) - h \le F_2(x) \le F_1(x+h) + h \text{ для всех } x \in \mathbb{R}\}.$$

Если X_1 и X_2 – случайные величины с функциями распределения F_1 и F_2 соответственно, то мы будем считать, что $L_1(X_1, X_2) = L_1(F_1, F_2)$. *Сходимость в метрике Леви эквивалентна сходимости по распределению* (см., например, (Гнеденко и Колмогоров, 1949), глава 2, раздел 9).

Аналогом метрики Леви в многомерных (и даже бесконечномерных) пространствах является метрика Леви–Прохорова, к определению которой мы приступаем. Пусть $(E, \mathcal{E}, \rho)$ – метрическое пространство и $\mathfrak{P}(E)$ – множество вероятностных мер на измеримом пространстве $(E, \mathcal{E})$. Пусть $A \subset E$. Положим $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x,y): \ y \in A\}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим $A^{\varepsilon} = \{x \in E: \ \rho(x, A) < \varepsilon\}, \ \ A \in \mathcal{E}$. Пусть P_1 и P_2 – произвольные вероятностные меры из $\mathfrak{P}(E)$. Положим

$$\sigma(\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2) =$$

$$= \inf\{\varepsilon > 0: \ \mathsf{P}_1(A) \le \mathsf{P}_2(A^{\varepsilon}) + \varepsilon \text{ для всех замкнутых множеств } A \in \mathcal{E}\}.$$

Расстояние Леви–Прохорова $L_2(\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2)$ между мерами P_1 и P_2 определяется как

$$L_2(\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2) = \max\{\sigma(\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2), \sigma(\mathsf{P}_2, \mathsf{P}_1)\}.$$

Под расстоянием Леви–Прохорова между случайными векторами $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ мы будем подразумевать расстояние Леви–Прохорова между индуцированными ими вероятностными распределениями: $L_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = L_2(\mathsf{P}_{\mathbf{X}}, \mathsf{P}_{\mathbf{Y}})$. Хорошо известно, что *слабая сходимость случайных векторов эквивалентна их сходимости в метрике Леви–Прохорова* (см., например, (Ширяев, 1989).

Пусть $X(t)$ и $M(t)$, $t \geq 0$, – независимые случайные процессы такие, что $X(t)$ измери́м и $\mathsf{P}(M(t) < \infty) = 1$ при любом $t > 0$ (под измеримостью случайного процесса мы подразумеваем его измеримость относительно прямого произведения σ-алгебры исходного вероятностного пространства и борелевской σ-алгебры подмножеств неотрицательной полупрямой). Пусть $A(t)$, $B(t)$ и $D(t)$ – вещественные функции такие, что $A(t)$ и $B(t)$ измеримы, $B(t) > 0$, $D(t) > 0$. Пусть L_1 и L_2, как и ранее, – метрики, метризующие слабую сходимость в пространствах соответственно одно- и двумерных случайных величин (или, что то же самое, их распределений). Например, L_1 – это метрика Леви, L_2 – это метрика Леви-Прохорова.

Определение 7.8.1. Будем говорить, что семейство случайных величин $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ *слабо компактно на бесконечности*, если из любой последовательности $\{t_k\}_{k\geq 1}$ такой, что $t_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ можно выбрать подпоследовательность $\{t_{k_m}\}_{m\geq 1}$ такую, что последовательность случайных величин $\{Z(t_{k_m})\}$ слабо сходится при $m \to \infty$.

Следующая теорема представляет собой обобщение и уточнение знаменитой леммы Добрушина (Добрушин, 1955), в которой впервые были описаны достаточные условия слабой сходимости суперпозиций независимых случайных последовательностей. Теорема 7.8.1 содержит *необходимые и достаточные* условия слабой сходимости суперпозиций независимых случайных *процессов*.

Теорема 7.8.1. *Предположим, что $B(t) \to \infty$ и $D(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ и семейства случайных величин*

$$\left\{\frac{X(t) - A(t)}{B(t)}\right\}_{t>0} \quad \text{и} \quad \left\{\frac{B(M(t))}{D(t)}\right\}_{t>0}$$

слабо компактны на бесконечности. Для того чтобы одномерные распределения неслучайно центрированных и нормированных суперпозиций случайных процессов $X(t)$ и $M(t)$ слабо сходились к распределению некоторой случайной величины Z при $t \to \infty$:

$$\frac{X(M(t)) - C(t)}{D(t)} \Longrightarrow Z \quad (t \to \infty)$$

при некоторой вещественной функции $C(t)$*, необходимо и достаточно, чтобы существовала слабо компактное на бесконечности семейство троек случайных величин* $\{(Y(t), U(t), V(t))\}_{t>0}$ *таких, что:*

1°*.* $Z \stackrel{d}{=} Y(t)U(t) + V(t)$ *при каждом* $t > 0$*, причем* $Y(t)$ *и пара* $(U(t), V(t))$ *независимы;*

2°*.* $L_1\left(\dfrac{X(t) - A(t)}{B(t)},\ Y(t)\right) \to 0 \quad (t \to \infty)$*;*

3°*.* $L_2\left(\left(\dfrac{B(M(t))}{D(t)}, \dfrac{A(M(t)) - C(t)}{D(t)}\right),\ (U(t), V(t))\right) \to 0 \quad (t \to \infty)$*.*

Доказательство см. в (Korolev, 1996) или (Gnedenko and Korolev, 1996).

Замечание 7.8.1. Вообще говоря, требование слабой компактности семейства троек $\{(W(t), U(t), V(t))\}$ на бесконечности является излишним, поскольку оно автоматически выполняется в силу условий теоремы. Чтобы в этом убедиться, в доказательство необходимости условий теоремы, приведенное в (Korolev, 1996) или (Gnedenko and Korolev, 1996), не надо вносить никаких изменений. Небольшая дополнительная работа потребуется лишь при доказательстве достаточности. А именно, слабая компактность на бесконечности семейств $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ и $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ непосредственно вытекает из слабой компактности на бесконечности семейств $\{(X(t) - A(t))/B(t)\}_{t\geq 0}$ и $\{B(M(t))/D(t)\}_{t\geq 0}$ в силу условий 2° и 3°. Таким образом, все, что надо сделать – это доказать слабую компактность на бесконечности семейства $\{V(t)\}_{t\geq 0}$. Однако в силу неравенства

$$\mathsf{P}(|Y_1 + Y_2| > R) \leq \mathsf{P}\left(|Y_1| > \frac{R}{2}\right) + \mathsf{P}\left(|Y_2| > \frac{R}{2}\right), \tag{2.5.2}$$

которое верно для любых случайных величин Y_1 и Y_2 и любого $R > 0$, по условию 1° для произвольного $R > 0$ мы имеем

$$\mathsf{P}(|V(t)| > R) = \mathsf{P}(|W(t)U(t) + V(t) - W(t)U(t)| > R) \leq$$
$$\leq \mathsf{P}\left(|W(t)U(t) + V(t)| > \frac{R}{2}\right) + \mathsf{P}\left(|W(t)U(t)| > \frac{R}{2}\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(|Z| > \frac{R}{2}\right) + \mathsf{P}\left(|W(t)U(t)| > \frac{R}{2}\right).$$

Первое слагаемое в правой части не зависит от t. Семейство произведений $\{W(t)U(t)\}_{t\geq 0}$ независимых сомножителей слабо компактно на бесконечности, поскольку, как мы убедились выше, сомножители в отдельности образуют слабо компактные на бесконечности семейства. Поэтому можно выбрать R столь большим, чтобы правая часть (2.5.2) была произвольно малой независимо от t. Теперь осталось сослаться на статью (Korolev, 1996) или книгу (Gnedenko and Korolev, 1996). □

7.9 Асимптотические свойства дважды стохастических пуассоновских процессов

Теперь наша цель – с помощью Теоремы 7.8.1 убедиться, что асимптотические свойства процессов Кокса всецело определяются асимптотическими свойствами их управляющих процессов.

Лемма 7.9.1. *Пусть $N(t)$ – процесс Кокса, управляемый процессом $\Lambda(t)$. Тогда $N(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ $(t \to \infty)$ если и только если $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ $(t \to \infty)$.*

Доказательство. Сначала покажем, что из условия $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ вытекает, что $N(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ $(t \to \infty)$. Для произвольных m и n мы имеем

$$\mathsf{P}(N(t) \le m) = \mathsf{P}(N(t) \le m; \Lambda(t) \le n) + \mathsf{P}(N(t) \le m; \Lambda(t) > n) \le$$

$$\le \mathsf{P}(\Lambda(t) \le n) + \int\limits_n^\infty \left(\sum_{k=0}^m e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right) d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) \equiv J_1(t,n) + J_2(t,n,m) \tag{7.9.1}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Рассмотрим $J_2(t,n,m)$. Поскольку согласно формуле Стирлинга

$$(\lambda - 1)! > \sqrt{2\pi} \lambda^{\lambda - 1/2} e^{-\lambda + 1 - \frac{1}{12\lambda - 11}}$$

(см., например, (Феллер, 1984), т. 1, раздел II.10), мы имеем

$$\sum_{k=0}^m e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \le (m+1) \max_{k \ge 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \le (m+1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} <$$

$$< \frac{(m+1) e^{-\lambda} \lambda^{\lambda-1}}{\sqrt{2\pi} \lambda^{\lambda-1/2} e^{-\lambda+1-\frac{1}{12\lambda-11}}} < \frac{m+1}{e\sqrt{2\pi\lambda}}.$$

Поэтому, каким бы ни было $t > 0$,

$$J_2(t,n,m) \le \frac{m+1}{e\sqrt{2\pi}} \int\limits_n^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda}} d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) \le \frac{m+1}{e\sqrt{2\pi n}}.$$

Таким образом, при фиксированном m можно выбрать $n = n(\varepsilon)$ так, чтобы
$$J_2(t, n(\varepsilon), m) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.9.2}$$
Теперь выберем $t = t(\varepsilon)$ так, чтобы
$$J_1(t, n(\varepsilon)) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7.9.3}$$
для всех $t \geq t(\varepsilon)$, что можно сделать вследствие предположения $\Lambda \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$. Но соотношения (7.9.1), (7.9.2) и (7.9.3) влекут оценку
$$\mathsf{P}(N(t) \leq m) < \varepsilon,$$
справедливую при $t \geq t(\varepsilon)$, что означает, что $N(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$, поскольку m и ε произвольны.

Теперь предположим, что $N(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$, и докажем, что $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ при $t \to \infty$. Для произвольных m и n мы имеем
$$\mathsf{P}(\Lambda(t) \leq m) = \mathsf{P}(\Lambda(t) \leq m; N(t) \leq n) + \mathsf{P}(\Lambda(t) \leq m; N(t) > n) \leq$$
$$\leq \mathsf{P}(N(t) \leq n) + \int\limits_0^m \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right) d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) \equiv$$
$$\equiv I_1(t, n) + I_2(t, n, m). \tag{7.9.4}$$
Рассмотрим $I_2(t, n, m)$. Функция $\psi_k(\lambda) = e^{-\lambda}\lambda^k$ возрастает по λ при $0 < \lambda < k$. Если выбрать n таким образом, что $n + 1 > m$, то в силу вида пределов суммирования и интегрирования в $I_2(t, n, m)$ в каждом слагаемом мы будем иметь $k > \lambda$. Тогда
$$I_2(t, n, m) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int\limits_0^m e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \, d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) \leq$$
$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-m} \frac{m^k}{k!} \int\limits_0^m d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) \leq \mathsf{P}(N_m \geq n + 1), \tag{7.9.5}$$
где N_m – пуассоновская случайная величина с параметром m. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. При фиксированном m в силу (7.9.5) возможно выбрать $n = n(\varepsilon)$ так, что
$$I_2(t, n(\varepsilon), m) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7.9.6}$$

для всех $t > 0$. Теперь выберем $t = t(\varepsilon)$ таким образом, что

$$I_1(t, n(\varepsilon)) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7.9.7}$$

для всех $t \geq t(\varepsilon)$, что возможно в силу предположения $N(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$. Теперь требуемая импликация вытекает из (7.9.4), (7.9.6) и (7.9.7). Лемма доказана. □

Теорема 7.9.1. *Пусть $N(t)$ – процесс Кокса, управляемый процессом $\Lambda(t)$. Пусть $d(t) > 0$ – такая функция, что $d(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *Одномерные распределения нормированного процесса Кокса слабо сходятся к распределению некоторой случайной величины Z при $t \to \infty$:*

$$\frac{N(t)}{d(t)} \Longrightarrow Z \qquad (t \to \infty). \tag{7.9.8}$$

(ii) *Одномерные распределения управляющего процесса $\Lambda(t)$ при надлежащей нормировке слабо сходятся к тому же распределению:*

$$\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \Longrightarrow Z \qquad (t \to \infty). \tag{7.9.9}$$

Доказательство. Сначала мы убедимся, что условие (7.9.8) влечет слабую компактность на бесконечности семейства $\{\Lambda(t)/d(t)\}_{t>0}$.

Предположим, что (7.9.8) имеет место, но семейство $\{\Lambda(t)/d(t)\}_{t>0}$ не является слабо компактным на бесконечности. В таком случае существуют $\varepsilon > 0$ и последовательности $\{t_k\}_{k\geq1}$ и $\{R_k\}_{k\geq1}$ такие, что $t_k \uparrow \infty$, $R_k \uparrow \infty$ и

$$\mathsf{P}\left(\frac{\Lambda(t_k)}{d(t_k)} > R_k\right) \geq \varepsilon, \quad k \geq 1.$$

Тогда в силу того, что траектории пуассоновского процесса $N_1(t)$ не убывают, а процессы $N_1(t)$ и $\Lambda(t)$ независимы, для произвольного $x \geq 0$ мы имеем

$$\mathsf{P}\left(N(t_k) > xd(t_k)\right) = \mathsf{P}\left(N_1\left(\Lambda(t_k)\right) > xd(t_k)\right) \geq$$

$$\geq \mathsf{P}\left(N_1\left(\Lambda(t_k)\right) > xd(t_k);\ \Lambda(t_k) > R_k d(t_k)\right) \geq$$

$$\geq \mathsf{P}\left(N_1\left(R_k d(t_k)\right) > xd(t_k);\ \Lambda(t_k) > R_k d(t_k)\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\frac{N_1\left(R_k d(t_k)\right)}{R_k d(t_k)} > \frac{x}{R_k}\right) \cdot \mathsf{P}\left(\frac{\Lambda(t_k)}{d(t_k)} > R_k\right) \geq$$

$$\geq \varepsilon \mathsf{P}\left(\frac{N_1\left(R_k d(t_k)\right)}{R_k d(t_k)} > \frac{x}{R_k}\right). \tag{7.9.10}$$

Поскольку $t_k \uparrow \infty$ и $R_k \uparrow \infty$, мы имеем $R_k d(t_k) \to \infty$. Поэтому, используя хорошо известное свойство асимптотической вырожденности пуассоновского процесса (в свое время мы использовали это свойство при доказательстве Теоремы 1.4.1), мы получаем

$$\frac{N_1(R_k d(t_k))}{R_k d(t_k)} \Longrightarrow 1 \quad (k \to \infty).$$

Следовательно, так как $x/R_k \to 0$, то для любого положительного δ найдется $k(\delta)$ такое, что для всех $k \geq k(\delta)$ будет иметь место соотношение

$$\mathsf{P}\left(\frac{N_1(R_k d(t_k))}{R_k d(t_k)} > \frac{x}{R_k}\right) \geq \delta$$

Но с учетом (7.9.10) это означает, что, независимо от $x \geq 0$, для всех $k \geq k(\delta)$ мы будем иметь

$$\mathsf{P}\left(N(t_k) > x d(t_k)\right) \geq \varepsilon\delta > 0,$$

что противоречит условию $N(t_k)/d(t_k) \Longrightarrow Z$ $(k \to \infty)$. Полученное противоречие означает, что семейство случайных величин $\{\Lambda(t)/d(t)\}_{t>0}$ слабо компактно на бесконечности.

Теперь для доказательства теоремы мы воспользуемся Теоремой 7.8.1. Запишем уже использовавшееся выше свойство асимптотической вырожденности стандартного пуассоновского процесса в виде

$$\frac{N_1(t)}{t} \Longrightarrow 1 \qquad (t \to \infty). \tag{7.9.11}$$

Таким образом, в Теореме 7.8.1 мы можем положить $S(t) \equiv N_1(t)$, $M(t) \equiv \Lambda(t)$, $b(t) \equiv t$, $a(t) \equiv c(t) = 0$. При этом из (7.9.11) вытекает, что каждая тройка случайных величин $(Y(t), U(t), V(t))$, фигурирующая в Теореме 7.8.1, неизбежно должна иметь вид $(1, U(t), 0)$ и, следовательно, условия 2 и 3 Теоремы 7.8.1 сводятся к условию

$$L_1\left(\frac{\Lambda(t)}{d(t)}, U(t)\right) \to 0 \qquad (t \to \infty). \tag{7.9.12}$$

Но согласно виду упомянутых троек и условию 1 Теоремы 7.8.1, при каждом $t > 0$ случайная величина $U(t)$ должна удовлетворять соотношению

$$U(t) \stackrel{d}{=} Z.$$

Поэтому в рассматриваемом случае соотношение (7.9.12) эквивалентно условию (7.9.9). Теорема доказана. □

Теорема 7.9.1 – это в некотором смысле закон больших чисел для процессов Кокса. Следующее утверждение, в котором речь идет о неслучайно центрированных процессах Кокса, может рассматриваться как центральная предельная теорема для процессов Кокса.

Теорема 7.9.2. *Пусть $N(t)$ – процесс Кокса, управляемый процессом $\Lambda(t)$. Предположим, что $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ при $t \to \infty$. Пусть $d(t) > 0$ – некоторая неограниченно возрастающая функция на $[0, \infty)$. Одномерные распределения неслучайно центрированного и нормированного процесса Кокса слабо сходятся к распределению некоторой случайной величины Z:*

$$\frac{N(t) - c(t)}{d(t)} \Longrightarrow Z \qquad (t \to \infty) \tag{7.9.13}$$

с некоторой вещественной функцией $c(t)$ тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{c(t)}{d^2(t)} = k^2 < \infty \tag{7.9.14}$$

и существует случайная величина V такая, что $Z \stackrel{d}{=} kW + V$, где W – случайная величина со стандартным нормальным распределением, независимая от V, и

$$L_1\left(\frac{\Lambda(t) - c(t)}{d(t)}, V(t)\right) \to 0 \qquad (t \to \infty), \tag{7.9.15}$$

где

$$\mathsf{E}\exp\{isV(t)\} = \exp\left\{-\frac{s^2}{2}\left[k^2 - \frac{c(t)}{d^2(t)}\right]\right\}\mathsf{E}\exp\{isV\}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. *Необходимость.* Сначала убедимся, что семейство случайных величин

$$\left\{X \cdot \frac{\sqrt{\Lambda(t)}}{d(t)} + \frac{\Lambda(t) - c(t)}{d(t)}\right\}_{t>0} \tag{7.9.16}$$

слабо компактно на бесконечности, где X – случайная величина со стандартным нормальным распределением, независимая от процесса $\Lambda(t)$. Предположим, что это не так. В таком случае существуют $\delta > 0$ и последовательности $\{x_k\}_{k\ge1}$ и $\{t_k\}_{k\ge1}$ такие, что $x_k \uparrow \infty$, $t_k \uparrow \infty$ и

$$\mathsf{P}\left(\left|X \cdot \frac{\sqrt{\Lambda(t_k)}}{d(t_k)} + \frac{\Lambda(t_k) - c(t_k)}{d(t_k)}\right| > x_k\right) \ge \delta. \tag{7.9.17}$$

для всех $k \geq 1$. В силу Леммы 1.4.2 для любого $\epsilon > 0$ существует $M = M(\epsilon) \in (0, \infty)$ такое, что для любых $t > 0$ и $x > 0$

$$\mathsf{P}\Big(\Big|X \cdot \frac{\sqrt{\Lambda(t)}}{d(t)} + \frac{\Lambda(t) - c(t)}{d(t)}\Big| > x\Big) =$$

$$= 2\int\limits_0^\infty \Big[1 - \Phi\Big(x \cdot \frac{d(t)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\lambda - c(t)}{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big] d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) =$$

$$= 2\Big(\int\limits_0^{M(\epsilon)} + \int\limits_{M(\epsilon)}^\infty\Big)\Big[1 - \Phi\Big(x \cdot \frac{d(t)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\lambda - c(t)}{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big] d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) \leq$$

$$\leq 2\int\limits_0^{M(\epsilon)} \Big[1 - \Phi\Big(x \cdot \frac{d(t)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\lambda - c(t)}{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big] d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) +$$

$$+2\Big[\int\limits_{M(\epsilon)}^\infty \mathsf{P}\Big(\Big|\frac{N_1(\lambda) - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{d(t)} + \frac{\lambda - c(t)}{d(t)}\Big| > x\Big) d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) + \epsilon\Big] \leq$$

$$\leq 2\mathsf{P}(\Lambda(t) \leq M(\epsilon)) + 2\Big[\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{N(t) - c(t)}{d(t)}\Big| > x\Big) + \epsilon\Big]. \qquad (7.9.18)$$

В силу условия $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ $(t \to \infty)$ для любого $\epsilon > 0$ существует $t_0 = t_0(\epsilon)$ такое, что $\mathsf{P}(\Lambda(t) \leq M(\epsilon)) < \epsilon$ при $t \geq t_0(\epsilon)$. Таким образом, из (7.9.18) вытекает, что для всех $t \geq t_0(\epsilon)$

$$\mathsf{P}\Big(\Big|X \cdot \frac{\sqrt{\Lambda(t)}}{d(t)} + \frac{\Lambda(t) - c(t)}{d(t)}\Big| > x\Big) \leq 4\epsilon + 2\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{N(t) - c(t)}{d(t)}\Big| > x\Big). \quad (7.9.19)$$

Но из условия (7.9.13) вытекает, что семейство

$$\Big\{\frac{N(t) - c(t)}{d(t)}\Big\}_{t>0}$$

слабо компактно на бесконечности, то есть для любого $\epsilon > 0$ существует $x_0 = x_0(\epsilon)$ такое, что

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{N(t) - c(t)}{d(t)}\Big| > x\Big) < \epsilon$$

для всех $x \geq x_0(\epsilon)$ и для всех $t \geq t_0(\epsilon)$. Таким образом, из (7.9.19) вытекает, что для всех $x \geq x_0(\epsilon)$ и $t \geq t_0(\epsilon)$

$$\mathsf{P}\Big(\Big|X \cdot \frac{\sqrt{\Lambda(t)}}{d(t)} + \frac{\Lambda(t) - c(t)}{d(t)}\Big| > x\Big) \leq 6\epsilon.$$

Поэтому, выбрав, скажем, $\epsilon < \delta/7$, мы замечаем, что для всех достаточно больших k будет выполняться неравенство, противоположное (7.9.17). Полученное противоречие доказывает слабую компактность на бесконечности семейства (7.9.16).

По неравенству симметризации

$$\mathsf{P}(|X-a| \geq x) \geq \tfrac{1}{2}\mathsf{P}(|X^{(s)}| \geq 2x),$$

справедливому для любого $a \in \mathbb{R}$ и любой случайной величины X (см., например, (Лоэв, 1962), с. 259; здесь символ $X^{(s)}$ обозначает случайную величину такую, что $X^{(s)} \stackrel{d}{=} X - X'$, где случайные величины X и X' независимы и одинаково распределены), мы имеем

$$\mathsf{P}\Big(\Big|X \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{d(t)} + \frac{\Lambda(t)-c(t)}{d(t)}\Big| \geq x\Big) \geq \frac{1}{2}\mathsf{P}\Big(|X^{(s)}| \cdot \frac{\sqrt{\Lambda(t)}}{d(t)} > 2x\Big),$$

каким бы ни было $x > 0$. Отсюда вытекает слабая компактность на бесконечности семейства случайных величин $\{X^{(s)}\sqrt{\Lambda(t)}/d(t)\}_{t>0}$, а стало быть, и семейства $\{\Lambda(t)/d^2(t)\}_{t>0}$, поскольку распределение случайной величины $X^{(s)}$ непрерывно в нуле.

Теперь мы можем воспользоваться Теоремой 7.9.1. В разделах 1.5 и 7.5 мы убедились, что стандартный пуассоновский процесс $N_1(t)$ асимптотически нормален в том смысле, что

$$\frac{N_1(t)-t}{\sqrt{t}} \Longrightarrow W \qquad (t \to \infty), \tag{7.9.20}$$

где случайная величина W имеет стандартное нормальное распределение. Поэтому в Теореме 7.8.1 мы можем положить $S(t) \equiv N_1(t)$, $M(t) \equiv \Lambda(t)$, $a(t) \equiv t$, $b(t) \equiv \sqrt{t}$. Тогда из Теоремы 7.8.1 вытекает, что семейство случайных величин $\{(\Lambda(t)-c(t))/d(t)\}_{t\geq 0}$ слабо компактно на бесконечности. Пусть $l_t(q)$ – точная нижняя грань q-квантилей (мы также будем использовать термин "левая q-квантиль") случайной величины $\Lambda(t)$. Слабая компактность на бесконечности семейства $\{\Lambda(t)/d^2(t)\}_{t\geq 0}$ влечет соотношение

$$\sup_t \frac{l_t(q)}{d^2(t)} = c(q) < \infty \tag{7.9.21}$$

при каждом $q \in (0,1)$. Слабая компактность на бесконечности семейства $\{(\Lambda(t) - c(t))/d(t)\}$ влечет ограниченность функции $(l_t(q) - c(t))/d(t)$ по t при каждом $q \in (0,1)$. Но

$$\frac{l_t(q)-c(t)}{d(t)} = d(t)\left[\frac{l_t(q)}{d^2(t)} - \frac{c(t)}{d^2(t)}\right], \tag{7.9.22}$$

так что для того, чтобы обеспечить ограниченность правой части (7.9.22) при каждом $q \in (0,1)$, разность $l_t(q)/d^2(t) - c(t)/d^2(t)$ должна стремиться к нулю при $t \to \infty$ для каждого $q \in (0,1)$, поскольку $d(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Но с учетом (7.9.21) это возможно только тогда, когда выполнено (7.9.14). Более того, поскольку

$$\limsup_{t\to\infty} \left| \frac{l_t(q)}{d^2(t)} - \frac{c(t)}{d^2(t)} \right| = 0,$$

каким бы ни было $q \in (0,1)$, мы замечаем, что в силу (7.9.13) каждая тройка случайных величин $(Y(t), U(t), V(t))$, фигурирующая в Теореме 7.8.1, обязана иметь вид $(W, \sqrt{c(t)}/d(t), V(t))$, где W – случайная величина со стандартным нормальным распределением, независимая от $V(t)$. Напомним, что каждая такая тройка должна обеспечивать возможность представления

$$Z \stackrel{d}{=} k(t)W + V(t) \tag{7.9.23}$$

при каждом $t \geq 0$, где для удобства мы обозначили $k^2(t) = c(t)/d^2(t)$. Рассмотрим семейство случайных величин, удовлетворяющих (7.9.23), более подробно. Ограниченность функции $k(t)$ и слабая компактность на бесконечности семейства $\{V(t)\}_{t\geq 0}$, имеющая место вследствие Теоремы 7.8.1, позволяют из произвольной последовательности $T = \{t_1, t_2, \ldots\}$ выбрать подпоследовательность T_1 таким образом, чтобы

$$k(t) \to k_0 \qquad V(t) \Longrightarrow V_0$$

при $t \to \infty$, $t \in T_1$, где k_0 – некоторое число, а V_0 – некоторая случайная величина. Но тогда, применяя Лемму 1.4.1, для любого $s \in \mathbb{R}$ мы получаем

$$\mathsf{E}e^{isZ} = \mathsf{E}e^{isV(t)} \exp\left\{-\frac{s^2}{2}k^2(t)\right\} \to \mathsf{E}e^{isV_0} \exp\left\{-\frac{s^2}{2}k_0^2\right\}$$

при $t \to \infty$, $t \in T_1$, откуда вытекает, что предельная пара (k_0, V_0) также удовлетворяет (7.9.23). Другими словами, множество пар $(k(t), V(t))$, удовлетворяющих (7.9.23), замкнуто. Пусть V – случайная величина, соответствующая значению $k(t) = k$ в представлении (7.9.23). Тогда для любого $t \geq 0$ мы имеем

$$kW + V \stackrel{d}{=} k(t)W + V(t), \tag{7.9.24}$$

где слагаемые в обеих частях независимы. Перепишем (7.9.24) в терминах характеристических функций. Получим

$$\exp\left\{-\frac{s^2}{2}k^2\right\} \mathsf{E}e^{isV} = \exp\left\{-\frac{s^2}{2}k^2(t)\right\} \mathsf{E}e^{isV(t)} \tag{7.9.25}$$

для всех $s \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Выразив характеристическую функцию случайной величины $V(t)$ из (7.9.25), мы получим представление

$$\mathsf{E}\exp\{isV(t)\} = \exp\left\{\frac{s^2}{2}[k^2 - k^2(t)]\right\}\mathsf{E}e^{isV}.$$

Наконец, соотношение (7.9.15) с только что описанной случайной величиной $V(t)$ вытекает из Теоремы 7.8.1. Необходимость доказана.

Достаточность. Из (7.9.15) и (7.9.14) вытекает слабая компактность семейства $\{\Lambda(t)/d^2(t)\}_{t\geq 0}$ на бесконечности. В свою очередь, отсюда с учетом условия (7.9.15) вытекает, что

$$L_1\left(\frac{\Lambda(t)}{d^2(t)}, \frac{c(t)}{d^2(t)}\right) \to 0 \qquad (t \to \infty).$$

Теперь осталось воспользоваться Теоремой 7.8.1 с учетом (7.9.15). Теорема доказана. □

Аналогичный результат доказан в (Rootzén, 1975) и (Rootzén, 1976) (также см. (Grandell, 1976)). Мы использовали метод доказательства из (Korolev, 1996). Однако формулировка соответствующей теоремы из статьи (Korolev, 1996) содержит излишнее условие слабой компактности семейства $\{\Lambda(t)/d^2(t)\}_{t\geq 0}$ на бесконечности по сравнению с Теоремой 7.9.2.

Следствие 7.9.1. *В условиях Теоремы* 7.9.2 *неслучайно центрированный и нормированный процесс Кокса* $N(t)$ *асимптотически нормален, то есть*

$$\mathsf{P}\left(\frac{N(t) - c(t)}{d(t)} < x\right) \Longrightarrow \Phi(x) \qquad (t \to \infty)$$

тогда и только тогда, когда

$$\sup_{t\geq 0}\frac{c(t)}{d^2(t)} \leq 1$$

и

$$\lim_{t\to\infty} L_1\left(\mathsf{P}\left(\frac{\Lambda(t) - c(t)}{d(t)} < x\right), \Phi\left(\frac{xd(t)}{\sqrt{d^2(t) - c(t)}}\right)\right) = 0.$$

Доказательство. Это утверждение вытекает из Теоремы 7.9.2 и теоремы Крамера–Леви о разложимости нормального закона только на нормальные компоненты, в соответствии с которой любая случайная величина $V(t)$, удовлетворяющая соотношению (7.9.23), необходимо должна быть нормально распределенной с нулевым средним и дисперсией $1 - k^2(t)$. □

Другими словами, процесс Кокса асимптотически нормален тогда и только тогда, когда асимптотически нормален контролирующий его процесс $\Lambda(t)$.

7.10 Распределение суммарных страховых выплат

Резерв страховой компании, описываемый процессом риска Спарре Андерсена, в произвольный фиксированный момент времени t является случайной величиной. С учетом независимости случайной величины $N(t)$ от страховых требований $X_1, X_2, \ldots$ это распределение по формуле полной вероятности можно записать в виде

$$\mathsf{P}(R(t) < x) = \mathsf{P}\Big(u + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j < x\Big) = 1 - \mathsf{P}\Big(\sum_{j=1}^{N(t)} X_j \leq u + ct - x\Big) =$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(N(t) = n)\mathsf{P}\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j \leq u + ct - x\Big) =$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(N(t) = n) F^{*n}(y + 0), \qquad (7.10.1)$$

где $y = u + ct - x$, а символ F^{*n} обозначает n-кратную свертку функции распределения $F(x) = \mathsf{P}(X_1 < x)$ с самой собой: $F^{*0}(x)$ – это вырожденная функция распределения с единственным единичным скачком в нуле, $F^{*1}(x) = F(x)$, а для $n \geq 2$

$$F^{*n}(x) = \int_0^x F^{*(n-1)}(x - y)dF(y).$$

Для классического процесса риска, в котором случайная величина $N(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λt, мы, очевидно, имеем

$$\mathsf{P}(R(t) < x) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{*n}(u + ct - x + 0).$$

Даже при абсолютно точно известной функции распределения $F(x)$ вычисления по приведенным выше формулам затруднены. Поэтому для вычисления распределения резерва страховой компании при большой интенсивности потока выплат и/или для достаточно удаленного момента времени разумно использовать асимптотические аппроксимации.

Хорошо известно, что классический процесс риска асимптотически нормален при $\lambda t \to \infty$. Мы приведем доказательство этого факта, основанное на применении Леммы 2.4.1. Для простоты, без потери общности, вместо процесса $R(t)$ с непрерывным временем рассмотрим процесс с дискретным временем $R_n,\ n = 0, 1, \ldots$, полагая $R_n = R(n)$. Это предположение хорошо согласуется с практикой, так как время обычно измеряется дискретными единицами: сутками, часами, минутами, и совсем уж трудно представить себе реальную ситуацию, когда страховая компания фиксирует моменты выплат по страховым случаям с точностью до секунд. Аналогично, $N_n = N(n)$.

Итак, вначале предположим, что случайные величины $\{X_j\}_{j\geq 1}$ одинаково распределены с $\mathsf{E}X_1 = \mu, \mathsf{D}X_1 = \sigma^2 < \infty$. Пусть $N(t)$ – однородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$.

Теорема 7.10.1. *Классический процесс риска асимптотически нормален: для любого* $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{R_n - n(c-\mu\lambda) - u}{\sqrt{n\lambda(\mu^2+\sigma^2)}} < x\right) = \Phi(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку

$$R_n - n(c-\mu\lambda) - u = -\Big(\sum_{j=1}^{N_n} X_j - n\mu\lambda\Big), \tag{7.10.2}$$

мы можем свести доказательство к Лемме 2.4.1. В нашем случае

$$\mathsf{E}\sum_{j=1}^{N_n} X_j = \mu n\lambda, \quad \mathsf{D}\sum_{j=1}^{N_n} X_j = n\lambda(\mu^2+\sigma^2).$$

Положим $\mu_n = n\mu,\ c_n = n\mu\lambda,\ b_n = \sigma\sqrt{n},\ d_n = \sqrt{n\lambda(\sigma^2+\mu^2)}$. Тогда

$$\frac{\mu_{N_n} - c_n}{d_n} = \frac{\mu(N_n - n\lambda)}{\sqrt{n\lambda(\mu^2+\sigma^2)}} = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2+\mu^2}} \cdot \frac{N_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \Longrightarrow V\ (n\to\infty), \tag{7.10.3}$$

где

$$\mathsf{P}(V < x) = \Phi\Big(x\sqrt{\frac{\mu^2+\sigma^2}{\mu^2}}\Big), \quad x \in \mathbb{R},$$

согласно хорошо известному свойству распределения Пуассона (см. Лемму 1.4.2):

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{N_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} < x\right) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Далее,

$$\frac{b_{N_n}}{d_n} = \sqrt{\frac{N_n}{n\lambda} \cdot \frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ мы имеем

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{N_n}{n\lambda} - 1\right| > \varepsilon\right) \le \frac{\mathsf{D}N_n}{\varepsilon^2 n^2\lambda^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 n\lambda} \to 0$$

при $n \to \infty$, так что

$$\frac{b_{N_n}}{d_n} \Longrightarrow \sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}} = U, \qquad (n \to \infty). \tag{7.10.4}$$

Наконец, в силу центральной предельной теоремы

$$\frac{1}{b_n}\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j - \mu_n\Big) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j - n\mu\Big) \Longrightarrow Y \quad (n \to \infty), \tag{7.10.5}$$

где $\mathsf{P}(Y < x) = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Поэтому, применяя Лемму 2.4.1 к случайным величинам

$$Z_n = \frac{\sum_{j=1}^{N_n} X_j - n\mu\lambda}{\sqrt{n\lambda(\mu^2+\sigma^2)}}$$

с учетом (7.10.3), (7.10.4) и (7.10.5), имея в виду вид полученных нами распределений предельных случайных величин Y, U и V, мы получим

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^{N_n} X_i - n\mu\lambda}{\sqrt{n\lambda(\mu^2+\sigma^2)}} < x\right) = \mathsf{P}(YU + V < x) =$$

$$= \Phi\left(x\sqrt{\frac{\mu^2+\sigma^2}{\sigma^2}}\right) * \Phi\left(x\sqrt{\frac{\mu^2+\sigma^2}{\mu^2}}\right) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что предельная случайная величина U вырождена, а вырожденная случайная величина независима от любой другой. Поэтому вместо условия слабой сходимости совместных распределений пар, фигурирующего в Лемме 2.4.1, мы можем ограничиться условиями сходимости маргинальных распределений. Таким образом, принимая во внимание (7.10.2), мы будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{R_n - n(c-\mu\lambda) - u}{\sqrt{n\lambda(\mu^2+\sigma^2)}} < x\right) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^{N_n} X_j - n\mu\lambda}{\sqrt{n\lambda(\mu^2+\sigma^2)}} > -x\right) =$$

$$= 1 - \Phi(-x) = \Phi(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

что и требовалось доказать. □

Несложно видеть, что на самом деле свойство асимптотической нормальности присуще не только классическому процессу риска, но также и любому процессу риска Спарре Андерсена, в котором страховые требования имеют конечные дисперсии, а процесс $N(t)$ асимптотически нормален.

Теорема 7.10.1 дает возможность при больших значениях λt использовать приближенную формулу

$$\mathsf{P}(R(t) < x) \approx \Phi(z(x)). \tag{7.10.6}$$

где

$$z(x) = \frac{x - t(c - \lambda\mu) - u}{\sqrt{\lambda t(\mu^2 + \sigma^2)}}.$$

Обратим внимание, что аппроксимирующее выражение в (7.10.6) использует только информацию о первых двух моментах страховых требований. Более того, если известен третий момент, то, используя результаты работ (Michel, 1986), (Korolev and Shorgin, 1997) (также см. раздел 2.4.2), можно показать, что погрешность формулы (7.10.6) имеет вид

$$|\mathsf{P}(R(t) < x) - \Phi(z(x))| \le \min\left\{0.7056,\ \frac{32}{1 + |z(x)|^3}\right\}\frac{\mathsf{E}X_1^3}{\sqrt{\lambda t}(\mu^2 + \sigma^2)^{3/2}}.$$

Используя результаты об асимптотических разложениях для пуассоновских случайных сумм (см, например, ((Bening, Korolev and Shorgin, 1997), (Bening and Korolev, 2002)) и информацию о старших моментах страховых требований, формулу (7.10.6) можно уточнить. В частности, если распределение страховых требований не является решетчатым, причем существует третий момент страховых требований, то имеет место приближенная формула

$$\mathsf{P}(R(t) < x) \approx \Phi(z(x)) - \frac{\mathsf{E}X_1^3}{6\sqrt{\lambda t}(\mu^2 + \sigma^2)}(z^2(x) - 1)\phi(z(x)), \tag{7.10.7}$$

где $z(x)$ определено выше, а $\phi(\cdot)$ – стандартная нормальная плотность. При этом погрешность приближенной формулы (7.10.7) имеет порядок $o((\lambda t)^{-1})$, см. раздел 2.5.

7.11 Асимптотика распределений суммарных страховых требований в процессах риска Спарре Андерсена

Анализ реальных ситуаций показывает, что довольно сильные предположения, определяющие классический процесс риска, на практике можно считать выполненными далеко не всегда. В связи с этим возникают два вопроса. Во-первых, какие распределения могут выступать в качестве предельных для процессов вида

$$R(t) = ct - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$$

при ослаблении условий, определяющих классический процесс риска? Во-вторых, насколько можно ослабить эти условия, сохранив адекватность нормальной аппроксимации? Другими словами, в каких случаях можно пользоваться нормальным приближением при ослаблении условий, определяющих классический процесс риска? Остальная часть данного раздела посвящена ответам на эти вопросы. В оставшейся части данного раздела мы будем рассматривать общую ситуацию, не делая никаких конкретных структурных предположений о распределении числа требований.

Как и в разделе 3.1, мы будем рассматривать дискретное время $t = n = 1, 2, \ldots$, полагая $R_n = R(n)$. Обозначим $N_n = N(n)$. Рассмотрим ситуацию, которую можно считать обобщением той, в которой страховые требования $\{X_j\}_{j\geq 1}$ предполагаются одинаково распределенными, хотя формально на случайные величины $\{X_j\}$ мы не будем накладывать никаких (в том числе моментных) условий кроме их независимости (за исключением особо оговоренных случаев). Наши дополнительные условия будут связаны с центрирующими и нормирующими константами.

Предположим, что нормирующие постоянные имеют специальный вид, а именно, пусть

$$b_n = d_n = n^{1/\alpha} B(n),$$

где $1 < \alpha \leq 2$, а $B(x),\ x \in \mathbb{R}$, – медленно меняющаяся функция, то есть такая, что для любого $p > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{B(px)}{B(x)} = 1. \tag{7.11.1}$$

В отношении центрирующих постоянных мы предположим, что $a_n =$

c_n; более того, пусть последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=A \tag{7.11.2}$$

для некоторого $A\in(0,\infty)$. Обозначим $\alpha_j=a_j-a_{j-1}$, где для определенности $a_0=0$.

В работе (Королев, 1994) доказано следующее общее утверждение, которое является фундаментом для всех результатов данного раздела. Пусть L_1 и L_2 – метрики в пространствах соответственно одно- и двумерных случайных величин, метризующие сходимость по распределению (например, L_1 – это метрика Леви, а L_2 – метрика Леви–Прохорова, см., скажем, (Ширяев, 1989)).

Лемма 7.11.1. *Предположим, что*

$$N_k\xrightarrow{\mathsf{P}}\infty\qquad(k\to\infty),$$

и последовательности $\{a_k\}$ *и* $\{b_k\}$, $b_k>0$, $b_k\to\infty$ $(k\to\infty)$, *обеспечивают слабую компактность семейства случайных величин* $\{(S_k-a_k)/b_k\}_{k\geq1}$. *Сходимость случайных сумм*

$$\frac{1}{d_k}\Big(\sum_{j=1}^{N_k}X_j-c_k\Big)\Longrightarrow Z\qquad(k\to\infty)$$

к некоторой случайной величине Z *имеет место при некоторых последовательностях положительных чисел* $\{d_k\}$, $d_k\to\infty$ $(k\to\infty)$, *и вещественных чисел* $\{c_k\}$ *тогда и только тогда, когда существует слабо компактная последовательность троек случайных величин* $\{(Y'_k,U'_k,V'_k)\}_{k\geq1}$ *таких, что* $(Y'_k,U'_k,V'_k)\in\mathcal{V}(Z)$ *при каждом* $k\geq1$ *и*

$$L_1\Big(\frac{1}{b_k}\Big(\sum_{j=1}^{k}X_j-a_k\Big),\ Y'_k\Big)\to0\qquad(k\to\infty),$$

$$L_2\left(\left(\frac{b_{N_k}}{d_k},\frac{a_{N_k}-c_k}{d_k}\right),\ (U'_k,V'_k)\right)\to0\qquad(k\to\infty).$$

Будем говорить, что семейство сдвиговых смесей некоторой функции распределения $F(x)$ идентифицируемо, если из того, что $F*G_1\equiv F*G_2$, где G_1 и G_2 – функции распределения, вытекает, что $G_1\equiv G_2$. Если переписать условие $F*G_1\equiv F*G_2$ в терминах характеристических функций $(f\cdot g_1\equiv f\cdot g_2)$, то можно сразу заметить, что, если характеристическая функция f, соответствующая функции распределения F, нигде не обращается в нуль, то из указанного уравнения всегда будет следовать тождество $g_1 \equiv g_2$, то есть в таком случае семейство сдвиговых смесей функции распределения $F(x)$, соответствующей характеристической функции f, идентифицируемо. Как известно, безгранично делимые характеристические функции нигде не обращаются в нуль (см., например, (Лукач, 1979)). Известно также, что суммы независимых равномерно предельно малых случайных величин имеют безгранично делимые предельные законы (см., например, (Гнеденко и Колмогоров, 1949)). Поэтому непосредственным следствием Леммы 7.11.1 является следующее утверждение.

Лемма 7.11.2. *Предположим, что* $b_k \to \infty, d_k \to \infty, b_{N_k}/d_k \Longrightarrow 1$ *и при некоторой последовательности вещественных чисел* $\{\alpha_j\}_{j\geq 1}$ *имеет место сходимость*

$$\frac{1}{b_k}\sum_{j=1}^{k}(X_j-\alpha_j)\Longrightarrow Y \qquad (k\to\infty)$$

к некоторой случайной величине Y. *Пусть, более того, слагаемые* $\{X_j\}$ *удовлетворяют условию равномерного асимптотического постоянства: для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty}\max_{1\leq j\leq k}\mathsf{P}(|X_j-\alpha_j|>\varepsilon b_k)=0.$$

Сходимость случайных сумм

$$\frac{1}{d_k}\bigg(\sum_{j=1}^{N_k}(X_j-\alpha_j)-c_k\bigg)\Longrightarrow Z \qquad (k\to\infty)$$

к некоторой случайной величине Z *имеет место с некоторой последовательностью вещественных чисел* $\{c_k\}_{k\geq 1}$ *тогда и только тогда, когда существует случайная величина* V, *удовлетворяющая условиям*

1. $Z \stackrel{d}{=} Y+V$, *где* Y *и* V *независимы;*
2. $\displaystyle\frac{1}{d_k}\bigg(\sum_{j=1}^{N_k}\alpha_j-c_k\bigg)\Longrightarrow V \qquad (k\to\infty).$

Следующее утверждение играет центральную роль в данном разделе.

Теорема 7.11.1. *Предположим, что* $N_k \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ *при* $k\to\infty$, *страховые требования* $\{X_j\}_{j\geq 1}$ *равномерно асимптотически постоянны: для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty}\max_{1\leq j\leq k}\mathsf{P}(|X_j-\alpha_j|>\varepsilon b_k)=0,$$

и их неслучайные суммы имеют некоторое предельное распределение:

$$\frac{1}{b_k}\Big(\sum_{j=1}^{k} X_j - a_k\Big) \Longrightarrow Y \qquad (k \to \infty). \tag{7.11.3}$$

Процесс риска R_n имеет предельное распределение при $n \to \infty$:

$$\frac{1}{b_n}(R_n - nc + a_n) \Longrightarrow -Z \qquad (n \to \infty), \tag{7.11.4}$$

тогда и только тогда, когда существует случайная величина V такая, что

1. $Z \stackrel{d}{=} Y + V$, *Y и V независимы;*

2. $\dfrac{a_{N_k} - a_k}{b_k} \Longrightarrow V \qquad (k \to \infty)$.

Доказательство. Необходимость. Поскольку

$$\frac{1}{b_n}(R_n - nc + a_n) = -\frac{1}{b_n}\Big(\sum_{j=1}^{N_n} X_j - a_n\Big),$$

мы сведем доказательство к Лемме 7.11.2. Покажем, что форма центрирующих и нормирующих постоянных и условия теоремы гарантируют, что

$$b_{N_k}/b_k \Longrightarrow 1 \ (k \to \infty).$$

Действительно, несложно убедиться, что из условий (7.11.3) и (7.11.4) с учетом неограниченного стохастического роста N_k вытекает слабая компактность последовательности пар случайных величин

$$\Big(\frac{b_{N_k}}{b_k}, \quad \frac{a_{N_k} - a_k}{b_k}\Big), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Как и ранее, точную нижнюю грань q-квантилей случайной величины N_k будем обозначать $l_k(q)$. Поскольку последовательность $\{a_k\}$ монотонно возрастает, q-квантиль случайной величины $(a_{N_k} - a_k)/b_k$, которую мы обозначим $A_k(q)$, равна $(a_{l_k(q)} - a_k)/b_k$. В силу слабой компактности последовательности случайных величин $\{(a_{N_k} - a_k)/b_k\}_{k\geq 1}$ последовательность $\{A_k(q)\}_{k\geq 1}$ равномерно ограничена при каждом $q \in (0,1)$:

$$\sup_k |A_k(q)| \equiv M(q) < \infty.$$

В этом легко убедиться с помощью рассуждений от противного. Поэтому в силу определения b_n и условия (7.11.2) при каждом $q \in (0,1)$ мы имеем

$$\left|\frac{a_{l_k(q)}}{a_k} - 1\right| = \left|\frac{a_{l_k(q)} - a_k}{b_k}\right| \cdot \frac{b_k}{a_k} = |A_k(q)| \cdot \frac{b_k}{a_k} \leq$$

$$\leq M(q)\frac{k^{1/\alpha}B(k)}{Ak} \cdot \frac{Ak}{a_k} \to 0 \qquad (7.11.5)$$

при $k \to \infty$, так как $Ak/a_k \to 1$ согласно условию (7.11.2) и $k^{1/\alpha}B(k)/k \to 0$ по свойству медленно меняющихся функций. В свою очередь, из (7.11.5) и (7.11.2) мы получим, что

$$\frac{l_k(q)}{k} = \frac{Al_k(q)}{a_{l_k(q)}} \cdot \frac{a_{l_k(q)}}{a_k} \cdot \frac{a_k}{Ak} \to 1 \qquad (k \to \infty) \qquad (7.11.6)$$

при каждом $q \in (0,1)$, поскольку неограниченное стохастическое возрастание N_k при $k \to \infty$ означает, что $l_k(q) \to \infty$ при $k \to \infty$ для любого $q \in (0,1)$. Из (7.11.6) следует, что $N_k/k \Longrightarrow 1$ при $k \to \infty$. В силу неравенства

$$\mathsf{P}(|W_1 + W_2| > \delta) \leq \mathsf{P}\Big(|W_1| > \frac{\delta}{2}\Big) + \mathsf{P}\Big(|W_2| > \frac{\delta}{2}\Big),$$

справедливого для любых случайных величин W_1 и W_2 и для любого $\delta > 0$, при произвольном $\varepsilon > 0$ мы имеем

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{b_{N_k}}{b_k} - 1\Big| > \varepsilon\Big) = \mathsf{P}\Big(\Big|\Big(\frac{N_k}{k}\Big)^{1/\alpha}\frac{B(N_k)}{B(k)} - 1\Big| > \varepsilon\Big) =$$

$$= \mathsf{P}\Big(\Big|\Big(\frac{N_k}{k}\Big)^{1/\alpha}\Big(\frac{B(N_k)}{B(k)} - 1\Big) + \Big(\frac{N_k}{k}\Big)^{1/\alpha} - 1\Big| > \varepsilon\Big) \leq$$

$$\leq \mathsf{P}\Big(\Big|\Big(\frac{N_k}{k}\Big)^{1/\alpha}\Big(\frac{B(N_k)}{B(k)} - 1\Big)\Big| > \frac{\varepsilon}{2}\Big) +$$

$$+ \mathsf{P}\Big(\Big|\Big(\frac{N_k}{k}\Big)^{1/\alpha} - 1\Big| > \frac{\varepsilon}{2}\Big). \qquad (7.11.7)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (7.11.7). Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\Big(\frac{N_k}{k}\Big)^{1/\alpha}\Big(\frac{B(N_k)}{B(k)} - 1\Big)\Big| > \frac{\varepsilon}{2}\Big) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(N_k = n)\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{B(n)}{B(k)} - 1\Big| > \frac{\varepsilon k^{1/\alpha}}{2n^{1/\alpha}}\Big) =$$

$$= \sum_{n:\left|\frac{n}{k}-1\right|\le\frac12} \mathsf{P}(N_k=n)\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{B(n)}{B(k)}-1\Big|>\frac{\varepsilon k^{1/\alpha}}{2n^{1/\alpha}}\Big)+$$

$$+\sum_{n:\left|\frac{n}{k}-1\right|>\frac12} \mathsf{P}(N_k=n)\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{B(n)}{B(k)}-1\Big|>\frac{\varepsilon k^{1/\alpha}}{2n^{1/\alpha}}\Big)\le$$

$$\le \sum_{n:\left|\frac{n}{k}-1\right|\le\frac12} \mathsf{P}(N_k=n)\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{B(n)}{B(k)}-1\Big|>\frac{2^{1/\alpha-1}\varepsilon}{3^{1/\alpha}}\Big)+\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{N_k}{k}-1\Big|>\frac12\Big)\le$$

$$\le \sum_{n:\left|\frac{n}{k}-1\right|\le\frac12} \mathsf{P}(N_k=n)\mathsf{P}\Big(\sup_{\frac12\le p\le\frac32}\Big|\frac{B(kp)}{B(k)}-1\Big|>\frac{2^{1/\alpha-1}\varepsilon}{3^{1/\alpha}}\Big)+$$

$$+\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{N_k}{k}-1\Big|>\frac12\Big)\le$$

$$\le \mathsf{P}\Big(\sup_{\frac12\le p\le\frac32}\Big|\frac{B(kp)}{B(k)}-1\Big|>\frac{2^{1/\alpha-1}\varepsilon}{3^{1/\alpha}}\Big)+\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{N_k}{k}-1\Big|>\frac12\Big). \qquad (7.11.8)$$

Согласно Теореме 1.1 в (Сенета, 1985), сходимость (7.11.1) равномерна на каждом замкнутом интервале значений p. Поэтому существует $k_0 = k_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $k\ge k_0$

$$\sup_{\frac12\le p\le\frac32}\Big|\frac{B(kp)}{B(k)}-1\Big|<\frac{2^{1/\alpha-1}\varepsilon}{3^{1/\alpha}}. \qquad (7.11.9)$$

Таким образом, в соответствии с (7.11.8) и (7.11.9) при всех $k\ge k_0$ мы имеем

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\Big(\frac{N_k}{k}\Big)\Big(\frac{B(N_k)}{B(k)}-1\Big)\Big|>\frac{\varepsilon}{2}\Big)\le\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{N_k}{k}-1\Big|>\frac12\Big),$$

и потому согласно уже доказанному,

$$\lim_{k\to\infty}\mathsf{P}\Big(\Big|\Big(\frac{N_k}{k}\Big)^{1/\alpha}\Big(\frac{B(N_k)}{B(k)}-1\Big)\Big|>\frac{\varepsilon}{2}\Big)\le$$

$$\le\lim_{k\to\infty}\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{N_k}{k}-1\Big|>\frac12\Big)=0. \qquad (7.11.10)$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (7.11.7). Поскольку $N_k/k \Longrightarrow 1$ при $k\to\infty$, $N_k/k \xrightarrow{\mathsf{P}} 1$ и потому $(N_k/k)^{1/\alpha} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1$, то есть

$$\lim_{k\to\infty}\mathsf{P}\Big(\Big|\Big(\frac{N_k}{k}\Big)^{1/\alpha}-1\Big|>\frac{\varepsilon}{2}\Big)=0. \qquad (7.11.11)$$

Теперь требуемое соотношение $b_{N_k}/b_k \Longrightarrow 1$ $(k \to \infty)$ вытекает из (7.11.7), (7.11.10). Ссылка на Лемму 7.11.2 завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Как и при доказательстве необходимости, убеждаемся, что условие 2) влечет $b_{N_k}/b_k \Longrightarrow 1$ $(k \to \infty)$, что позволяет свести доказательство к Лемме 1.4.1. Теорема доказана. □

Следствие 7.11.1. *Предположим, что* $N_k \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ *и неслучайные суммы страховых требований имеют некоторое предельное распределение, то есть имеет место (7.11.3). Процесс риска асимптотически нормален*

$$\mathsf{P}\Big(\frac{1}{b_k}(R_k - kc + a_k) < x\Big) \Longrightarrow \Phi(x) \qquad (k \to \infty) \tag{7.11.12}$$

тогда и только тогда, когда существуют числа $\mu \in \mathbb{R}$ *и* $0 \le \sigma^2 \le 1$ *такие, что*

1. $\mathsf{P}(Y < x) = \Phi\Big(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\Big), \quad x \in \mathbb{R};$
2. $\mathsf{P}\Big(\dfrac{a_{N_k} - a_k}{b_k} < x\Big) \Longrightarrow \Phi\Big(\dfrac{x+\mu}{\sqrt{1-\sigma^2}}\Big) \quad (k \to \infty).$

Доказательство. По Теореме 7.11.1 предельная стандартная нормальная случайная величина Z должна удовлетворять соотношению $Z \stackrel{d}{=} Y + V$ с независимыми Y и V. Тогда по Теореме Леви-Краме́ра о разложимости нормального закона только на нормальные компоненты и Y, и V должны иметь нормальное распределение, как известно, являющееся безгранично делимым. Поэтому условие равномерного предельного постоянства страховых требований в рассматриваемом случае излишне. Требуемый результат теперь следует из Теоремы 7.11.1. Следствие доказано. □

В Теореме 7.11.1 и Следствии 7.11.1 мы предполагали, что свойства страховых требований обеспечивают слабую сходимость распределений их неслучайных сумм к некоторому закону, а условия сходимости распределений процесса риска формулировались в терминах процесса $N(t)$. Теперь мы будем предполагать, что известны асимптотические свойства процесса $N(t)$ при $t \to \infty$, и сформулируем условия сходимости распределений процесса риска в терминах требований.

Теорема 7.11.2. *Предположим, что* $N_k \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ *при* $k \to \infty$, *имеет место сходимость*

$$\frac{a_{N_k} - a_k}{b_k} \Longrightarrow V \qquad (k \to \infty) \tag{7.11.13}$$

к некоторой случайной величине V, *а последовательность случайных величин* $\{Y_k\}_{k\geq 1}$,

$$Y_k = \frac{1}{b_k}\Big(\sum_{j=1}^{k} X_j - a_k\Big), \qquad k \geq 1,$$

слабо компактна. Соотношение (7.11.4) выполнено для процесса риска R_n *тогда и только тогда, когда существует слабо компактная последовательность случайных величин* $\{Y'_k\}_{k\geq 1}$ *таких, что*

1. $Z \stackrel{d}{=} V + Y'_k$ *при каждом* k, *где* V *и* Y'_k *независимы;*

2. $L_1(Y_k, Y'_k) \to 0 \qquad (k \to \infty)$.

Доказательство. Так же, как и в доказательстве Теоремы 7.11.1, мы убеждаемся, что условие (7.11.13) влечет $b_{N_k}/b_k \Longrightarrow 1$ при $k \to \infty$, то есть случайные величины U'_k в тройках (Y'_k, U'_k, V'_k), фигурирующих в Лемме 7.11.1, должны быть равными единице с вероятностью единица. Теперь требуемое утверждение вытекает из Леммы 7.11.1. Теорема доказана. □

Следствие 7.11.2. *Пусть в дополнение к условиям Теоремы 7.11.2 семейство сдвиговых смесей функции распределения* $\mathsf{P}(V < x)$, $x \in \mathbb{R}$, *идентифицируемо. Тогда (7.11.4) имеет место тогда и только тогда, когда существует случайная величина* Y *такая, что*

1. $Z \stackrel{d}{=} Y + V$, *где* Y *и* V *независимы;*

2. $Y_k \Longrightarrow Y \quad (k \to \infty)$.

Доказательство. В силу условия идентифицируемости семейства сдвиговых смесей функции распределения случайной величины V соотношению $Z \stackrel{d}{=} Y + V$, в правой части которого слагаемые независимы, удовлетворяет не более чем одна случайная величина. Ссылка на Теорему 7.11.2 завершает доказательство. □

Следствие 7.11.3. *В условиях Теоремы 7.11.2 процесс риска асимптотически нормален, то есть выполняется соотношение (7.11.12), тогда и только тогда, когда существуют числа* $\mu \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leq \sigma^2 \leq 1$ *такие, что*

1. $\mathsf{P}(V < x) = \Phi\Big(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\Big), \quad x \in \mathbb{R};$

2. $\mathsf{P}(Y_k < x) \Longrightarrow \Phi\Big(\dfrac{x+\mu}{\sqrt{1-\sigma^2}}\Big) \quad (k \to \infty).$

Доказательство. В силу Теоремы 7.11.2 предельная случайная величина Z должна допускать представление в виде $Z \stackrel{d}{=} Y_k' + V$, где Y_k' и V независимы, $k \geq 1$. Но вследствие нормальности Z, каким бы ни было $k \geq 1$, согласно теореме Леви-Краме́ра представление $Z \stackrel{d}{=} Y_k' + V$ с независимыми слагаемыми в правой части возможно только лишь, если и Y_k', и V имеют нормальные распределения. Более того, поскольку семейство сдвиговых смесей нормальной функции распределения случайной величины V идентифицируемо, случайная величина Y_k' не зависит от k. Следствие доказано. □

Наконец, рассмотрим условия сходимости распределений процессов риска без каких бы то ни было предположений о сходимости процесса $N(t)$ или неслучайных сумм страховых требований.

Теорема 7.11.3. *Предположим, что* $N_k \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ *при* $k \to \infty$ *и последовательность* $\{Y_k\}_{k \geq 1}$ *слабо компактна. Процесс риска* R_n *слабо сходится (7.11.4) к некоторой случайной величине* Z *тогда и только тогда, когда существует слабо компактные последовательности случайных величин* $\{Y_k'\}_{k \geq 1}$ *и* $\{V_k'\}_{k \geq 1}$ *такие, что*

1. $Z \stackrel{d}{=} Y_k' + V_k'$, *где* Y_k' *и* V_k' *независимы,* $k \geq 1$*;*
2. $L_1(Y_k, Y_k') \to 0 \quad (k \to \infty)$*;*
3. $L_1\Big(\dfrac{a_{N_k} - a_k}{b_k}, V_k'\Big) \to 0 \quad (k \to \infty)$.

Доказательство этой Теоремы сводится к Лемме 7.11.1 с учетом соотношения $b_{N_k}/b_k \Longrightarrow 1$ $(k \to \infty)$, установленного в ходе доказательства Теоремы 7.11.1. Теорема доказана. □

Следствие 7.11.4. *В условиях Теоремы 7.11.3 процесс риска асимптотически нормален (7.11.12) тогда и только тогда, когда существуют числовые последовательности* $\{\beta_k\}_{k \geq 1}$ *и* $\{\sigma_k^2\}_{k \geq 1}$ *такие, что* $\sup_k |\beta_k| < \infty$, $0 \leq \sigma_k^2 \leq 1$, $k \geq 1$, *и*

1. $L_1\Big(\mathsf{P}(Y_k < x), \Phi\Big(\dfrac{x - \beta_k}{\sigma_k}\Big)\Big) \to 0 \quad (k \to \infty)$;
2. $L_1\Big(\mathsf{P}\Big(\dfrac{a_{N_k} - a_k}{b_k} < x\Big), \Phi\Big(\dfrac{x + \beta_k}{\sqrt{1 - \sigma_k^2}}\Big)\Big) \to 0 \quad (k \to \infty)$.

Доказательство. В силу теоремы Леви-Краме́ра о разложимости нормального закона только на нормальные компоненты, каждая из случайных величин Y_k' и V_k', фигурирующих в условии 1) Теоремы

7.11.3 должна иметь нормальное распределение. Более того, условия $\sup_k |\beta_k| < \infty$ и $0 \leq \sigma^2 \leq 1$ необходимы и достаточны для слабой компактности последовательностей $\{Y'_k\}$ и $\{V'_k\}$. Теперь требуемый результат вытекает из Теоремы 7.11.3. Следствие доказано. □

Таким образом, ответы на сформулированные выше вопросы выглядят так.

Предельные распределения для процессов риска при указанном специальном выборе центрирующих и нормирующих постоянных имеют вид свертки двух распределений, одно из которых является предельным для неслучайных сумм страховых требований, а другое является предельным для нормализованного числа страховых случаев.

Нормальная аппроксимация для распределения процесса риска адекватна тогда и только тогда, когда асимптотически нормальны и неслучайные суммы страховых требований, и нормализованные количества страховых случаев.

Мы не использовали свойство положительности случайных величин $\{X_j\}$, которое является следствием их интерпретации как страховых выплат. Поэтому все утверждения данного раздела – это по сути предельные теоремы для "нарастающих"случайных сумм при специальном выборе центрирующих и нормирующих постоянных.

Выбор нормирующих постоянных в виде $b_n = n^{1/\alpha}B(n)$, где $B(x)$ – медленно меняющаяся функция, типичен для ситуации, в которой слагаемые $\{X_j\}$ независимы и одинаково распределены, и обеспечивает сходимость распределения нормированных неслучайных сумм к устойчивому закону с показателем α. Поэтому, формально не используя условие совпадения распределений слагаемых, мы, тем не менее, рассматривали слагаемые, которые "почти одинаково"распределены в указанном смысле.

Мы использовали такие центрирующие и нормирующие постоянные, чтобы вместо сходимости пар случайно индексированных центрирующих и нормирующих постоянных иметь дело только с одной компонентой каждой из этих пар, характеризующей сдвиги, в то время как другая компонента, характеризующая преобразование масштаба, была асимптотически вырожденной. Эти условия позволили нам получить более сильные и одновременно более простые утверждения. Если мы будем рассматривать процессы риска в общей ситуации, без каких бы то ни было условий на центрирующие и нормирующие постоянные, то предельные теоремы для процессов риска с точностью до терминологии будут совпадать предельными теоремами для сумм случайного числа независимых случайных величин (см., например, (Круглов и Королев, 1990), (Королев, 1994), (Gnedenko and Korolev, 1996)).

Глава 8

Вероятность разорения

8.1 Формула Поллачека–Хинчина–Беекмана для вероятности разорения в классическом процессе риска

В этом разделе будет получена явная формула для вероятности разорения $\psi(u)$ в классическом процессе риска $R(t)$.

Теорема 8.1.1. *Пусть $Y_1, Y_2, \dots$ – независимые случайные величины с общей для всех них плотностью*

$$h(x) = \frac{1}{\mu}[1 - F(x)], \quad x > 0.$$

Функцию распределения, соответствующую плотности $h(x)$, обозначим $H(x)$. Пусть M – случайная величина, независимая от $Y_1, Y_2, \dots$ и имеющая геометрическое распределение с параметром $p = \frac{1}{1+\rho}$:

$$\mathsf{P}(M = n) = (1-p)p^n = \frac{\rho}{(1+\rho)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда

$$\psi(u) = \mathsf{P}(Y_1 + \ldots + Y_M > u) = 1 - \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H^{*n}(u)}{(1+\rho)^n}. \tag{8.1.1}$$

Доказательство. Пусть T_1 – момент времени, когда осуществилась первая страховая выплата. Тогда $R(T_1) = cT_1 - X_1$. На интервале времени $(0, T_1)$ разорение не может произойти. Поэтому с учетом того факта, что пуассоновский процесс является процессом восстановления, в котором случайная величина T_1 не зависит от будущего, мы имеем

$$\phi(u) = \mathsf{E}\phi(u + cT_1 - X_1) = \int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \int\limits_0^{u+cs} \phi(u + cs - z) dF(z) ds,$$

где $\phi(u) = 1 - \psi(u)$–вероятность неразорения.

Замена переменных $x = u + cs$ приводит нас к соотношению

$$\phi(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} \int\limits_u^\infty e^{-\lambda x/c} \int\limits_0^x \phi(x - z) dF(z) dx. \tag{8.1.2}$$

Следовательно, функция $\phi(u)$ дифференцируема. Дифференцируя (8.1.2), получаем

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^u \phi(u - z) dF(z). \tag{8.1.3}$$

Проинтегрировав (8.1.3) на отрезке $(0, t)$, получим

$$\phi(t) - \phi(0) = \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^t \phi(u) du + \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^t \int\limits_0^u \phi(u - z) d[1 - F(z)] du =$$

$$= \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^t \phi(u) du + \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^t \Big(\phi(0)[1 - F(u)] - \phi(u) +$$

$$+ \int\limits_0^u \phi'(u - z)[1 - F(z)] dz\Big) du =$$

$$= \frac{\lambda}{c}\phi(0)\int\limits_0^t [1 - F(u)] du + \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^t \Big([1 - F(z)]\int\limits_z^t \phi'(u - z) du\Big) dz =$$

$$= \frac{\lambda}{c}\phi(0)\int\limits_0^t [1 - F(u)] du + \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^t [1 - F(z)](\phi(t - z) - \phi(0)) dz.$$

Таким образом, мы имеем

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^u \phi(u - z)[1 - F(z)] dz. \tag{8.1.4}$$

По теореме о монотонной сходимости из (8.1.4) следует, что при $u \to \infty$

$$\phi(\infty) = \phi(0) + \frac{\lambda\mu}{c}\phi(\infty). \tag{8.1.5}$$

По усиленному закону больших чисел

$$\mathsf{P}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{R(t)}{t}=c-\lambda\mu\right)=1.$$

Отсюда вытекает, что в случае, когда коэффициент безопасности положителен, то есть $c>\lambda\mu$, существует собственная случайная величина T ($\mathsf{P}(T<\infty)=1$) такая, что $R(t)>0$ для всех $t>T$. Поскольку до момента T может осуществиться лишь конечное число выплат, с вероятностью единица величина $\inf_{t>0}R(t)$ конечна, а потому $\phi(\infty)=1$. Таким образом, из (8.1.5) вытекает, что

$$1=(1-\psi(0))+\frac{\lambda\mu}{c}$$

или, что то же самое,

$$\psi(0)=\frac{\lambda\mu}{c}=\frac{1}{1+\rho}, \tag{8.1.6}$$

если $c>\lambda\mu$. Заметим, что соотношение (8.1.6) демонстрирует нечувствительность или устойчивость $\psi(0)$ по отношению к распределению F, поскольку, как мы видим, $\psi(0)$ зависит лишь от ρ и, следовательно, лишь от $\mu=\mathsf{E}X_1$.

Введем преобразования Лапласа–Стильтьеса

$$\mathfrak{f}(v)=\int\limits_0^\infty e^{-vz}dF(z)\quad\text{и}\quad\mathfrak{g}(v)=\int\limits_0^\infty e^{-vz}d\phi(z),\quad v>0.$$

Тогда из (8.1.4) и (8.1.6) мы непосредственно получаем равенство

$$\mathfrak{g}(v)=1-\frac{\lambda\mu}{c}+\mathfrak{g}(v)\frac{\lambda(1-\mathfrak{f}(v))}{cv},$$

откуда

$$\mathfrak{g}(v)=\frac{1-\frac{\lambda\mu}{c}}{1-\frac{\lambda(1-\mathfrak{f}(v))}{cv}}=\frac{1-\frac{1}{1+\rho}}{1-\frac{1}{1+\rho}\left(\frac{1-\mathfrak{f}(v)}{\mu v}\right)}. \tag{8.1.7}$$

Соотношение (8.1.7) принято называть *формулой Поллачека–Хинчина.*

Теперь формально рассмотрим независимые случайные величины $Y_1,Y_2,\ldots$ с общей для всех них плотностью

$$h(x)=\frac{1}{\mu}[1-F(x)],\quad x>0.$$

Функцию распределения, соответствующую плотности $h(x)$, обозначим $H(x)$. Пусть теперь M – случайная величина, независимая от $Y_1, Y_2, \ldots$ и имеющая геометрическое распределение с параметром $p = \frac{1}{1+\rho}$:

$$\mathsf{P}(M = n) = (1-p)p^n = \frac{\rho}{(1+\rho)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Введем случайную величину Q, равную геометрической случайной сумме случайных величин $Y_1, Y_2, \ldots$, положив

$$Q = Y_1 + \ldots + Y_M.$$

Используя формулу полной вероятности, легко убедиться, что

$$\mathsf{P}(Q < u) = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{*n}(u)}{(1+\rho)^n}, \tag{8.1.8}$$

где символ $H^{*n}(x)$ обозначает n-кратную свертку функции распределения $H(x)$ с самой собой:

$$H^{*n}(x) = \int_0^{\infty} H^{*(n-1)}(x-z)dH(z),$$

$H^{*0}(x)$ – функция с единственным единичным скачком в нуле.

Найдем преобразование Лапласа–Стильтьеса $\mathfrak{q}(v)$ функции распределения (8.1.8). Интегрированием по частям несложно убедиться, что преобразование Лапласа–Стильтьеса $\mathfrak{h}(v)$ функции распределения $H(x)$ равно

$$\mathfrak{h}(v) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-vs}}{\mu}[1 - F(s)]ds = \frac{1 - \mathfrak{f}(v)}{\mu v}. \tag{8.1.9}$$

Тогда искомое преобразование Лапласа–Стильтьеса функции распределения (8.1.8) (или, что то же самое, случайной величины Q) с учетом (8.1.9) имеет вид

$$\mathfrak{q}(v) = \int_0^{\infty} e^{-vs} d\mathsf{P}(Q < s) = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{h}^n(v)}{(1+\rho)^n} =$$

$$= \frac{\rho}{1+\rho} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\mathfrak{h}(v)}{1+\rho}} = \frac{1 - \frac{1}{1+\rho}}{1 - \frac{\mathfrak{h}(v)}{1+\rho}} = \frac{1 - \frac{1}{1+\rho}}{1 - \frac{1}{1+\rho}\left(\frac{1-\mathfrak{f}(v)}{\mu v}\right)}. \tag{8.1.10}$$

Заметим, что правые части соотношений (8.1.7) и (8.1.10) совпадают. Поскольку соответствие между распределениями и их преобразованиями Лапласа–Стильтьеса взаимно однозначно, замеченное совпадение означает, что

$$\phi(u) = \mathsf{P}(Y_1 + \ldots + Y_M < u) = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{*n}(u)}{(1+\rho)^n}$$

или, что то же самое, имеет место соотношение (8.1.1). Теорема доказана. □

Соотношение (8.1.1) принято называть *формулой Бекмана* или (учитывая совпадение правых частей (8.1.7) и (8.1.10)) *формулой Поллачека–Хинчина–Бекмана.*

Пример 8.1.1. Предположим, что страховые требования X_k имеют показательное распределение, то есть

$$F(x) = 1 - e^{-x/\mu}, \quad x \geq 0$$

(можно показать, что в этом случае классический процесс риска является марковским). Тогда соотношение (8.1.3) принимает вид

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu}\int\limits_0^u \phi(u-z)e^{-z/\mu}dz =$$

$$= \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu}\int\limits_0^u \phi(z)e^{-(u-z)/\mu}dz. \tag{8.1.11}$$

Продифференцировав (8.1.11), получим

$$\phi''(u) = \frac{\lambda}{c}\phi'(u) + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda}{c}\phi(u) - \phi'(u)\right) - \frac{\lambda}{c\mu}\phi(u) = \left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}\right) =$$

$$= -\frac{\rho}{\mu(1+\rho)}\phi'(u). \tag{8.1.12}$$

Решая дифференциальное уравнение (8.1.12), получаем

$$\phi(u) = C_1 - C_2 \exp\left\{-\frac{\rho u}{\mu(1+\rho)}\right\}. \tag{8.1.13}$$

При $\rho > 0$ мы имеем $\phi(\infty) = 1$ и $\phi(0) = 1 - \frac{1}{1+\rho}$. При этом из (8.1.13) следует, что

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho}e^{-\rho u/\mu(1+\rho)}. \tag{8.1.14}$$

Теперь вычислим вероятность разорения для рассматриваемой ситуации с помощью формулы (8.1.1). Несложно убедиться, что плотность, соответствующая функции распределения H^{*n}, имеет вид

$$(H^{*n})'(x) = \frac{x^{n-1}e^{-x/\mu}}{\mu^n(n-1)!}, \quad x \geq 0$$

(см, например, (Феллер, 1984), т.2, с. 24). Тогда в соответствии с (8.1.1) мы имеем

$$\psi(u) = 1 - \frac{\rho}{1+\rho}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H^{*n}(u)}{(1+\rho)^n}\right] =$$

$$= 1 - \frac{\rho}{1+\rho}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\rho)^n}\int\limits_0^u \frac{x^{n-1}e^{-x/\mu}}{\mu^n(n-1)!}dx\right] =$$

$$= 1 - \frac{\rho}{1+\rho}\left[1 + \int\limits_0^u \frac{e^{-x/\mu}}{\mu(1+\rho)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{[\mu(1+\rho)]^{n-1}(n-1)!}\right)dx\right] =$$

$$= 1 - \frac{\rho}{1+\rho}\left[1 + \int\limits_0^u \frac{e^{-x/\mu}}{\mu(1+\rho)}\exp\left\{\frac{x}{\mu(1+\rho)}\right\}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{1+\rho}\exp\left\{-\frac{\rho u}{\mu(1+\rho)}\right\},$$

что, естественно, совпадает с (8.1.14).

Вычисления вероятности разорения по формуле Поллачека–Хинчина–Беекмана возможны еще для нескольких типов распределений выплат, связанных с показательным, например, для гиперэкспоненциального распределения, являющегося смесью нескольких экспоненциальных законов.

8.2 Приближенная формула для вероятности разорения при малой нагрузке безопасности

Напомним, что мы рассматриваем классический процесс риска

$$R(t) = ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad t \geq 0,$$

где $c > 0$, $N(t)$ – пуассоновский процесс с некоторой интенсивностью λ, $X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины с общей функцией распределения $F(x)$ такой, что $F(0) = 0$, и $\mathsf{E}X_1 = \mu > 0$ и независимые от случайного процесса $N(t)$.

Здесь случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ имеют смысл последовательных выплат страховой компании (страховых требований), $N(t)$ имеет смысл их количества до некоторого момента времени t, а коэффициент

c равен (постоянной) интенсивности страховых премий. Пусть u – начальный капитал страховой компании. Тогда величина $u + R(t)$ равна резерву страховой компании в момент времени t.

Нагрузкой (коэффициентом) безопасности называется величина

$$\rho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1.$$

Вероятностью разорения страховой компании с начальным капиталом u называется величина

$$\psi(u) = \mathsf{P}(u + R(t) < 0 \text{ для некоторого } t > 0) = \mathsf{P}\left(\inf_{t>0} R(t) < -u\right).$$

Всюду в дальнейшем будем считать, что $\rho > 0$. С практической точки зрения, разумно предполагать, что нагрузка безопасности должна быть небольшой, ведь услуги, предлагаемые страховой компанией должны быть привлекательны для ее клиентов. Таким образом, мы естественно приходим к задаче об описании поведения вероятности разорения $\psi(u)$ при малой нагрузке безопасности, то есть при $\rho \to 0$.

Теорема 8.2.1. *Предположим, что* $\mathsf{E}X_1^2 < \infty$. *Тогда при* $\rho \to 0$ *имеет место соотношение*

$$\sup_{u>0}\left|\psi(u) - \frac{1}{1+\rho}\exp\left\{-\frac{2\rho\mu u}{(1+\rho)\mathsf{E}X_1^2}\right\}\right| = o(1).$$

Доказательство этого результата основано на теореме Реньи. Напомним формулировку этой теоремы. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – одинаково распределенные неотрицательные случайные величины, N – случайная величина с геометрическим распределением с параметром $1 - \epsilon$ $(0 < \epsilon < 1)$:

$$\mathsf{P}(N = k) = \epsilon(1 - \epsilon)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Предположим, что N и $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы при каждом $\epsilon \in (0, 1)$. Положим

$$S_\epsilon = \xi_1 + \ldots + \xi_N.$$

Обозначим $\alpha = \mathsf{E}\xi_1$. Легко убедиться, что

$$\mathsf{E}S_\epsilon = \alpha\epsilon^{-1}.$$

Пусть

$$F_\epsilon(x) = \mathsf{P}\left(\epsilon\alpha^{-1}S_\epsilon < x\right).$$

Теорема 8.2.2. *В приведенных выше условиях на случайные величины N и $\{\xi_j\}_{j\geq 1}$, при $\epsilon \to 0$*

$$\sup_{x\geq 0}\Big|F_\epsilon(x) - 1 + e^{-x}\Big| = o(1).$$

Данное утверждение является непосредственным следствием Леммы 1.4.1 и сходимости функции распределения случайной величины N, нормированной своим математическим ожиданием, к стандартной показательной функции распределения

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

Согласно формуле Поллачека–Хинчина–Беекмана,

$$\psi(u) = \mathsf{P}(Y_1 + \ldots + Y_{M_\rho} > u),$$

где $Y_1, Y_2, \ldots$ – независимые случайные величины с одной и той же плотностью

$$\frac{1}{\mu}[1 - F(x)]\mathbf{1}(x \geq 0),$$

а M_ρ – независимая от $Y_1, Y_2, \ldots$ случайная величина с геометрическим распределением:

$$\mathsf{P}(M_\rho = n) = \frac{\rho}{(1+\rho)^{n+1}}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Пусть N_ρ – независимая от $Y_1, Y_2, \ldots$ случайная величина с геометрическим распределением

$$\mathsf{P}(N_\rho = n) = \frac{\rho}{(1+\rho)^{n}}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Несложно видеть, что $\mathsf{E}N_\rho = \frac{\rho+1}{\rho}$ и

$$(1+\rho)\psi(u) = \mathsf{P}(Y_1 + \ldots + Y_{N_\rho} > u). \tag{8.2.1}$$

Применив к функции распределения, стоящей в правой части (8.2.1), Теорему 8.2.2 с $\epsilon = \frac{\rho}{\rho+1}$, получим

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{u\geq 0}\left|(1+\rho)\psi(u) - \exp\left\{-\frac{\rho u}{(1+\rho)\mathsf{E}Y_1}\right\}\right| = 0. \tag{8.2.2}$$

С учетом того, что

$$\mathsf{E}Y_1 = \frac{\mathsf{E}X_1^2}{2\mu},$$

(см., например, (Севастьянов, Чистяков и Зубков, 1989), с. 86, задача 3.137) соотношение (8.2.2) доказывает Теорему 8.2.1. □

Из Теоремы 8.2.1 мы получаем следующую формулу для приближенного вычисления вероятности разорения в классическом процессе риска при малой нагрузке безопасности:

$$\psi(u) \approx \frac{1}{1+\rho} \exp\left\{-\frac{2\rho\mu u}{(1+\rho)\mathsf{E}X_1^2}\right\}.$$

В книге (Kalashnikov, 1997) с использованием иного математического аппарата аналогичная задача рассмотрена в более общей ситуации, когда с изменением ρ может изменяться и распределение страховых тебований $X_1, X_2, \ldots$ Более того, в (Kalashnikov, 1997) показано, что, если $\mathsf{E}X_1^3 < \infty$, то

$$\left|\psi(u) - \frac{1}{1+\rho} \exp\left\{-\frac{2\rho\mu u}{(1+\rho)\mathsf{E}X_1^2}\right\}\right| \le \frac{4\mu\mathsf{E}X_1^3\rho}{3(\mathsf{E}X_1^2)^2(1+\rho)}. \tag{8.2.3}$$

Используя неравенства (8.2.3) мы довольно легко можем выписать двусторонние оценки для значения начального капитала $u_\gamma(\rho)$, обеспечивающего заданный риск γ. Более точно, определим $u_\gamma(\rho)$ как решение уравнения

$$\psi(u) = \gamma, \tag{8.2.4}$$

где $\gamma \in (0, 1)$. Тогда, обозначив

$$\delta(\rho) = \frac{4\mu\mathsf{E}X_1^3\rho}{3(\mathsf{E}X_1^2)^2(1+\rho)},$$

из (8.2.3) мы получим

$$\frac{(1+\rho)\mathsf{E}X_1^2}{2\rho\mu} \log \frac{1}{(1+\rho)(\gamma+\delta(\rho))} \le u_\gamma(\rho) \le$$

$$\le \frac{(1+\rho)\mathsf{E}X_1^2}{2\rho\mu} \log \frac{1}{(1+\rho)(\gamma-\delta(\rho))}.$$

8.3 Асимптотические разложения для вероятности разорения при малой нагрузке безопасности

В этом разделе будет получено асимптотическое разложение для вероятности разорения $\psi(u)$ в классическом процессе риска $R(t)$ при $\rho \to 0$.

Тем самым, мы уточним соответствующие формулы, приведенные в предыдущем разделе.

Теорема 8.3.1. *Предположим, что* $\mathsf{E}X_1^3 < \infty$. *Тогда для любого* $u > 0$ *при* $\rho \to 0$ *имеет место соотношение*

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} \exp\left\{-\frac{2\rho\mu u}{(1+\rho)\mathsf{E}X_1^2}\right\} \times$$

$$\times \left[1 + \left(\frac{2\mu\mathsf{E}X_1^3}{3(\mathsf{E}X_1^2)^2} - 1\right)\left(\frac{2\rho\mu u}{(1+\rho)\mathsf{E}X_1^2} - 1\right)\frac{\rho}{1+\rho}\right] + o(\rho).$$

Для того чтобы доказать этот результат, нам понадобится следующая общая теорема об асимптотических разложениях в теореме Реньи, доказанная в диссертации (Эль Сайед Хассан Салех Нушед, 1993) и (по-видимому, независимо) в работе (Наконечный, 1997).

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – одинаково распределенные неотрицательные случайные величины, N – случайная величина с геометрическим распределением,

$$\mathsf{P}(N = n) = \epsilon(1-\epsilon)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Предположим, что N и $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы при каждом $\epsilon \in (0,1)$. Положим

$$S_\epsilon = \xi_1 + \ldots + \xi_N.$$

Обозначим

$$\alpha_j = \mathsf{E}\xi_1^j, \quad L_2 = \alpha_2(\alpha_1)^{-2}, \quad F_\epsilon(x) = \mathsf{P}\left(\epsilon\alpha_1^{-1}S_\epsilon < x\right).$$

Теорема 8.3.2. *Пусть распределение случайной величины* ξ_1 *нерешетчатое и* $\alpha_2 < \infty$. *Тогда при* $\epsilon \to 0$

$$F_\epsilon(x) = 1 - e^{-x} + (L_2/2 - 1)(1-x)e^{-x}\epsilon + o(\epsilon) \qquad (8.3.1)$$

Доказательству Теоремы 8.3.2 предпошлем несколько лемм.

Лемма 8.3.1. *Пусть* $F(x)$ *– функция распределения, а* $G(x)$ *– функция ограниченной вариации,* $F(-\infty) = G(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = G(+\infty) = 1$. *Пусть* $f(t)$ *и* $g(t)$ *– преобразования Фурье–Стильтьеса функций* $F(x)$ *и* $G(x)$ *соответственно. Существуют абсолютные положительные постоянные* C_1 *и* C_2 *такие, что для любого* $T > 0$

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \le C_1 \int_0^T \left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right| dt + C_2 Q_G(1/T),$$

где

$$Q_G(z) = \sup_x \mathbf{V}_G(x, x+z)$$

и $\mathbf{V}_G(x, x+z)$ *– вариация функции* G *в интервале* $(x, x+z)$.

Доказательство см. в работе (Файнлейб, 1968).

Лемма 8.3.2. *Пусть* $F(x)$ *– функция распределения,* $F(0) = 0$, *а* $G(x)$ *– неотрицательная функция ограниченной вариации,* $G(x) = G(-0) = 0$ *для* $x < 0$ *и* $G(x) \le G(+\infty) = 1$ *для* $x \ge 0$. *Пусть* $f(t)$ *и* $g(t)$ *– преобразования Фурье–Стильтьеса функций* $F(x)$ *и* $G(x)$ *соответственно,*

$$a = \int_0^\infty z dF(z) < \infty, \quad b = \int_0^\infty z|dG(z)| < \infty.$$

Существуют абсолютные положительные постоянные C_3, C_4 *и* C_5 *такие, что для любых* $T > 0$ *и* $x \ge 0$

$$x|F(x) - G(x)| \le C_3 \int_0^T \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{f(t) - g(t)}{t} \right) \right| dt + \frac{C_4}{T} + C_5 Q_G^*(1/T),$$

где

$$Q_G^*(z) = \sup_x \int_x^{x+z} v|dG(v)|.$$

Доказательство (см. (Азларов, 1972)). Интегрируя по частям, легко убедиться, что

$$\int_0^x z dG(z) = -x(1 - G(x)) + \int_0^x (1 - G(z))dz,$$

$$\int_0^x z dF(z) = -x(1 - F(x)) + \int_0^x (1 - F(z))dz.$$

Поэтому

$$x[F(x) - G(x)] =$$
$$= \int_0^x z dF(z) + \int_0^x (1 - G(z))dz - \left[\int_0^x z dG(z) + \int_0^x (1 - F(z))dz \right] \equiv$$
$$\equiv V_1(x) - V_2(x).$$

Очевидно, что $V_1(0) = V_2(0) = 0$, $V_1(\infty) = V_2(\infty) = a + b$, где

$$b = \int_0^\infty z dG(z) = \int_0^\infty (1 - G(z))dz.$$

Положим

$$\overline{V}_j(x) = \frac{1}{a+b} V_j(x), \quad j = 1, 2.$$

Легко видеть, что $\overline{V}_1(x)$ – функция распределения, а $\overline{V}_2(x)$ – функция ограниченной вариации. Обозначим преобразования Фурье–Стильтьеса функций $\overline{V}_1(x)$ и $\overline{V}_2(x)$ соответственно через $\overline{v}_1(t)$ и $\overline{v}_2(t)$. Имеем

$$(a+b)\overline{v}_1(t) = \frac{f'(t)}{i} + \frac{g(t)-1}{it}, \qquad (a+b)\overline{v}_2(t) = \frac{g'(t)}{i} + \frac{f(t)-1}{it}.$$

Следовательно,

$$(a+b)\left|\frac{\overline{v}_1(t) - \overline{v}_2(t)}{t}\right| = \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)-g(t)}{t}\right)\right|. \tag{8.3.2}$$

С учетом определения функций $\overline{V}_1(x)$ и $\overline{V}_2(x)$ мы имеем

$$Q_{\overline{V}_2}(z) = \frac{Q_{V_2}(z)}{a+b} \le \frac{1}{a+b}\left[z + \sup_x \int_x^{x+z} v|dG(v)|\right]. \tag{8.3.3}$$

Теперь требуемое утверждение следует из леммы 8.3.1 с учетом соотношений (8.3.2) и (8.3.3). Лемма доказана. □

Всюду в дальнейшем характеристические функции случайных величин ξ_1 и S_ϵ будут обозначаться $f(t)$ и $\Psi_\epsilon(t)$ соответственно. При этом

$$\Psi_\epsilon(t) = \frac{\epsilon f(t)}{1-(1-\epsilon)f(t)}.$$

Лемма 8.3.3. *Если случайная величина ξ_1 имеет нерешетчатое распределение, то для любых чисел $\gamma > 0$ и $\beta > 0$ существует функция $l(\epsilon)$ такая, что $l(\epsilon) \to \infty$ при $\epsilon \to 0$ и для всех $t \in [\gamma, l(\epsilon)]$*

$$|\Psi_\epsilon(t)| = O(\epsilon^{1-\beta}).$$

Доказательство. Если распределение случайной величины ξ_1 удовлетворяет условию Краме́ра (C)

$$\limsup_{|t|\to\infty} |f(t)| < 1,$$

то, как известно, для любого $\gamma > 0$ найдется $\tau = \tau(\gamma) < 1$ такое, что $|f(t)| \le \tau(\gamma) < 1$ при $|t| > \gamma$. В этом случае, положив $l(\epsilon) = 1/\epsilon$, при всех $t \in [\gamma, l(\epsilon)]$ мы будем иметь

$$|\Psi_\epsilon(t)| \le \frac{\epsilon}{1-(1-\epsilon)|f(t)|} \le \frac{\epsilon}{1-|f(t)|} \le \frac{\epsilon}{1-\tau}. \tag{8.3.4}$$

Пусть теперь
$$\limsup_{|t|\to\infty}|f(t)|=1.$$
Поскольку распределение случайной величины ξ_1 не является решетчатым, ни при каком $t_0\neq 0$ не может выполняться равенство $|f(t_0)|=1$. Поэтому функция

$$\omega(z)=\min\{1-|f(t)|:\ \gamma\le t\le z\}$$

ни при каком z не обращается в нуль. Очевидно, что функция $\omega(z)$ непрерывна, не возрастает и

$$\lim_{z\to\infty}\omega(z)=0.$$

Положим

$$l(\epsilon)=\begin{cases}\frac{1}{\epsilon}, & \text{если } \omega\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\ge\epsilon^{\beta};\\ \max\{z:\ \omega(z)\ge\epsilon^{\beta}\}, & \text{если } \omega\left(\frac{1}{\epsilon}\right)<\epsilon^{\beta}.\end{cases}$$

Тогда, очевидно, $\omega(l(\epsilon))\ge\epsilon^{\beta}$, и потому при всех $t\in[\gamma,l(\epsilon)]$ выполнено соотношение
$$|\Psi_\epsilon(t)|\le\frac{\epsilon}{1-|f(t)|}\le\frac{\epsilon}{\omega(l(\epsilon))},$$
то есть $|\Psi_\epsilon(t)|=O(\epsilon^{1-\beta})$, что вместе с соотношением (8.3.4) доказывает Лемму. □

Доказательство Теоремы 8.3.2. В Лемме 8.3.2 положим $F(x)=F_\epsilon(x)$,

$$G(x)=G_\epsilon(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ 1-e^{-x}+\epsilon(L_2/2-1)(1-x)e^{-x}, & \text{если } x>0.\end{cases}$$

Несложно видеть, что преобразование Фурье–Стильтьеса $f_\epsilon(t)$ функции $F_\epsilon(x)$ равно

$$f_\epsilon(t)=\Psi_\epsilon\left(\frac{t\epsilon}{\alpha_1}\right)=\frac{\epsilon f(\frac{t\epsilon}{\alpha_1})}{1-(1-\epsilon)f(\frac{t\epsilon}{\alpha_1})},$$

а преобразование Фурье–Стильтьеса $g_\epsilon(x)$ функции $G_\epsilon(x)$ имеет вид

$$g_\epsilon(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dG_\epsilon(x)=\int_0^{\infty}e^{itx}d(1-e^{-x})+\epsilon(L_2/2-1)\int_0^{\infty}e^{itx}d((1-x)e^{-x})=$$

$$=\frac{1}{1-it}+\epsilon(L_2/2-1)\frac{(it)^2}{(1-it)^2}.$$

Функции $F_\epsilon(x)$ и $G_\epsilon(x)$ удовлетворяют всем условиям Леммы 2. Положим $T = T(\epsilon) = l(\epsilon)/\epsilon$, где $l(\epsilon)$ – функция, существование которой устанавливает Лемма 8.3.3. Заметим, что существует конечное положительное число C такое, что

$$Q^*_{G_\epsilon}(z) \le Cz(1+\epsilon|L_2/2-1|), \quad z>0.$$

Следовательно,

$$Q^*_{G_\epsilon}\left(\frac{1}{T}\right) = o(\epsilon)$$

при $\epsilon \to 0$.

Таким образом, требуемое утверждение будет доказано, если мы убедимся, что

$$I = \int\limits_0^T \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{f_\epsilon(t)-g_\epsilon(t)}{t}\right)\right| dt = o(\epsilon) \qquad (8.3.5)$$

при $\epsilon \to 0$. Положим $T_1 = T_1(\epsilon) = \frac{\alpha_1^2}{12\alpha_2\epsilon}$,

$$I_1 = \int\limits_0^{T_1} \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{f_\epsilon(t)-g_\epsilon(t)}{t}\right)\right| dt, \qquad I_2 = \int\limits_{T_1}^{T_2} \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{f_\epsilon(t)-g_\epsilon(t)}{t}\right)\right| dt.$$

Очевидно, что $I = I_1 + I_2$. Оценим интеграл I_1. Имеем

$$I_1 \le \int\limits_0^{T_1} \left|\frac{f_\epsilon(t)-g_\epsilon(t)}{t^2}\right| dt + \int\limits_0^{T_1} \left|\frac{d}{dt}\left(f_\epsilon(t)-g_\epsilon(t)\right)\right| \frac{dt}{t} dt.$$

При $|t| \le T_1$ справедливо разложение

$$f\left(\frac{t\epsilon}{\alpha_1}\right) = 1 + it\epsilon - L_2\frac{(t\epsilon)^2}{2} + \eta_1(\epsilon)(t\epsilon)^2.$$

Элементарными вычислениями мы получаем

$$|f_\epsilon(t)-g_\epsilon(t)| \le \frac{\epsilon t^2\left[\eta_1(\epsilon) + |t|\eta_1(\epsilon) + \epsilon t^2 + \epsilon|t|\right]}{(1+t^2)\left|1 - it + \epsilon\left(it + \frac{t^2L_2}{2}\right) + \epsilon t^2\eta_1(\epsilon)\right|} \le$$

$$\le \frac{\epsilon t^2\left[\eta_1(\epsilon) + C_1^*\epsilon|t|\right]}{1+t^2}, \qquad (8.3.6)$$

где $0 < C_1^* < \infty$ и $\eta_1(\epsilon) \to 0$ при $\epsilon \to 0$. Легко убедиться, что

$$\frac{df_\epsilon(t)}{dt} = \frac{\epsilon^2}{\alpha_1} \cdot \frac{f'(z)|_{z=\frac{t\epsilon}{\alpha_1}}}{\left[1-(1-\epsilon)f\left(\frac{t\epsilon}{\alpha_1}\right)\right]^2}$$

и
$$\frac{dg_\epsilon(t)}{dt}=\frac{i}{(1-it)^2}-\frac{2\epsilon t(L_2/2-1)}{(1-it)^3}.$$
Элементарными вычислениями мы получаем, что при $|t|\le T_1$ справедливы неравенства
$$\left|\frac{d}{dt}[f_\epsilon(t)-g_\epsilon(t)]\right|\le\frac{\epsilon|t|\eta_2(\epsilon)}{1+t^2}+\frac{\epsilon^2|t|^3}{1+|t|^3}+\frac{\epsilon^2t^4}{1+t^4}+\frac{\epsilon t^2\eta_2(\epsilon)}{1+|t|^3}\le$$
$$\le\frac{\epsilon|t|[\eta_2(\epsilon)+C_2^*\epsilon|t|]}{1+t^2},\tag{8.3.7}$$
где $0<C_2^*<\infty$ и $\eta_2(\epsilon)\to0$ при $\epsilon\to0$. Из (8.3.6) и (8.3.7) вытекает, что
$$I_1\le C_3^*\epsilon[\eta_1(\epsilon)+\eta_2(\epsilon)]-C_4^*\epsilon^2\log\epsilon,$$
где $0<C_3^*<\infty$ и $0<C_4^*<\infty$, то есть
$$I_1=o(\epsilon).\tag{8.3.8}$$

Теперь оценим I_2. Имеем
$$I_2\le\int\limits_{T_1}^{T_2}\left|\frac{d}{dt}[f_\epsilon(t)-g_\epsilon(t)]\right|\frac{dt}{t}+\int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{|f_\epsilon(t)-g_\epsilon(t)|}{t^2}dt\le$$
$$\le\int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{|f_\epsilon(t)|}{t^2}dt+\int\limits_{T_1}^{T_2}\left|\frac{df_\epsilon(t)}{dt}\right|\frac{dt}{t}+\int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{|g_\epsilon(t)|}{t^2}dt+\int\limits_{T_1}^{T_2}\left|\frac{dg_\epsilon(t)}{dt}\right|\frac{dt}{t}\equiv$$
$$\equiv I_{21}+I_{22}+I_{23}+I_{24}.\tag{8.3.9}$$
Воспользовавшись Леммой 8.3.3 с $\gamma_1=\frac{\alpha_1}{12\alpha_2}$ и $\gamma_2=\frac{1}{\alpha_2}$, будем иметь
$$I_{21}=\frac{\epsilon}{\alpha_1}\int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2l(\epsilon)}\frac{|f_\epsilon(z)|}{z^2}dz=O(\epsilon^{2-\beta})=o(\epsilon).\tag{8.3.10}$$

Оценим I_{22}. Имеем
$$I_{22}=\epsilon\gamma_2\int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2l(\epsilon)}\frac{|f'(z)|}{z\,|1-(1-\epsilon)f(z)|^2}dz\le\epsilon^2\int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2l(\epsilon)}\frac{dz}{z|1-(1-\epsilon)f(z)|^2}.$$

Но так как
$$\frac{\epsilon}{1-(1-\epsilon)f(z)}=\sum_{k=0}^{\infty}\epsilon(1-\epsilon)^k(f(z))^k=\epsilon+(1-\epsilon)\Psi_\epsilon(z),\tag{8.3.11}$$

то мы получаем

$$\left[\frac{\epsilon}{1-(1-\epsilon)f(z)}\right]^2 = \epsilon^2 + 2(1-\epsilon)\Psi_\epsilon(z) + (1-\epsilon)^2(\Psi_\epsilon(z))^2.$$

Снова применив Лемму 8.3.3, получим

$$I_{22} = \epsilon\gamma_2 \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2 l(\epsilon)} \left[\epsilon^2 + \epsilon|\Psi_\epsilon(z)| + |\Psi_\epsilon(z)|^2\right] \frac{dz}{z} =$$

$$= \Big((\epsilon^2 + O(\epsilon^{2-\beta}) + O(\epsilon^{2-2\beta})\Big)\log(\gamma_2 l(\epsilon)),$$

откуда вытекает, что

$$I_{22} = o(\epsilon). \tag{8.3.12}$$

С помощью прямых вычислений мы убеждаемся, что

$$I_{23} \le \int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{dt}{t^3} + \epsilon(L_2/2-1)\int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{dt}{t^2} = O(\epsilon^2) = o(\epsilon) \tag{8.3.13}$$

и

$$I_{24} \le \int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{dt}{t^3} + 2\epsilon(L_2/2-1)\int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{dt}{t^2} = O(\epsilon^2) = o(\epsilon). \tag{8.3.14}$$

Объединяя (8.3.10), (8.3.12), (8.3.13) и (8.3.14), из (8.3.9) мы получаем, что $I_2 = o(\epsilon)$, а это вместе с (8.3.8) доказывает, что $I = o(\epsilon)$. Теорема доказана. □

Доказательство Теоремы 8.3.1. Воспользуемся формулой Поллачека–Хинчина–Бекмана для вероятности разорения в классическом процессе риска:

$$\psi(u) = \mathsf{P}(Y_1 + \ldots + Y_M > u) = 1 - \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H^{*n}(u)}{(1+\rho)^n},$$

где $u > 0$ – начальный капитал страховой компании, $Y_1, Y_2, \ldots$ – независимые случайные величины с общей для всех них плотностью

$$h(x) = \frac{1}{\mu}[1 - F(x)], \quad x > 0,$$

$H(x)$ – функция распределения, соответствующая плотности $h(x)$, M – случайная величина, независимая от $Y_1, Y_2, \ldots$ и имеющая геометрическое распределение с параметром $1 - \epsilon = \frac{\rho}{1+\rho}$:

$$\mathsf{P}(M = n) = \epsilon(1-\epsilon)^n = \frac{\rho}{(1+\rho)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Теперь воспользуемся Теоремой 8.3.1. Пусть N – случайная величина с геометрическим распределением, фигурирующая в этой Теореме:

$$\mathsf{P}(N = n) = \epsilon(1-\epsilon)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Очевидно, что

$$\mathsf{P}(M = n) = (1-\epsilon)\mathsf{P}(N = n), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8.3.15}$$

Предположим, что, как и M, случайная величина N независима от последовательности $Y_1, Y_2, \ldots$ (Формально мы считаем, что все рассматриваемые случайные величины с присущими им свойствами определены на одном вероятностном пространстве. Но так как фактически мы имеем дело не со случайными величинами, а с их распределениями, то это предположение ни в коей мере не ограничивает общности. На наш взгляд, изложение в терминах случайных величин иногда более наглядно, нежели в терминах распределений.) Поскольку случайная величина Y_1 абсолютно непрерывна, ее распределение не является решетчатым. Поэтому согласно Теореме 8.3.1 с учетом (8.3.15) мы имеем

$$\psi(u) = \mathsf{P}(Y_1 + \ldots + Y_M > u) = (1-\epsilon)\mathsf{P}(Y_1 + \ldots + Y_N > u) =$$

$$= (1-\epsilon)e^{-\epsilon u/\mathsf{E}Y_1}\left[1 + \left(\frac{\mathsf{E}Y_1^2}{2(\mathsf{E}Y_1)^2} - 1\right)\left(\frac{\epsilon u}{\mathsf{E}Y_1} - 1\right)\epsilon\right] + o(\epsilon). \tag{8.3.16}$$

Несложно убедиться, что

$$\mathsf{E}Y_1 = \int_0^\infty \frac{x}{\mu}[1-F(x)]dx = \frac{\mathsf{E}X_1^2}{2\mu}, \qquad \mathsf{E}Y_1^2 = \int_0^\infty \frac{x^2}{\mu}[1-F(x)]dx = \frac{\mathsf{E}X_1^3}{3\mu},$$

см., например, (Севастьянов, Чистяков и Зубков, 1989), задача 3.137, с. 86. Подставляя в (8.3.16) эти выражения, с учетом того, что $o(\epsilon) = o(\rho)$, поскольку $\epsilon = \frac{\rho}{1+\rho}$, получим требуемое. Теорема доказана. □

Теорема 8.3.1 позволяет использовать приближенное соотношение

$$\psi(u) \approx \frac{1}{1+\rho}\exp\left\{-\frac{2\rho\mu u}{(1+\rho)\mathsf{E}X_1^2}\right\} \times$$

$$\times\left[1 + \left(\frac{2\mu\mathsf{E}X_1^3}{3(\mathsf{E}X_1^2)^2} - 1\right)\left(\frac{2\rho\mu u}{(1+\rho)\mathsf{E}X_1^2} - 1\right)\frac{\rho}{1+\rho}\right] \tag{8.3.16}$$

для вычисления вероятности разорения при малой нагрузке безопасности ρ. При этом погрешность в (8.3.16) является величиной порядка $o(\rho)$.

Теорема 8.3.1 (или соотношение (8.3.16)) также может быть использовано для получения статистических оценок вероятности разорения по предыстории развития процесса риска до некоторого момента t. Действительно, помимо параметров u (начальный капитал) и c (ставка страховой премии), которые должны быть известны страховщику по само́й своей сути, правая часть (8.3.16) зависит, как легко видеть, только от моментов случайных величин $N(t)$ и X_1. Поэтому статистический вариант соотношения (8.3.16), определяющий статистическую оценку $\widetilde{\psi}_t(u)$ вероятности разорения, легко получить, заменив в (8.3.16) теоретические моменты их эмпирическими аналогами. Заметим, что наиболее правдоподобной оценкой параметра λ является величина $\hat{\lambda} = t^{-1}N(t)$, и обозначим

$$m_k(t) = \frac{1}{N(t)}\sum_{j=1}^{N(t)} X_j^k, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$\widetilde{\rho}(t) = \frac{ct}{N(t)m_1(t)} - 1.$$

Тогда описанная выше замена теоретических моментов в (8.3.16) на их эмпирические аналоги приводит к оценке

$$\widetilde{\Psi}_t(u) = \frac{1}{1+\widetilde{\rho}(t)} \exp\left\{-\frac{2\widetilde{\rho}(t)m_1(t)u}{(1+\widetilde{\rho}(t))m_2(t)}\right\} \times$$

$$\times \left[1 + \left(\frac{2m_1(t)m_3(t)}{3m_2^2(t)} - 1\right)\left(\frac{2\widetilde{\rho}(t)m_1(t)u}{(1+\widetilde{\rho}(t))m_2(t)} - 1\right)\frac{\widetilde{\rho}(t)}{1+\widetilde{\rho}(t)}\right]. \qquad (8.3.17)$$

Естественно, что эта оценка имеет практический смысл лишь в том случае, когда значение $\widetilde{\rho}(t)$ положительно и невелико. Строго говоря, оценка (8.3.17) с формальной точки зрения не является “честной"в том смысле, что правая часть (8.3.17) представляет собой статистическую оценку не само́й вероятности разорения, а аппроксимирующего ее выражения, которое может быть близким к оцениваемой характеристике, но совсем не обязано с ней совпадать. Однако, забегая вперед, отметим, что в отличие от “честной"непараметрической оценки вероятности разорения, о которой пойдет речь в главе 11, “нечестная"оценка (8.3.17) совсем просто вычисляется и вполне может быть пригодна для грубых практических прикидок.

Обозначив $\mu_j = \mathsf{E}X_1^j$, $j \geq 1$, $(\mu_1 = \mu)$, из Теоремы 8.3.1 для вероятности разорения мы легко получаем асимптотическое разложение вида

$$\psi(u) = \exp\left\{-\frac{2\tau\mu_1 u}{\mu_2}\right\}\left(1 - \frac{2\tau\mu_1\mu_3}{3\mu_2^2}\right) + o(\tau), \qquad (8.3.18)$$

где $\tau \equiv \rho/(1+\rho) \to 0$. Приведем рассуждения, с помощью которых можно продолжить (8.3.18), выписав следующие члены разложения.

Легко видеть, что для натуральных k

$$\int\limits_0^\infty e^{itx}x^k e^{-x}dx = \frac{1}{(1-it)^{k+1}}.$$

Следовательно, по формуле обращения преобразования Фурье мы имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{(1-it)^{k+1}}dt = x^k e^{-x}.$$

Дифференцируя последнее соотношение по x, мы получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\frac{(-it)^l}{(1-it)^{k+1}}dt = (x^k e^{-x})^{(l)}.$$

Пусть снова $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – одинаково распределенные неотрицательные случайные величины, N – случайная величина с геометрическим распределением,

$$\mathsf{P}(N = k) = \epsilon(1-\epsilon)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Предположим, что N и $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы при каждом $\epsilon \in (0,1)$. Снова рассмотрим геометрическую случайную сумму

$$S_\epsilon = \xi_1 + \ldots + \xi_N.$$

Пусть, как и прежде, $\alpha_j = \mathsf{E}\xi_1^j$. Обозначим $f(t) = \mathsf{E}e^{it\xi_1}$, $f_\epsilon(t) = \mathsf{E}\exp\{it\epsilon\alpha_1^{-1}S_\epsilon\}$. Как мы уже убедились,

$$f_\epsilon(t) = \frac{\epsilon f(\frac{\epsilon t}{\alpha_1})}{1-(1-\epsilon)f(\frac{\epsilon t}{\alpha_1})}.$$

При малых t

$$f(t) \approx 1 + it\alpha_1 + \frac{(it)^2\alpha_2}{2} + \frac{(it)^3\alpha_3}{6}.$$

Поэтому

$$f_\epsilon(t) \approx \frac{\epsilon\left(1 + it\epsilon + \frac{(it)^2\epsilon^2\alpha_2}{2\alpha_1^2}\right)}{1-(1-\epsilon)\left(1 + it\epsilon + \frac{(it)^2\epsilon^2\alpha_2}{2\alpha_1^2} + \frac{(it)^3\epsilon^3\alpha_3}{6\alpha_1^3}\right)} =$$

$$= \frac{1 + it\epsilon + \frac{(it)^2\epsilon^2\alpha_2}{2\alpha_1^2}}{1 - it + \epsilon\left(it - \frac{(it)^2\alpha_2}{2\alpha_1^2}\right) + \epsilon^2\left(\frac{(it)^2\alpha_2}{2\alpha_1^2} - \frac{(it)^3\alpha_3}{6\alpha_1^3}\right)} =$$

$$= \left(1 + it\epsilon + \frac{(it)^2\epsilon^2\alpha_2}{2\alpha_1^2}\right)\frac{1}{1-it}\cdot\frac{1}{1 + \frac{\epsilon\left(it - \frac{(it)^2\alpha_2}{2\alpha_1^2}\right)}{1-it} + \frac{\epsilon^2\left(\frac{(it)^2\alpha_2}{2\alpha_1^2} - \frac{(it)^3\alpha_3}{6\alpha_1^3}\right)}{1-it}} \approx$$

$$\approx \frac{1 + it\epsilon + \frac{(it)^2\epsilon^2\alpha_2}{2\alpha_1^2}}{1-it}\left[1 - \frac{\epsilon\left(it - \frac{(it)^2\alpha_2}{2\alpha_1^2}\right)}{1-it} + \frac{\epsilon^2\left(\frac{(it)^2\alpha_2}{2\alpha_1^2} - \frac{(it)^3\alpha_3}{6\alpha_1^3}\right)}{1-it} + \right.$$

$$\left. + \frac{\epsilon^2\left(it - \frac{(it)^2\alpha_2}{2\alpha_1^2}\right)^2}{(1-it)^2}\right] \approx \frac{1}{1-it} + \frac{\epsilon}{1-it}\left[it - \frac{it - \frac{(it)^2\alpha_2}{2\alpha_1^2}}{1-it}\right] +$$

$$+ \frac{\epsilon^2}{1-it}\left[\frac{(it)^2\alpha_2}{2\alpha_1^2} - \frac{it\left(it - \frac{(it)^2\alpha_2}{2\alpha_1^2}\right)}{1-it} + \frac{\left(it - \frac{(it)^2\alpha_2}{2\alpha_1^2}\right)^2}{(1-it)^2} + \frac{\frac{(it)^3\alpha_3}{6\alpha_1^3} - \frac{(it)^2\alpha_2}{2\alpha_1^2}}{1-it}\right].$$

С помощью элементарных алгебраических преобразований отсюда мы получаем

$$f_\epsilon(t) \approx \frac{1}{1-it} + \epsilon\frac{(it)^2}{(1-it)^2}\left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_1^2} - 1\right) +$$

$$+ \epsilon^2\frac{(it)^3}{(1-it)^3}\left(1 + \frac{\alpha_3}{6\alpha_1^3}(1-it) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} + (it)\frac{\alpha_2^2}{4\alpha_1^4}\right).$$

Обращая это разложение для преобразования Фурье (то есть для характеристической функции), аппроксимирующее характеристическую функцию нормированной геометрической суммы, получаем “плотность"

$$g_\epsilon(x) \equiv e^{-x} + \epsilon\left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_1^2} - 1\right)(xe^{-x})^{(2)} +$$

$$+ \epsilon^2\left[\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} - 1\right)(x^2e^{-x})^{(3)} - \frac{\alpha_3}{6\alpha_1^3}(xe^{-x})^{(3)} + \frac{\alpha_2^2}{4\alpha_1^4}(x^2e^{-x})^{(4)}\right],$$

аппроксимирующую производную функции распределения нормированной геометрической суммы. Наконец, интегрируя “плотность" $g_\epsilon(x)$, получаем аппроксимацию для функции распределения нормированной геометрической суммы

$$\int_0^x g_\epsilon(u)du = 1 - e^{-x} + \epsilon\left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_1^2} - 1\right)(xe^{-x})^{(1)} +$$

$$+\epsilon^2\left[\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}-1\right)(x^2e^{-x})^{(2)}-\frac{\alpha_3}{6\alpha_1^3}(xe^{-x})^{(2)}+\frac{\alpha_2^2}{4\alpha_1^4}(x^2e^{-x})^{(3)}\right].$$

Таким образом, мы фактически получили асимптотическое разложение для функции распределения геометрической случайной суммы $F_\epsilon(x) = \mathsf{P}\left(\epsilon\alpha_1^{-1}S_\epsilon < x\right)$:

$$F_\epsilon(x)\approx 1-e^{-x}+\epsilon\left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_1^2}-1\right)e^{-x}(1-x)+$$

$$+\epsilon^2\left[\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}-1\right)e^{-x}(x^2-4x+2)-\frac{\alpha_3}{6\alpha_1^3}e^{-x}(x-2)+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_2^2}{4\alpha_1^4}e^{-x}(6x-x^2-6)\right]. \tag{8.3.19}$$

Теперь, рассуждая точно так же, как при доказательстве Теоремы 8.3.1, с учетом (8.3.19) мы получаем

$$\psi(u)=\mathsf{P}(Y_1+\ldots+Y_M>u)=(1-\epsilon)\mathsf{P}(Y_1+\ldots+Y_N>u)\approx$$

$$\approx(1-\epsilon)\exp\left\{-\frac{u\epsilon}{\nu_1}\right\}\left\{1+\epsilon\left(\frac{\nu_2}{2\nu_1^2}-1\right)\left(\frac{u\epsilon}{\nu_1}-1\right)+\right.$$

$$+\epsilon^2\left[\left(\frac{\nu_2}{\nu_1^2}-1\right)\left(\frac{4u\epsilon}{\nu_1}-1-\frac{u^2\epsilon^2}{\nu_1^2}\right)+\frac{\nu_3}{6\nu_1^3}\left(\frac{u\epsilon}{\nu_1}-2\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\nu_2^2}{4\nu_1^4}\left(\frac{u^2\epsilon^2}{\nu_1^2}+6-\frac{6u\epsilon}{\nu_1}\right)\right]\right\},$$

где

$$\nu_j=\mathsf{E}Y_1^j=\frac{\mu_{j+1}}{(j+1)\mu_1},\quad \epsilon=\frac{\rho}{1+\rho}.$$

Группируя в последней формуле члены по степеням ϵ, получаем

$$\psi(u)\approx(1-\epsilon)\exp\left\{-\frac{u\epsilon}{\nu_1}\right\}\left\{1+\epsilon\left(1-\frac{\nu_2}{2\nu_1^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\epsilon^2\left[\frac{u}{\nu_1}\left(\frac{\nu_2}{2\nu_1^2}-1\right)+2\left(1-\frac{\nu_2}{2\nu_1^2}\right)-\frac{2\nu_3}{6\nu_1^3}+\frac{6\nu_2^2}{4\nu_1^4}\right]\right\}\approx$$

$$\approx\exp\left\{-\frac{u\epsilon}{\nu_1}\right\}\left\{1-\epsilon\frac{\nu_2}{2\nu_1^2}+\epsilon^2\left[\frac{u}{\nu_1}\left(\frac{\nu_2}{2\nu_1^2}-1\right)+1-\frac{3\nu_2}{2\nu_1^2}-\frac{\nu_3}{3\nu_1^3}+\frac{3\nu_2^2}{2\nu_1^4}\right]\right\}.$$

Наконец, заметив, что

$$\epsilon=\frac{\rho}{1+\rho}\approx\rho-\rho^2+\ldots,$$

мы окончательно получаем

$$\psi(u) \approx \exp\left\{-\frac{2\rho u\mu_1}{(1+\rho)\mu_2}\right\}\left\{1-\frac{2\rho\mu_1\mu_3}{3\mu_2^2}+\right.$$

$$\left.+\rho^2\left[\frac{2u\mu_1}{\mu_2}\left(\frac{2\mu_1\mu_3}{3\mu_2^2}-1\right)+1-\frac{4\mu_1\mu_3}{2\mu_2^2}-\frac{8\mu_1^2\mu_4}{15\mu_2^3}+\frac{6\mu_1^2\mu_3^2}{\mu_2^4}\right]\right\}. \quad (8.3.20)$$

Используя неравенство Эссеена и рассуждая примерно так же, как при доказательстве Теоремы 8.3.1, мы можем доказать следующий результат.

Теорема 8.3.3. *Предположим, что* $\mu_4 < \infty$ *и* $|\mathsf{E}\exp\{itX_1\}| = O(|t|^{-\alpha})$ *при* $|t| \to \infty$ *для некоторого* $\alpha > 0$. *Тогда для любого* $u > 0$, *при* $\rho \to 0$ *мы имеем*

$$\psi(u) = \exp\left\{-\frac{2\rho\mu_1 u}{(1+\rho)\mu_2}\right\}\left\{1-\frac{2\rho\mu_1\mu_3}{3\mu_2^2}+\right.$$

$$\left.+\rho^2\left[\frac{2u\mu_1}{\mu_2}\left(\frac{2\mu_1\mu_3}{3\mu_2^2}-1\right)+1-\frac{4\mu_1\mu_3}{3\mu_2^2}-\frac{8\mu_1^2\mu_4}{15\mu_2^3}+\frac{6\mu_1^2\mu_3^2}{\mu_2^4}\right]\right\}+O(\rho^3).$$

Поскольку коэффициент при ρ в фигурных скобках не зависит от начального капитала u, мы довольно легко можем выписать явное асимптотическое выражение для значения начального капитала $u_\gamma(\rho)$, обеспечивающего заданный риск γ. Напомним, что в предыдущем разделе мы определили $u_\gamma(\rho)$ как решение уравнения

$$\psi(u) = \gamma,$$

где $\gamma \in (0,1)$. В книге (Kalashnikov, 1997) в предположении $\mu_2 < \infty$ приведена асимптотика

$$u_\gamma(\rho) \sim \frac{\mu_2}{2\rho\mu_1}\log\frac{1}{\gamma}$$

при $\rho \to 0$, а при некоторых дополнительных предположениях указаны и двусторонние оценки для $u_\gamma(\rho)$. Используя Теорему 8.3.3, мы можем уточнить значение символа $\sim$ в асимптотической формуле Калашникова.

Теорема 8.3.4. *Если* $\mu_3 < \infty$, *то для любого* $\gamma \in (0,1)$ *при* $\rho \to 0$ *мы имеем*

$$u_\gamma(\rho) = \frac{\mu_2}{2\rho\mu_1}\log\frac{1}{\gamma} - \frac{\mu_3}{3\mu_2} + O(\rho). \quad (8.3.21)$$

Доказательство. Из Теоремы 8.3.3 мы имеем

$$\psi(u) = \exp\left\{-\frac{2\rho\mu_1 u}{(1+\rho)\mu_2}\right\}\left(1 - \frac{2\rho\mu_1\mu_3}{3\mu_2^2} + O(\rho^2)\right).$$

Подставляя это выражение в уравнение (8.3.21), мы находим

$$u_\gamma(\rho) = -\frac{(1+\rho)\mu_2}{2\rho\mu_1}\log\gamma + \frac{(1+\rho)\mu_2}{2\rho\mu_1}\log\left(1 - \frac{2\rho\mu_1\mu_3}{3\mu_2^2} + O(\rho^2)\right). \quad (8.3.22)$$

Далее, поскольку $\log(1+x) = x + O(x^2)$ при $x \to 0$, объединяя в (8.3.22) все члены порядка $O(\rho)$, мы получаем (8.3.21). Теорема доказана. □

Обратим внимание, что в правой части (8.3.21) присутствует неожиданный постоянный член $-\frac{1}{3}\mu_3\mu_2^{-1}$.

Если бы вместо Теоремы 8.3.3 для получения аналога (8.3.21) мы использовали Теорему 8.3.1, то в правой части соответствующего выражения вместо $O(\rho)$ мы бы имели $o(1)$.

С помощью (8.3.21) мы приходим к выводу о том, что страховая компания может варьировать величину нагрузки безопасности, но, если при этом требуется обеспечить заданную вероятность неразорения, то необходимо одновременно изменять начальный капитал таким образом, чтобы произведение $\rho \cdot u_\gamma(\rho)$ было почти постоянно в том смысле что

$$\rho \cdot u_\gamma(\rho) = \frac{\mu_2}{2\mu_1}\log\frac{1}{\gamma} - \rho\frac{\mu_3}{3\mu_2} + O(\rho^2).$$

8.4 Эмпирические аппроксимации для вероятности разорения в классическом процессе риска

В этом разделе мы приведем и обсудим некоторые эмпирические приближения для вероятности разорения $\psi(u)$ в классическом процессе риска. Эти приближения не имеют строгого математического обоснования, однако часто дают хорошие результаты при практических вычислениях.

8.4.1 Эмпирическая аппроксимация Де Вилдера

Эмпирическая аппроксимация Де Вилдера для вероятности разорения основана на идее подмены реального процесса риска классическим поцессом риска с экспоненциально распределенными выплатами и использования формулы (8.1.14) (см. (De Vylder, 1978), (Grandell, 1991)).

А именно, пусть $R(t)$ – процесс риска Спарре Андерсена с интенсивностью λ (то есть $\mathsf{E}\theta_j = 1/\lambda$), $\mathsf{E}X_j = \mu$ и нагрузкой безопасности ρ. Пусть $R^*(t)$ – классический процесс риска с экспоненциально распределенными выплатами и соответствующими параметрами λ^*, μ^* и ρ^*, определяемыми из условий

$$\mathsf{E}[R^*(t)]^n = \mathsf{E}[R(t)]^n, \qquad n = 1, 2, 3.$$

Обозначим

$$\mu_k = \mathsf{E}X_1^k, \quad k = 1, 2, 3$$

(естественно, $\mu_1 = \mu$). Так как для $s \in \mathbb{R}$

$$\log \mathsf{E}e^{isR(t)} = t\{isc + \lambda(\mathsf{E}e^{-isX_1} - 1)\} =$$

$$= t\Big[isc + \lambda\Big(1 - is\mu - \frac{\mu_2 s^2}{2} + \frac{i\mu_3 s^3}{6} + o(s^3) - 1\Big)\Big] =$$

$$= t\Big[is(c + \lambda\mu) - \frac{\lambda\mu_2 s^2}{2} + \frac{i\lambda\mu_3 s^3}{6} + o(s^3)\Big],$$

то справедливы соотношения

$$\mathsf{E}R(t) = (c - \lambda\mu)t = \rho\lambda\mu t, \qquad \mathsf{E}[R(t)]^2 = \lambda\mu^2 t + (\rho\lambda\mu t)^2,$$

$$\mathsf{E}[R(t)]^3 = -\lambda\mu_3 t + 3\lambda^2 t^2 \rho\mu\mu_2 + (\rho\lambda\mu t)^3.$$

Следовательно, параметры λ^*, μ^* и ρ^* должны удовлетворять соотношениям

$$\rho\lambda\mu = \rho^*\lambda^*\mu^*, \qquad \lambda\mu_2 = 2\lambda^*(\mu^*)^2, \qquad \lambda\mu_3 = 6\lambda^*(\mu^*)^3,$$

откуда

$$\mu^* = \frac{\mu_3}{3\mu_2}, \qquad \rho^* = \frac{2\rho\mu\mu_3}{3\mu_2^2}, \qquad \lambda^* = \frac{9\lambda\mu_2^3}{2\mu_3^2}.$$

Таким образом, с помощью формулы (8.1.14) мы приходим к *аппроксимации Де Вилдера*

$$\psi(u) \approx \psi_{DV}(u) = \frac{1}{1 + \rho^*} \exp\left\{-\frac{\rho^* u}{\mu^*(1 + \rho^*)}\right\} =$$

$$= \frac{3\mu_2^2}{3\mu_2^2 + 2\rho\mu\mu_3} \exp\left\{-\frac{6\rho u\mu\mu_2}{3\mu_2^2 + 2\rho\mu\mu_3}\right\}.$$

8.4.2 Эмпирическая аппроксимация Беекмана–Бауэрса

Положим
$$B(u) = \mathsf{P}\Big(\inf_{t\geq 0} R(t) < -u \Big| \inf_{t\geq 0} R(t) < 0\Big).$$
Из соотношения
$$\psi(0) = \frac{1}{1+\rho},$$
справедливого при $c > \lambda\mu$ (см. (8.1.6)), вытекает, что
$$B(u) = \frac{\phi(u)-\phi(0)}{1-\phi(0)} = 1-(1+\rho)\psi(u)$$
или, что то же самое,
$$\psi(u) = \frac{1-B(u)}{1+\rho}.$$
Несложно видеть, что с формальной точки зрения функция $B(u)$ является функцией распределения некоторой неотрицательной случайной величины. Идея подхода, предложенного Беекманом (Beekman, 1969) и модифицированного Бауэрсом (см. обсуждение статьи (Beekman, 1969)), заключается в подмене функции распределения $B(u)$ функцией гамма-распределения $G_{\alpha,\gamma}(u)$ с параметром формы α и параметром масштаба γ, подобранными так, чтобы первые два момента $B(u)$ и $G_{\alpha,\lambda}(u)$ совпадали.

Пусть μ_B и σ_B^2 – соответственно математическое ожидание и дисперсия, соответствующие функции распределения $B(u)$. Мы вновь будем использовать обозначения $\mu_k = \mathsf{E}X_1^k$, $k = 1,2,3$ ($\mu_1 = \mu$). С помощью формулы Поллачека–Хинчина, выражающей преобразование Лапласа–Стильтьеса $\mathfrak{g}(v)$ функции $\phi(u) = 1-\psi(u)$ через преобразование Лапласа–Стильтьеса $\mathfrak{f}(v)$ функции распределения $F(x)$, мы получим
$$\int\limits_0^\infty e^{-vu}dB(u) = \frac{\mathfrak{g}(v)-1-\lambda\mu/c}{\lambda\mu/c} = \frac{c\mathfrak{g}(v)}{\lambda\mu} - \rho =$$
$$= \frac{\rho}{1-\frac{1}{1+\rho}\frac{1-\mathfrak{f}(v)}{\mu v}} - \rho = \frac{\rho(1+\rho)}{1+\rho-(1-\frac{\mu_2 v}{2\mu}+\frac{\mu_3 v^2}{6\mu}+O(v^3))} - \rho =$$
$$= 1 - \frac{\mu_2(1+\rho)v}{2\rho\mu} + (1+\rho)\Big(\frac{\mu_3}{2\rho\mu}+\frac{\mu_2^2}{2\rho^2\mu^2}\Big)\frac{v^2}{2} + O(v^3),$$
откуда вытекает, что
$$\mu_B = \frac{\mu_2(1+\rho)}{2\rho\mu}, \qquad \sigma_B^2 = \frac{\mu_2(1+\rho)}{2\rho\mu}\Big(\frac{2\mu_3}{3\mu_2}+\frac{\mu_2(1-\rho)}{2\rho\mu}\Big).$$

При этом параметры α и γ распределения $G_{\alpha,\lambda}(u)$ определяются как

$$\alpha = \frac{\mu_B^2}{\sigma_B^2}, \qquad \gamma = \frac{\mu_B}{\sigma_B^2}.$$

Используя функцию гамма-распределения $G_{\alpha,\gamma}(u)$ с так определенными параметрами α и γ мы приходим к *аппроксимации Беекмана–Бауэрса*

$$\psi(u) \approx \psi_{BB}(u) = \frac{1 - G_{\alpha,\gamma}(u)}{1+\rho}.$$

8.5 Диффузионная аппроксимация для вероятности разорения в классическом процессе риска

Перед тем, как обсудить диффузионную аппроксимацию для процессов риска и, как следствие, для вероятности разорения, введем понятие пространства Скорохода.

Пусть $D = D[0,1]$ – пространство вещественных функций, определенных на $[0,1]$, непрерывных справа и имеющих конечные левосторонние пределы:

(i) при $0 \le t < 1$ предел $x(t+) = \lim_{s \downarrow t} x(s)$ существует и $x(t+) = x(t)$;

(ii) при $0 < t \le 1$ предел $x(t-) = \lim_{s \uparrow t} x(s)$ существует.

Пусть Δ – класс строго возрастающих непрерывных отображений отрезка $[0,1]$ на себя. Пусть δ — неубывающая функция на $[0,1]$, $\delta(0) = 0$, $\delta(1) = 1$. Положим

$$||\delta|| = \sup_{s \ne t} \left| \log \frac{\delta(t) - \delta(s)}{t - s} \right|.$$

Если $||\delta|| < \infty$, то функция δ непрерывна и строго возрастает и, следовательно, принадлежит классу Δ.

Определим расстояние $d_0(x,y)$ в множестве $D[0,1]$ как нижнюю грань таких положительных чисел ϵ, для которых Δ содержит некоторую функцию δ такую, что

$$||\delta|| \le \epsilon$$

и

$$\sup_t |x(t) - y(\delta(t))| \le \epsilon.$$

Можно показать, что пространство $D[0,1]$ полно относительно метрики d_0. Метрическое пространство $(D[0,1], d_0)$ принято называть *пространством Скорохода.*

Задавшись произвольным $T > 0$, и проводя рассуждения, аналогичные представленным выше, можно определить метрическое пространство $(D[0,T], d_0)$, $T > 0$, – также называемое *пространством Скорохода.*

В дальнейшем мы будем рассматривать случайные процессы как случайные элементы со значениями в пространстве $\mathcal{D} = (D[0,T], d_0)$.

Диффузионная аппроксимация является примером использования предельных теорем теории вероятностей для нахождения приближенного значения вероятности разорения. Для этого процесс риска Спарре Андерсена заменяется винеровским процессом (см., например, (Iglehart, 1969), (Grandell, 1977), (Grandell, 1991), (Rolski et al., 1999)). Корректность подобной замены гарантируется функциональными предельными теоремами при соответствующих нормировках процесса риска. Для винеровского же процесса отыскание вероятности разорения сводится к известному решению задачи о вероятности пересечения таким процессом заданного уровня. Проиллюстрируем сказанное на примере диффузионной аппроксимации для вероятности разорения в классическом процессе риска.

Пусть $W(t)$, $t \geq 0$, – стандартный винеровский процесс, то есть случайный процесс с непрерывными траекториями и такой, что $W(0) = 0$, приращения $W(t)$ на непересекающихся интервалах времени независимы и имеют нормальные распределения, причем

$$\mathsf{E}(W(t) - W(s)) = 0, \qquad \mathsf{D}(W(t) - W(s)) = t - s$$

при $0 \leq s < t < \infty$.

Мы уже знаем, что пуассоновские случайные суммы асимптотически нормальны. Это утверждение может быть усилено. Рассмотрим случайный процесс $S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$, описывающий суммарные страховые выплаты в классическом процессе риска в котором $\mathsf{E}X_1 = \mu$, $\mathsf{D}X_1 = \sigma^2$, а $N(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$. Как мы уже убедились, $\mathsf{E}S(t) = \lambda\mu t$, $\mathsf{D}S(t) = \lambda t(\mu^2 + \sigma^2)$. Введем случайные процессы $S_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, положив

$$S_n(t) = \frac{S(nt) - \lambda\mu nt}{\sqrt{\lambda n(\mu^2 + \sigma^2)}}.$$

Как показано в работе (Grandell, 1977), при $n \to \infty$ процессы $S_n(t)$ слабо сходятся в пространстве Скорохода к винеровскому процессу $W(t)$.

Заметим, что $R(t) = ct - S(t)$ и $\psi(u) = \mathsf{P}(\inf_{t>0} R(t) < -u)$. Положим

$$Y_n(t) = \frac{c_n nt - S(nt)}{\sqrt{n}},$$

допуская, что ставка страховой премии может зависеть от n: $c = c_n$. Пусть

$$Y(t) = \gamma\lambda\mu t - \sqrt{\lambda(\mu^2+\sigma^2)}W(t), \qquad \rho_n = \frac{c_n - \lambda\mu}{\lambda\mu},$$

где $\gamma > 0$, то есть $Y(t)$ – это винеровский процесс со сносом. Так как

$$Y_n = \rho_n\lambda\mu\sqrt{n}t - \sqrt{\lambda(\mu^2+\sigma^2)}S_n(t),$$

то (см. (Grandell, 1977)), процессы $Y_n(t)$ слабо сходятся в пространстве Скорохода к процессу $Y(t)$ тогда и только тогда, когда $\rho_n\sqrt{n} \to \gamma$. При этом, как показано в работе (Grandell, 1978), если нагрузка безопасности в классическом процессе риска равна ρ_n, то для $x > 0$

$$\psi(x\sqrt{n}) = \mathsf{P}\Big(\inf_{t\geq 0} Y_n(t) < -x\Big) \longrightarrow \mathsf{P}\Big(\inf_{t\geq 0} Y(t) < -x\Big) =$$

$$= \exp\Big\{-\gamma x\frac{2\mu}{\mu^2+\sigma^2}\Big\}.$$

Отсюда мы приходим к *диффузионной аппроксимации* для вероятности разорения

$$\psi(u) \approx \psi_D(u) = \exp\Big\{-u\rho\frac{2\mu}{\mu^2+\sigma^2}\Big\}.$$

Недостатками этого подхода являются: (i) низкая точность получаемых приближений (как указано в (Grandell, 1991), относительная погрешность может достигать сотен процентов); (ii) отмеченное в работе (Калашников и Константинидис, 1996) несоответствие между экспоненциальной зависимостью выражения, аппроксимирующего вероятность разорения, от начального капитала и минимальными требованиями, формально гарантирующими ее справедливость, а именно, для корректности диффузионной аппроксимации для процесса риска достаточно лишь существования первых двух моментов страховых требований, чего, вообще говоря, формально не достаточно для экспоненциальной зависимости *самой* вероятности разорения от начального капитала.

8.6 Асимптотическая аппроксимация вероятности разорения при большом начальном капитале. Теорема Краме́ра–Лундберга

Определение 8.6.1. Функция распределения $F(x)$ удовлетворяет *условию Краме́ра–Лундберга*, если существует положительное число R такое, что

$$\frac{\lambda}{c}\int\limits_0^\infty e^{Rx}[1-F(x)]dx = 1. \tag{8.6.1}$$

При этом R называется *показателем Лундберга*.

Для $r>0$ обозначим

$$K(r) = \int\limits_0^\infty e^{rz}dF(z) - 1.$$

Всюду в этом разделе мы предполагаем, что $c > \lambda\mu$, то есть нагрузка безопасности положительна: $\rho > 0$.

Теорема 8.6.1. *Предположим, что функция распределения $F(x)$ страховых требований удовлетворяет условию Краме́ра–Лундберга и существует положительное число r_0 (возможно, равное бесконечности) такое, что $K(r)\uparrow\infty$ при $r\uparrow r_0$. Тогда*

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\psi(u) = \frac{\rho\mu}{K'(R) - c/\lambda}.$$

Доказательство. Из соотношений (5.2.3) и (5.2.4) вытекает, что

$$1-\psi(u) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^u [1-\psi(u-z)][1-F(z)]dz =$$

$$= 1 - \frac{\lambda}{c}\left[\mu - \int\limits_0^u [1-F(z)]dz + \int\limits_0^u \psi(u-z)[1-F(z)]dz\right]$$

или, что то же самое,

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\int\limits_u^\infty [1-F(z)]dz + \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^u \psi(u-z)[1-F(z)]dz. \tag{8.6.2}$$

Поскольку F удовлетворяет условию Краме́ра, функция

$$\frac{\lambda}{c}e^{Rx}[1-F(x)]$$

представляет собой плотность некоторого распределения вероятностей. Умножая обе части соотношения (8.6.2) на e^{Ru}, мы получаем уравнение

$$e^{Ru}\psi(u)=\frac{\lambda e^{Ru}}{c}\int\limits_0^u[1-F(z)]dz+\frac{\lambda}{c}\int\limits_0^u e^{R(u-z)}\psi(u-z)e^{Rz}[1-F(z)]dz. \tag{8.6.3}$$

Уравнение (8.6.3) представляет собой так называемое уравнение восстановления. Согласно теореме восстановления (см., например, (Феллер, 1984), т.2, с. 407), мы имеем

$$\lim_{u\to\infty}e^{Ru}\psi(u)=\frac{C_1}{C_2}, \tag{8.6.4}$$

где

$$C_1=\frac{\lambda}{c}\int\limits_0^\infty e^{Ru}\int\limits_u^\infty[1-F(z)]dzdu, \tag{8.6.5}$$

и

$$C_2=\frac{\lambda}{c}\int\limits_0^\infty ze^{Rz}[1-F(z)]dz. \tag{8.6.6}$$

Из условия Краме́ра и определения функции $K(r)$ мы получаем

$$\frac{c}{\lambda}=\int\limits_0^\infty e^{Rz}[1-F(z)]dz=\frac{1}{R}\Big[\int\limits_0^\infty e^{Rz}dF(z)-1\Big]=\frac{K(R)}{R}.$$

Таким образом, показатель Лундберга R является положительным решением уравнения

$$K(r)=\frac{cr}{\lambda} \tag{8.6.7}$$

(существование этого решения обусловлено условием теоремы, согласно которому функция $K(r)$ неограниченно возрастает при $r\uparrow r_0$). Найдем более простые выражения для C_1 и C_2. Имеем

$$C_1=\frac{\lambda}{c}\int\limits_0^\infty e^{Ru}\int\limits_u^\infty[1-F(z)]dzdu=-\frac{\lambda}{cR}\int\limits_0^\infty[1-F(z)]dz+$$

$$+\frac{\lambda}{cR}\int\limits_0^\infty e^{Rz}[1-F(z)]dz=\frac{1-\frac{\lambda\mu}{c}}{R}=\frac{\rho}{R(1+\rho)}. \tag{8.6.8}$$

Используя легко проверяемые соотношения

$$K'(R) = \int_0^\infty z e^{Rz} dF(z) \quad \text{и} \quad \int z e^{Rz} dz = \frac{e^{Rz}}{R}\left(z - \frac{1}{R}\right),$$

мы получаем

$$C_2 = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty z e^{Rz}[1 - F(z)]dz = \frac{\lambda}{cR}\left[\frac{1}{R} + \int_0^\infty \left(z - \frac{1}{R}\right) e^{Rz} dF(z)\right] =$$

$$= \frac{\lambda}{cR}\left(\frac{1}{R} + K'(R) - \frac{K(R)+1}{R}\right) = \frac{\lambda}{cR}\left(K'(R) - \frac{c}{\lambda}\right) =$$

$$= \frac{\lambda\mu[K'(R) - c/\lambda]}{cR\mu} = \frac{[K'(R) - c/\lambda]}{(1+\rho)R\mu}. \tag{8.6.9}$$

Подставляя (8.6.8) и (8.6.9) в (8.6.4), получаем утверждение Теоремы. □

Из Теоремы 8.6.1 при больших u мы получаем приближенное равенство

$$\psi(u) \approx \frac{\rho\mu e^{-Ru}}{K'(R) - c/\lambda}. \tag{8.6.10}$$

Соотношение (8.6.10) называют *аппроксимацией Крамéра–Лундберга*.

Для выполнения условия Крамера–Лундберга необходимо (но, вообще говоря, не достаточно, см. (Embrechts and Veraverbecke, 1982)), чтобы существовал экспоненциальный момент размера выплаты, то есть

$$\mathsf{E}\exp\{\gamma X_1\} = \int_0^\infty e^{\gamma x} dF(x) < \infty$$

для некоторого $\gamma > 0$. В работах (Thorin, 1970) и (Embrechts and Veraverbecke, 1982) приведена асимптотика $\psi(u)$ для случая, когда последнее условие выполнено, но условие Крамера–Лундберга нарушается. А именно, если $R^* = \sup\{r : \mathsf{E}\exp\{r(X_1 - c/\lambda)\} < 1\}$ и $\mathsf{E}\exp\{R^*(X_1 - c/\lambda)\} = \infty$, то

$$\psi(u) = o(\exp\{-R^* u\}).$$

8.7 Неравенства для вероятности разорения в классическом процессе риска

8.7.1 Неравенство Лундберга

Применяя метод замены вероятностной меры, классический асимптотический результат Крамера–Лундберга, приведенный в Теореме 8.6.1, как мы увидим ниже, можно уточнить, модифицировав его для любых фиксированных значений начального капитала u. Это уточнение принадлежит В. В. Калашникову и Г. Ш. Цициашвили (Kalashnikov and Tsitsiashvili, 1999). Основные роли в конструкциях, используемых с этой целью, играют формула Поллачека–Хинчина–Беекмана и следующее утверждение.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – одинаково распределенные неотрицательные случайные величины. Для $x \geq 0$ положим

$$\nu(x) = \min\{n : \ \xi_1 + \ldots + \xi_n > x\}.$$

Пусть N – случайная величина с геометрическим распределением,

$$\mathsf{P}(N = n) = \epsilon(1-\epsilon)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Предположим, что N и $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы при каждом $\epsilon \in (0, 1)$. Положим

$$P_\epsilon(x) = \mathsf{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_N < x).$$

Лемма 8.7.1. *Функция распределения $P_\epsilon(x)$ удовлетворяет равенству*

$$P_\epsilon(x) = 1 - \mathsf{E}(1-\epsilon)^{\nu(x)}. \tag{8.7.1}$$

Доказательство (см. (Kalashnikov, 1997), с. 75). События $\{\xi_1 + \ldots + \xi_k > x\}$ и $\{\nu(x) \leq k-1\}$ эквивалентны. Поэтому по формуле полной вероятности мы имеем

$$1 - P_\epsilon(x) = \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} (1-\epsilon)^{k-1} \mathsf{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_k > x) =$$

$$= \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} (1-\epsilon)^{k-1} \mathsf{P}(\nu(x) \leq k-1) = \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} (1-\epsilon)^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \mathsf{P}(\nu(x) = j). \tag{8.7.2}$$

Ряд с неотрицательными слагаемыми в правой части (8.7.2) сходится. Поэтому, согласно теореме Фубини, мы можем изменить порядок суммирования и получим

$$1 - P_\epsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{P}(\nu(x) = j) \sum_{k=j+1}^{\infty} \epsilon(1-\epsilon)^{k-1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{P}(\nu(x) = j)(1-\epsilon)^j = \mathsf{E}(1-\epsilon)^{\nu(x)},$$

что и требовалось доказать. □

Напомним схему метода замены вероятностной меры. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ – измеримое пространство, $f : \Omega \to \mathbb{R}^1$ – измеримая функция, P и Q – вероятностные меры, заданные на $\mathcal{F}$ так, что P абсолютно непрерывна относительно Q. Математические ожидания по мерам P и Q будут обозначаться соответственно E_P и E_Q. Производная Радона–Никодима меры P относительно Q как обычно, будет обозначаться $\dfrac{d\mathsf{P}}{d\mathsf{Q}}(\omega)$. Стандартная процедура замены вероятностной меры описывается цепочкой равенств

$$\mathsf{E}_\mathsf{P} f \equiv \int_\Omega f(\omega)\mathsf{P}(d\omega) = \int_\Omega f(\omega)\frac{d\mathsf{P}}{d\mathsf{Q}}(\omega)\mathsf{Q}(d\omega) \equiv \mathsf{E}_\mathsf{Q}\left(f\frac{d\mathsf{P}}{d\mathsf{Q}}\right) \qquad (8.7.3)$$

(см., например, (Ширяев, 1989)).

Мы будем использовать следующую конкретную версию соотношения (8.7.3). Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с общей функцией распределения $H(x)$. Пусть N – почти наверное конечный момент остановки относительно этой последовательности. Пусть при каждом $n \geq 1$ задана измеримая функция $f_n(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$. Рассмотрим математическое ожидание $\mathsf{E}_H f_N(\xi_1, \ldots, \xi_N)$. Здесь индекс H у символа математического ожидания означает, что ξ_i имеет функцию распределения H, $i \geq 1$. Пусть $G(x)$ – другая функция распределения, такая что H абсолютно непрерывна относительно G. Тогда соотношение (8.7.3) для рассматриваемой ситуации примет вид

$$\mathsf{E}_H f_N(\xi_1, \ldots, \xi_N) = \mathsf{E}_G[f_N(\xi_1, \ldots, \xi_N)w(\xi_1)\cdots w(\xi_N)], \qquad (8.7.4)$$

где

$$w(x) = \frac{dH}{dG}(x).$$

В дополнение к обозначениям, введенным перед Леммой 8.7.1, положим

$$\eta(x) = \xi_1 + \ldots + \xi_{\nu(x)} - x.$$

Величина $\eta(x)$ характеризует величину перескока процесса восстановления $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \geq 1$, над уровнем x. Предположим, что общая функция распределения $H(x)$ случайных величин $\xi_1, \xi_2 \ldots$ удовлетворяет условию Крамéра (с показателем R) в форме

$$(1-\epsilon)\int_0^\infty e^{Rx}dH(x) = 1 \qquad (8.7.5)$$

(если

$$H(x)=\frac{1}{\mu}\int_0^x[1-F(z)]dz \ \text{ и } \ \epsilon=\frac{\rho}{1+\rho},$$

то (8.7.5) совпадает с (8.6.1)). Определим распределение $G(x)$ с помощью соотношения

$$G(dx)=(1-\epsilon)e^{Rx}H(dx).$$

В силу условия Кра́мера (8.7.5), $G(x)$ является функцией распределения, эквивалентной $F(x)$, и

$$w(x)=\frac{dH}{dG}(x)=\frac{e^{-Rx}}{1-\epsilon}.$$

Лемма 8.7.2. *Предположим, что общая функция распределения $H(x)$ случайных величин $\xi_1,\xi_2\ldots$ удовлетворяет условию Крамера (8.7.5) с показателем R. Тогда*

$$1-P_\epsilon(x)=e^{-Rx}\mathsf{E}_G e^{-R\eta(x)}, \quad x\geq 0.$$

Доказательство (см. (Kalashnikov and Tsitsiashvili, 1999)). Применим формулу (8.7.4) к функции $f_n(x_1,\ldots,x_n)=(1-\epsilon)^n$ с учетом Леммы 8.7.2:

$$1-P_\epsilon(x)=\mathsf{E}_H(1-\epsilon)^{\nu(x)}=\mathsf{E}_G[(1-\epsilon)^{\nu(x)}w(\xi_1)\cdots w(\xi_{\nu(x)}]=$$

$$=\mathsf{E}_G\exp\left\{-R(\xi_1+\ldots+\xi_{\nu(x)})\right\}=e^{-Rx}\mathsf{E}_G e^{-R\eta(x)},$$

что и требовалось доказать. □

Теперь с помощью Леммы 8.7.2 мы получим выражение для вероятности разорения в классическом процессе риска *при любом значении начального капитала u*. Пусть, как и ранее, $Y_1,Y_2,\ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с общей функцией распределения

$$H(x)=\frac{1}{\mu}\int_0^x[1-F(z)]dz.$$

Для $x>0$ положим

$$M(x)=\min\{n:\ Y_1+\ldots+Y_n>x\}.$$

Теорема 8.7.1. *Предположим, что общая функция распределения $F(x)$ страховых требований $X_1,X_2\ldots$ удовлетворяет условию Кра́мера* (8.6.1) *с показателем R. Тогда для любого $u>0$*

$$\psi(u)=e^{-Ru}\mathsf{E}\exp\left\{-R(Y_1+\ldots+Y_{M(u)}-u)\right\}.$$

Доказательство. Согласно формуле Поллачека–Хинчина–Бекмана и Лемме 8.7.1, вероятность разорения $\psi(u)$ допускает представление

$$\psi(u) = 1 - P_\epsilon(u),$$

где $\epsilon = \frac{\rho}{1+\rho}$, а $\xi_i = Y_i$, $i \geq 1$. Теперь осталось воспользоваться Леммой 8.7.2. Теорема доказана. □

Поскольку по определению $Y_1 + \ldots + Y_{M(u)} - u > 0$, из Теоремы 8.7.1 мы сразу получаем

Следствие 8.7.1. *Предположим, что общая функция распределения $F(x)$ страховых требований $X_1, X_2 \ldots$ удовлетворяет условию Крамéра* (8.6.1) *с показателем R. Тогда для любого $u > 0$*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}. \tag{8.7.6}$$

Неравенство (8.7.6) называют *неравенством Лундберга.*

8.7.2 Двусторонние оценки для вероятности разорения

По-видимому, одним из первых, кто применил мартингальный подход к оцениванию вероятности разорения, был Гербер (см. (Gerber 1973; 1979). Чтобы дать общее представление об этом подходе, рассмотрим функцию

$$Z(t) = \exp\{-R[R(t) + u]\}, \tag{8.7.7}$$

где R – показатель Лундберга. Тогда для любого $s > 0$ мы имеем

$$\mathsf{E}[Z(t+s)|Z(t)] =$$

$$= e^{-R[R(t)+u]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} e^{-Rcs} \mathsf{E} \exp\{R(X_1 + \ldots + X_k)\} = Z(t). \tag{8.7.8}$$

Это означает, что $Z(t)$ является мартингалом. Пусть τ – момент разорения,

$$\tau = \inf\{t:\ R(t) < -u\}.$$

Так как $R(t) \to \infty$ с вероятностью единица при $t \to \infty$, то из (8.7.8) вытекает, что

$$\mathsf{E}[Z(\tau); \tau < \infty] = Z(0) = e^{-Ru}.$$

Поскольку

$$\psi(u) = \mathsf{P}(\tau < \infty | R(0) = 0),$$

мы имеем

$$\psi(u) = \frac{\exp\{-Ru\}}{\mathsf{E}[Z(\tau)|\tau < \infty]} \tag{8.7.9}$$

(ср. с утверждением Теоремы 8.7.1). Попутно заметим, что так как $Z(\tau) > 1$, то из (8.7.9) мы, как и из Теоремы 8.7.1, сразу получаем неравенство Лундберга (8.7.16).) Соотношение (8.7.9) связывает вероятность разорения с величиной $\mathsf{E}[Z(t)|\tau < \infty]$. В работах (Gerber 1973; 1979) можно найти некоторые оценки этой величины. Из (8.7.9) спомощью элементарных выкладок мы можем получить двустороннюю оценку

$$\underline{C}e^{-Ru} \le \psi(u) \le \overline{C}e^{-Ru}, \tag{8.7.10}$$

где

$$\underline{C} = \inf_{y>0}\Big\{e^{-Ry}(1 - F(y))\Big(\int\limits_y^\infty e^{Rz}dF(z)\Big)^{-1}\Big\},$$

$$\overline{C} = \sup_{y>0}\Big\{e^{-Ry}(1 - F(y))\Big(\int\limits_y^\infty e^{Rz}dF(z)\Big)^{-1}\Big\}$$

(см (Калашников и Константинидис, 1996), (Kalashnikov, 1997)). Оценки (8.7.10) были впервые получены в работе (Rossberg and Siegel, 1974) с помощью другого подхода (и для более общей ситуации, в которой $N(t)$ – процесс восстановления, то есть $R(t)$ – процесс риска Спарре Андерсена).

С помощью соотношения (8.6.2) совсем просто получить нижние оценки для вероятности разорения. Пусть

$$H(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x [1 - F(z)]dz.$$

Теорема 8.7.2. *Пусть нагрузка безопасности положительна: $\rho > 0$. Тогда для любого $u > 0$ имеет место неравенство*

$$\psi(u) \ge \frac{1 - H(u)}{\rho + 1 - H(u)}. \tag{8.7.11}$$

Доказательство. Обозначив плотность, соответствующую функции распределения $H(x)$, через $h(x)$ и используя определение нагрузки безопасности ρ, перепишем (8.6.2) в виде

$$\psi(u) = \frac{1 - H(u)}{1 + \rho} + \frac{1}{1 + \rho}\int\limits_0^u \psi(u - z)h(z)dz. \tag{8.7.12}$$

Очевидно, что вероятность разорения $\psi(u)$ не возрастает с ростом u, то есть $\psi(u-z) \geq \psi(u)$ для $0 \leq z \leq u$. Поэтому из (8.7.12) мы получаем неравенство

$$\psi(u) \geq \frac{1-H(u)}{1+\rho} + \frac{H(u)}{1+\rho}\psi(u),$$

решая которое относительно $\psi(u)$, получаем требуемую оценку. Теорема доказана. □

Отметим, что утверждение теоремы 8.7.2 верно без предположения о том, что функция распределения страховых требований удовлетворяет условию Краме́ра. Более того, неравенство (8.7.11) асимптотически неулучшаемо, если распределение страховых требований принадлежит к классу субэкспоненциальных законов.

Определение 8.7.1. Функция распределения $F(x)$ принадлежит к классу субэкспоненциальных законов, если для любого целого $n \geq 1$

$$1 - F^{*n}(x) \sim n[1 - F(x)]$$

при $x \to \infty$.

Вместо асимптотической оценки экспоненциального типа, устанавливаемой Теоремой 8.6.1 для случая, когда распределения страховых требований удовлетворяют условию Краме́ра, для случая, когда распределения страховых требований являются субэкспоненциальными, имеет место следующее утверждение. Как обычно, мы обозначаем

$$H(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x [1 - F(z)]dz.$$

Теорема 8.7.3. *Предположим, что функция распределения $F(x)$ страховых требований принадлежит к классу субэкспоненциальных законов. Тогда*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{1-H(u)} = \frac{1}{\rho}.$$

Доказательство см. в (Embrechts and Veraverbeke, 1982), хотя эта теорема была получена ранее в терминах теории ветвящихся процессов (Чистяков, 1964) и теории массового обслуживания (Pakes, 1975). В довольно полном объеме асимптотическое поведение вероятности разорения в случае субэкспоненциальных распределений страховых требований описано в монографии (Embrechts, Mikosch and Klüppelberg, 1997). □

Довольно громоздкие, однако эффективно вычислимые двусторнние оценки вероятности разорения для случая, когда распределения страховых требований имеют тяжелые хвосты (то есть экспоненциальные моменты этих распределений бесконечны), приведены в работах (Калашников и Константинидис, 1996), (Kalashnikov, 1997) и (Калашников и Márciашвили, 1998).

8.8 Вероятность разорения за конечное время

Пусть $R(t)$ – классический процесс риска. В отличие от вероятности разорения $\psi(u)$ на бесконечном временном интервале,

$$\psi(u) = \mathsf{P}(u + R(t) < 0 \text{ для некоторого } t > 0) = \mathsf{P}\Big(\inf_{t>0} R(t) < -u\Big),$$

для вероятности разорения $\psi(u,t)$ на конечном интервале времени $[0,t]$

$$\psi(u,t) = \mathsf{P}\Big(\inf_{0\le t\le T} R(t) < -u\Big)$$

отсутствует представление, аналогичное формуле Поллачека–Хинчина–Беекмана. Поэтому все нетривиальные формулы для $\psi(u,t)$ имеют приближенный характер. Не вдаваясь в детали, в данном разделе мы лишь перечислим некоторые из этих соотношений.

Напомним, что в разделе 8.6 были введены показатель Лундберга R – решение уравнения

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{Rx}[1-F(x)]dx = 1$$

– и функция

$$K(r) = \int_0^\infty e^{rz}dF(z) - 1.$$

Зависящее от времени неравенство Лундберга

Пусть $y > 0$. Следуя Герберу (Gerber, 1973), введем *зависящий от времени показатель Лундберга* R_t как

$$R_t = \sup_{r\ge R}\Big\{r - \frac{t(\lambda K(r) + rc)}{u}\Big\}.$$

Тогда можно показать, что выполнено *зависящее от времени неравенство Лундберга*

$$\psi(u,t) \le e^{-R_t u}$$

(см., например, (Gerber, 1973), (Grandell, 1991)).

Асимптотические аппроксимации для $\psi(u,t)$

Большинство аппроксимаций для $\psi(u,t)$ имеют асимптотический характер. Наиболее известными являются представление Сегердаля и представление, основанное на диффузионной аппроксимации.

Обозначим

$$y_0 = \frac{1}{\lambda K'(R) - c}, \qquad v_0 = \frac{\lambda K''(R)}{(\lambda K'(R) - c)^3}.$$

Пусть C – константа, фигурирующая в теореме Крамéра–Лундберга,

$$C = \frac{\rho\mu}{K'(R) - c/\lambda} \ \ (= \rho\mu\lambda y_0).$$

В работе (Segerdahl, 1955) показано, что если $u \to \infty$ и $t \to \infty$ так, что величина $(t - uy_0)u^{-1/2}$ остается ограниченной, то

$$\psi(u,t) \ \sim \ C\Phi\Big(\frac{t - uy_0}{\sqrt{uv_0}}\Big)e^{-Ru}, \tag{8.8.1}$$

где, как обычно, $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения. Из соотношения (8.8.1) вытекает, что условное распределения момента разорения $T = T_u$ при условии $T_u < \infty$ асимптотически (при $u \to \infty$, $t \to \infty$ и ограниченном $(t - uy_0)u^{-1/2}$) является нормальным с математическим ожиданием uy_0 и дисперсией uv_0. В частности, как отмечено в (Grandell, 1991), если u велико, то с вероятностью, примерно равной 0.95, разорение произойдет в интервале $(uy_0 - 2\sqrt{uv_0},\, uy_0 + 2\sqrt{uv_0})$.

Использование же диффузионной аппроксимации, суть которой заключается в том, что при соответствующем изменении масштаба траектории классического процесса риска приближаются траекториями винеровского процесса, приводит к приближенной формуле

$$\psi(u,t) \approx 1 - \Phi\Big(\frac{u + \rho\lambda\mu t}{\sqrt{\lambda t(\mu^2 + \sigma^2)}}\Big) + \Phi\Big(\frac{-u + \rho\lambda\mu t}{\sqrt{\lambda t(\mu^2 + \sigma^2)}}\Big)\exp\Big\{-\frac{2\rho\lambda\mu u}{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}\Big\}.$$

Условия, при которых эта аппроксимация дает приемлемые результаты, и соответствующие примеры обсуждаются в (Grandell, 1977) и (Grandell, 1991).

Глава 9

Обобщенные процессы риска

9.1 Определение обобщенных процессов риска

В данном разделе мы рассмотрим обобщение классического процесса риска

$$R(t) = u + ct - \sum_{j=1}^{N_\lambda(t)} X_j, \quad t \geq 0, \tag{9.1.1}$$

где u – начальный капитал страховой компании, $c > 0$ – интенсивность поступления страховых взносов (премий), $\{X_j\}_{j\geq 1}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathsf{E}X_j = a$, $\mathsf{D}X_j = \sigma^2 < \infty$, имеющие смысл размеров страховых выплат, $N_\lambda(t)$ – однородный пуассоновский процесс с некоторой интенсивностью $\lambda > 0$, независимый от $\{X_j\}_{j\geq 1}$ и имеющий смысл количества страховых случаев до момента времени t. Процесс $R(t)$ имеет смысл (остаточного) капитала страховой компании в момент времени t. Свойства классического процесса риска рассмотрены в разделах 7.1 и 7.10.

Как мы уже видели, модель (9.1.1) приводит к очень красивым и глубоким результатам, связанным с вероятностью разорения, таким, как, например, неравенство Лундберга или Теорема Краме́ра–Лундберга (см. раздел 8.6). Однако красота этих результатов достигается за счет очень сильных модельных предположений. Например, однородность пуассоновского потока страховых выплат неизбежно влечет неизменность портфеля. В то же время с практической точки зрения эта ситуация представляется не очень реальной, так как всегда надо допускать возможность расширения (или наоборот, сворачивания) бизнеса. Тем самым мы приходим к необходимости рассматривать (вообще говоря, случайные) *флуктуации размера портфеля* или, что фактически то же самое, флуктуации интенсивности поступления страховых премий. С другой стороны, очевидно, что надо допускать также и колебания интенсивности потока страховых выплат. Например, при страховании автотранспорта или страховании от пожара явно выделяются сезонные колебания интенсивности потока выплат. Таким образом, мы приходим к необходимости учитывать (вообще говоря, случайные) *флуктуации риска.*

Подходящей моделью для учета флуктуаций риска являются обобщенные процессы Кокса с ненулевыми средними, с помощью которых мы приходим к следующему возможному обобщению классического процесса риска (9.1.1).

Пусть $N_1(t)$, $t \geq 0$, – стандартный пуассоновский процесс (однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью, см. раздел 7.2), а $\Lambda(t)$, $t \geq 0$, – независимый от $N_1(t)$ случайный процесс с неубывающими, почти наверное конечными непрерывными справа траекториями, выходящими из нуля. Пусть

$$N(t) = N_1(\Lambda(t)), \quad t \geq 0, \tag{9.1.2}$$

– процесс Кокса, управляемый процессом $\Lambda(t)$. В дальнейшем мы будем предполагать, что процесс $N(t)$ независим от последовательности $\{X_j\}_{j\geq 1}$. Рассмотрим процесс риска вида

$$R_1(t) = u + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j, \quad t \geq 0. \tag{9.1.3}$$

Модель (9.1.3) учитывает непостоянство или даже стохастичность интенсивности страховых выплат, связанные, например, с сезонностью, при постоянной интенсивности заключения страховых договоров.

Вместе с тем, оказывается, что, допуская возможность флуктуаций риска, то есть, случайных колебаний интенсивности страховых выплат, с практической точки зрения довольно неразумно оставлять постоянной интенсивность поступления страховых взносов (премий). В этом нас убеждает следующий пример, взятый из (Эмбрехтс и Клюппельберг, 1993) и (Bühlmann, 1989).

Предположим, что $\Lambda(t) \equiv \Lambda t$, где Λ – неотрицательная случайная величина с конечным математическим ожиданием, но такая, что для любого $\lambda > 0$

$$\mathsf{P}(\Lambda > \lambda) > 0. \tag{9.1.4}$$

Пусть $\Psi(u) = \Psi(u, \lambda)$ – вероятность разорения для классического процесса риска (9.1.1). Тогда, очевидно, вероятность разорения $\Psi_1(u)$ для процесса риска (9.1.3) с описанным выше управляющим процессом $\Lambda(t)$ равна

$$\Psi_1(u) = \mathsf{E}\Psi(u,\Lambda) = \int\limits_0^\infty \Psi(u,\lambda)d\mathsf{P}(\Lambda < \lambda).$$

Но, как известно, для классического процесса риска (9.1.1) с $\lambda \geq c/a$ вероятность разорения равна единице. Поэтому вследствие (9.1.4)

$$\Psi_1(u) = \mathsf{E}\Psi(u,\Lambda)\mathbf{1}(\Lambda < c/a) + \mathsf{E}\Psi(u,\Lambda)\mathbf{1}(\Lambda \geq c/a) =$$

$$= \mathsf{E}\Psi(u,\Lambda)\mathbf{1}(\Lambda < c/a) + \mathsf{P}(\Lambda \geq c/a) \geq \mathsf{P}(\Lambda \geq c/a) > 0.$$

При этом нижняя граница для $\Psi_1(u)$ не зависит от u! Поэтому поведение страховщика, не меняющего размер страховых взносов в зависимости от колебаний риска, чревато разорением, каким большим бы ни был его начальный капитал.

Итак, при флуктуациях риска интенсивность увеличения капитала страховой компании на практике *не должна* быть постоянной.

С другой стороны, интуитивно ясно, что интенсивность потока страховых выплат должна быть пропорциональной объему страхового портфеля: если в портфеле страховой компании мало договоров, то и число страховых выплат по данному портфелю будет малым и наоборот, количество страховых выплат может быть тем больше, чем больше договоров в портфеле.

Таким образом, мы естественно приходим к следующему обобщению классического процесса риска. Пусть $N(t)$, $t \geq 0$, – процесс Кокса, управляемый процессом $\Lambda(t)$ с неубывающими, почти наверное конечными непрерывными справа траекториями, выходящими из нуля. Положим

$$R_2(t) = u + c\Lambda(t) - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j, \quad t \geq 0, \tag{9.1.5}$$

где при каждом $t > 0$ случайные величины $\Lambda(t)$ и $N(t)$ независимы от независимых одинаково распределенных (неотрицательных) случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ Модель (9.1.5) учитывает непостоянство интенсивности процесса заключения страховых договоров, поскольку можно считать, что в модели (9.1.5) среднее число выплат $N(t)$ пропорционально количеству страховых договоров в портфеле страховой компании, которое, в свою очередь, пропорционально $\Lambda(t)$.

Условимся в дальнейшем называть процесс $R_2(t)$ *обобщенным процессом риска*, порожденным последовательностью $\{X_j\}_{j\geq 1}$ и управляемым процессом $\Lambda(t)$.

Несложно видеть, что вероятность разорения для обобщенного процесса риска

$$\Psi(u) = \mathsf{P}\Big((\inf_{t>0} R_2(t) < 0\Big))$$

совпадает с вероятностью разорения для классического процесса риска

$$\Psi_0(u) = \mathsf{P}\Big((\inf_{t>0} R(t) < 0\Big)),$$

поскольку процесс $R_2(t)$ отличается от $R(t)$ лишь случайной (вообще говоря, неоднородной) компрессией времени, *не изменяющей амплитуду траекторий.*

9.2 Асимптотическое поведение обобщенных процессов риска

Сейчас мы приведем несколько утверждений об асимптотическом поведении обобщенных процессов риска при $t \to \infty$. При этом t *не обязательно будет иметь смысл физического времени.* Например, мы можем предположить, что t – это некоторый параметр положения управляющего процесса, скажем, его медиана. Такая интерпретация позволит нам рассматривать асимптотическое поведение распределений обобщенного процесса риска в фиксированный момент времени, но при неограниченно увеличивающемся (скажем, в смысле сходимости по вероятности) объеме страхового портфеля или, что то же самое в рамках рассматриваемой модели, при неограниченно урастущей накопленной интенсивности страховых выплат.

Исходя из принципа "неразорения в среднем", мы должны были бы предполагать, что $c > a$. Однако, в целях общности мы будем просто предполагать, что $c \neq a$, формально допуская неблагоприятный случай $c < a$. Исследование "критического" случая $c = a$ требует иных методов.

Мы начнем с рассмотрения самой общей ситуации, в которой не делаются никакие предположения моментного характера об управляющем процессе $\Lambda(t)$. Как мы увидим ниже, предположение о существовании $\mathsf{E}\Lambda(t)$ (и естественного в этом случае совпадении этого ожидания с t) существенно упрощает критерии сходимости распределений обобщенного процесса риска. Символом L_1 мы обозначаем расстояние Леви между функциями распределения, отождествляя его с расстоянием Леви между соответствующими случайными величинами. Если F_X и F_Y – функции распределения некоторых случайных величин X и Y, то

$$L_1(X,Y) \equiv L_1(F_X,F_Y) =$$

$= \inf\{h > 0: \ F_Y(x-h) - h \le F_X(x) \le F_Y(x+h) + h$ для всех $x \in \mathbb{R}\}$.

Напомним, что расстояние Леви метризует сходимость по распределению.

ТЕОРЕМА 9.2.1. *Предположим, что* $\mathsf{E}X_1 = a \ne 0$ *и* $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ *при* $t \to \infty$. *Пусть* $D(t) > 0$ *– такая функция, что* $D(t) \to \infty$ *при* $t \to \infty$. *Тогда одномерные распределения надлежащим образом центрированного и нормированного обобщенного процесса риска* $R_2(t)$ *слабо сходятся при* $t \to \infty$ *к распределению некоторой случайной величины* Z, *то есть*

$$\frac{-R_2(t) - C(t)}{D(t)} \Longrightarrow Z \qquad (t \to \infty) \tag{9.2.1}$$

при некоторой вещественной функции $C(t)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|C(t)|}{D^2(t)} \equiv k^2 < \infty \tag{9.2.3}$$

и существует такая случайная величина V, *что*

$$Z \stackrel{d}{=} k \cdot \sqrt{\frac{a^2+\sigma^2}{|a-c|}} \cdot W + V, \tag{9.2.4}$$

где W *– случайная величина со стандартным нормальным распределением, независимая от* V, *и*

$$L_1\left(\frac{(a-c)\Lambda(t) - C(t)}{D(t)}, V(t)\right) \to 0 \qquad (t \to \infty), \tag{9.2.5}$$

где распределение случайной величины $V(t)$ *определяется характеристической функцией*

$$\mathsf{E}\exp\{isV(t)\} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{s^2(a^2+\sigma^2)}{2|a-c|}\left[k^2 - \frac{|C(t)|}{D^2(t)}\right]\right\}\mathsf{E}\exp\{isV\}, \qquad s \in \mathbb{R}. \tag{9.2.6}$$

Доказательство, основанное на Теореме 7.8.1, см. в (Bening, Korolev and Liu Lixin, 2000). □

Из Теоремы 9.2.1 вытекает следующий критерий асимптотической нормальности обобщенных процессов риска.

СЛЕДСТВИЕ 9.2.1. *В условиях Теоремы* 9.2.1 *неслучайно центрированный и нормированный обобщенный процесс риска* $R_2(t)$ *асимптотически нормален с некоторой асимптотической дисперсией* $\delta^2 > 0$:

$$\mathsf{P}\Big(\frac{-R_2(t) - C(t)}{D(t)} < x\Big) \Longrightarrow \Phi\Big(\frac{x}{\delta}\Big) \qquad (t \to \infty),$$

тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{|C(t)|}{D^2(t)}\le\frac{|a-c|\delta^2}{a^2+\sigma^2}$$

и

$$\lim_{t\to\infty}L_1\Big(\mathsf{P}\Big(\frac{(a-c)\Lambda(t)-C(t)}{D(t)}<x\Big),$$

$$\Phi\Big(\frac{\sqrt{|a-c|}D(t)x}{\sqrt{|a-c|\delta^2D^2(t)-(a^2+\sigma^2)|C(t)|}}\Big)\Big)=0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение вытекает из Теоремы 9.2.1 и знаменитой теоремы Крамера–Леви о разложимости нормального закона только на нормальные компоненты, в соответствии с которой любая случайная величина V, удовлетворяющая (9.2.4), обязана быть нормально распределенной с нулевым средним и дисперсией

$$\delta^2-\frac{k^2(a^2+\sigma^2)}{|a-c|}$$

и, следовательно, любая случайная величина $V(t)$, удовлетворяющая (9.2.6), неизбежно должна быть нормально распределенной с нулевым средним и дисперсией

$$\delta^2-\frac{(a^2+\sigma^2)|C(t)|}{|a-c|D^2(t)}.$$

Следствие доказано. □

Другими словами, надлежащим образом центрированный и нормированный обобщенный процесс риска $R_2(t)$ асимптотически нормален тогда и только тогда, когда асимптотически нормален его управляющий процесс $\Lambda(t)$.

Замечание 9.2.1. Теорема 9.2.1 и Следствие 9.2.1 на самом деле верны в более общей ситуации, когда обобщенный процесс риска порожден не обязательно стандартным пуассоновским процессом N_1 (см. (9.1.2)), а любым асимптотически нормальным считающим процессом N_1, то есть любым считающим процессом N_1, обладающим свойствами

$$\frac{N_1(t)}{t}\Longrightarrow\gamma\quad(t\to\infty)$$

и
$$\mathsf{P}\Big(\frac{N_1(t)-rt}{p\sqrt{t}}<x\Big)\Longrightarrow\Phi(x)\quad(t\to\infty)$$
с некоторыми $\gamma>0$, $r\in\mathbb{R}$ и $p>0$.

Чтобы показать, насколько упрощается ситуация, если существует $\mathsf{E}\Lambda(t)$ (и равно t, что может быть, например, если $\Lambda(t)$ – однородный процесс с независимыми приращениями), мы приведем здесь следующий результат, доказанный в (Бенинг и Королев, 1998).

Теорема 9.2.2. *Предположим, что* $\mathsf{E}\Lambda(t)\equiv t$ *и* $\Lambda(t)\xrightarrow{\mathsf{P}}\infty$ *при* $t\to\infty$. *Тогда одномерные распределения надлежащим образом центрированного и нормированного обобщенного процесса риска слабо сходятся при* $t\to\infty$ *к распределению некоторой случайной величины* Z:
$$\frac{R_2(t)-(c-a)t}{\sqrt{(a^2+\sigma^2)t}}\Longrightarrow Z\quad(t\to\infty),$$
тогда и только тогда, когда существует случайная величина V *такая, что*

1. $\mathsf{P}(Z<x)=\mathsf{E}\Phi\Big(x-\dfrac{c-a}{\sqrt{a^2+\sigma^2}}\cdot V\Big)$;

2. $\dfrac{\Lambda(t)-t}{\sqrt{t}}\Longrightarrow V\quad(t\to\infty)$.

Это утверждение, изначально доказанное ранее Теоремы 9.2.1, на самом деле является ее простым следствием.

Замечание 9.2.2. В Теореме 9.2.2 процесс $R_2(t)$ нормируется не его дисперсией, а величиной $\sqrt{(a^2+\sigma^2)t}$. Тем самым мы не предполагаем существования дисперсии у управляющего процесса $\Lambda(t)$.

Следствие 9.2.2. *В условиях Теоремы* 9.2.2 *обобщенный процесс риска* $R_2(t)$ *асимптотически нормален*
$$\mathsf{P}\Big(\frac{R_2(t)-(c-a)t}{\sqrt{(a^2+\sigma^2)t}}<x\Big)\Longrightarrow\Phi(x/\delta)\quad(t\to\infty)$$
с некоторой асимптотической дисперсией δ^2 *тогда и только тогда, когда* $\delta^2\geq1$ *и*
$$\mathsf{P}\Big(\frac{\Lambda(t)-t}{\sqrt{t}}<x\Big)\Longrightarrow\Phi\Big(\frac{x|c-a|}{\sqrt{(\delta^2-1)(a^2+\sigma^2)}}\Big),\quad t\to\infty.$$

Это утверждение вытекает из Теоремы 9.2.2 и упомянутой выше теоремы Крамера–Леви о разложимости нормального закона только на нормальные компоненты, согласно которой случайная величина V, участвующая в Теореме 9.2.2, сама должна иметь нормальное распределение.

Теоремы 9.2.1 и 9.2.2 являются утверждениями типа центральной предельной теоремы. Следующую теорему, уточняющую и усиливающую хорошо известный результат О. Лундберга (Lundberg, 1964), можно считать законом больших чисел для обобщенных процессов риска.

Теорема 9.2.3. *Предположим, что* $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ *при* $t \to \infty$ *и* $c \neq a$. *Пусть* $D(t) > 0$ *– неограниченно возрастающая функция. Тогда случайная величина* Z, *гарантирующая сходимость*

$$\frac{R_2(t)}{D(t)} \implies Z \qquad (t \to \infty)$$

существует в том и только в том случае, когда существует неотрицательная случайная величина U *такая, что*

$$\frac{\Lambda(t)}{D(t)} \implies U \qquad (t \to \infty).$$

При этом $Z \stackrel{d}{=} (c-a)U$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что $R_2(t) = R_0(\Lambda(t))$, где $R_0(t) = ct - \sum_{j=1}^{N_1(t)} X_j$ – классический процесс риска с единичной интенсивностью страховых выплат, причем все рассматриваемые случайные величины и процессы независимы. Во-вторых, по неравенству Чебышева для любого $\epsilon > 0$ мы имеем

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{R_0(t)}{t} - (c-a)\Big| > \epsilon\Big) \leq \frac{a^2+\sigma^2}{t\epsilon^2} \longrightarrow 0$$

при $t \to \infty$. Следовательно, $R_0(t)/t \implies c - a$.

Теперь требуемый результат следует из Теоремы 7.8.1 , в которой $X(t) \equiv R_0(t)$, $A(t) \equiv C(t) \equiv 0$ (и, следовательно, $V(t) \equiv 0$), $B(t) \equiv t$, $W(t) \equiv c - a$, $M(t) \equiv \Lambda(t)$. При доказательстве необходимости слабая компактность на бесконечности семейства $\{\Lambda(t)/D(t)\}_{t>0}$ устанавливается точно так же, как в доказательстве Теоремы 9.2.1. Теорема доказана. □

9.3 Обобщенные процессы риска при наличии больших выплат

В предыдущем разделе мы рассмотрели асимптотическое поведение обобщенных процессов риска (9.1.5) при $t \to \infty$ в случае, когда страховые требования $X_1, X_2, \ldots$ имеют конечные дисперсии.

Дополняя и обобщая приведенные выше утверждения, в данном разделе мы рассмотрим асимптотическое поведение одномерных распределений обобщенных процессов риска, в которых распределения выплат принадлежат области притяжения устойчивого закона с характеристическим показателем $\alpha \in (1, 2]$.

Напомним, что функция $b(t)$, $t > 0$, называется *медленно меняющейся* (на бесконечности), если для любого $p > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{b(pt)}{b(t)} = 1.$$

Примером медленно меняющейся функции служит функция $b(t) = \log t$, $t > 0$.

Если существуют постоянные a_n и b_n такие, что распределения нормированных сумм $b_n^{-1}\Big(\sum_{j=1}^n X_j - a_n\Big)$ независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ слабо сходятся к некоторой функции распределения $G(x)$, то говорят, что общая функция распределения $F(x)$ случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ *притягивается* к $G(x)$. Множество всех функций распределения, притягивающихся к $G(x)$, называется *областью притяжения* функции распределения $G(x)$. Как показано в книге (Ибрагимов и Линник, 1971) (также см. (Tucker, 1968)), если функция распределения $F(x)$ принадлежит к области притяжения устойчивого закона $G_\alpha(x)$, то существует медленно меняющаяся функция $b(t)$ такая, что $b_n^{-1}\Big(\sum_{j=1}^n X_j - a_n\Big) \Longrightarrow Y_\alpha$ с $\mathsf{P}(Y_\alpha < x) = G_\alpha(x)$ при $b_n = b(n)n^{1/\alpha}$.

В данном разделе мы будем предполагать, что существуют $\alpha \in (1, 2]$, медленно меняющаяся функция $b(t)$, $t > 0$, и невырожденная случайная величина Y_α такие, что

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j - na}{b(n)n^{1/\alpha}} \Longrightarrow Y_\alpha \tag{9.3.1}$$

при $n \to \infty$.

Из классических результатов (Гнеденко и Колмогоров, 1949) при этом вытекает, что случайная величина Y_α имеет устойчивое распределение G_α с параметром α, характеристическая функция которого имеет вид

$$f_{Y_\alpha}(s) \;=\; \exp\Big\{i\gamma s - d|s|^\alpha\Big(1+\frac{i\beta s}{|s|}\tan\frac{\pi\alpha}{2}\Big)\Big\}, \quad s\in\mathbb{R}, \tag{9.3.2}$$

где $d \geq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \beta \leq 1$.

Если $\alpha = 2$, то в представлении (9.3.2) $f_{Y_2}(s)$ – характеристическая функция нормального закона.

Соотношение (9.3.1) означает, что общая функция распределения $F(x)$ случайных величин $X_1, X_2, \dots$ принадлежит к области притяжения устойчивого закона $G_\alpha(x)$. При этом, если $\alpha < 2$, то

$$\mathsf{P}(X_1 \geq x) \;=\; 1 - F(x) \;=\; \frac{\delta + o(1)}{x^\alpha}h(x) \tag{9.3.3}$$

при $x \to \infty$, где $\delta \in (0, \infty)$ и $h(x)$ – медленно меняющаяся функция (см, например, теорему 12 разд. IV.3 в книге (Петров, 1987)). Но соотношение (9.3.3) означает, что распределение страховых требований имеет "тяжелый" хвост, что может быть связано с наличием возможности очень больших страховых выплат. Подобные ситуации имеют место при так называемом страховании больших рисков, например, космических стартов.

В отличие от предыдущего раздела, здесь мы будем рассматривать асимптотическое поведение обобщенных процессов риска не при произвольном центрировании и нормировании, а при центрировании и нормировании неслучайными функциями специального вида. А именно, в соответствии с условием (9.3.1) мы будем рассматривать асимптотическое поведение случайных величин

$$Z(t) \;=\; \frac{R(t) - (c-a)t}{b(t)t^{1/\alpha}}. \tag{9.3.4}$$

Оказывается, что при таком специальном виде центрирующих и нормирующих функций условия сходимости приобретают довольно простую форму.

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема 9.3.1. *Предположим, что* $\Lambda(t) \to \infty$ *по вероятности при* $t \to \infty$*, а страховые требования* $X_1, X_2, \dots$ *удовлетворяют условию* (9.3.1). *Случайные величины* $Z(t)$*, определяемые соотношением* (9.3.4)*, сходятся по распределению к некоторой случайной величине* Z*,*

$$Z(t) \;\Longrightarrow\; Z \tag{9.3.5}$$

при $t \to \infty$, тогда и только тогда, когда существует случайная величина V такая, что

$$Z \overset{d}{=} -Y_\alpha + V, \tag{9.3.6}$$

где $\mathsf{P}(Y_\alpha < x) = G_\alpha(x)$, причем случайные величины Y_α и V в правой части (9.3.6) независимы, и

$$\frac{(c-a)(\Lambda(t)-t)}{b(t)t^{1/\alpha}} \Longrightarrow V, \quad t \to \infty. \tag{9.3.7}$$

Доказательство см. в работах (Кашаев и Королев, 2004), (Kashaev and Korolev, 2004).

Из Теоремы 9.3.1 вытекает следующий практический вывод. При больших значениях t имеет место следующие приближенные равенства по распределению:

$$R(t) \approx -b(t)t^{1/\alpha}Y_\alpha + (c-a)\Lambda(t) \approx b(t)t^{1/\alpha}(V - Y_\alpha) + (c-a)t,$$

причем слагаемые в правой части независимы. Другими словами, если обозначить $F_t(x) = \mathsf{P}(\Lambda(t) < x)$, $Q(x) = \mathsf{P}(V < x)$, то при каждом $x \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}(R(t) < x) \approx \Big[1 - G_\alpha\Big(-\frac{x}{b(t)t^{1/\alpha}}\Big)\Big] * F_t\Big(\frac{x}{c-a}\Big) \approx$$

$$\approx \Big[1 - G_\alpha\Big(-\frac{x-(c-a)t}{b(t)t^{1/\alpha}}\Big)\Big] * Q\Big(\frac{x-(c-a)t}{b(t)t^{1/\alpha}}\Big),$$

где $*$ – символ свертки функций распределения.

Замечание 9.3.1. Теорема 9.3.1 верна не только для ситуации, в которой $N(t)$ – процесс Кокса. Она остается верной для любой ситуации, в которой страховые требования поступают в соответствии с точечным процессом $N(t) = K(\Lambda(t))$, где $K(t)$ – произвольный считающий процесс, независимый от $\Lambda(t)$, и удовлетворяющий условиям

$$\frac{K(t)}{t} \Longrightarrow 1$$

и

$$\frac{K(t)-t}{b(t)t^{1/\alpha}} \Longrightarrow 0$$

при $t \to \infty$.

9.4 Обобщенные процессы риска с пакетным поступлением страховых требований

В качестве примера применения теоремы 9.3.1 рассмотрим ситуацию, в которой управляющий процесс $\Lambda(t)$ имеет вид

$$\Lambda(t) \;=\; \sum_{j=1}^{N_1'(t)} \Lambda_j, \qquad t \geq 0,$$

где $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, а $N_1'(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, независимый от случайных величин $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ Такой выбор процесса $\Lambda(t)$ означает, что страховые премии увеличиваются скачкообразно в моменты $t_1, t_2, \ldots$ скачков процесса $N_1'(t)$, причем в момент t_i реализуется случайная величина Λ_i и прирост премий составляет Λ_i. Одновременно возникает пакет, состоящий из случайного числа M_i страховых требований $X_{M_1+\ldots+M_{i-1}+1}, \ldots,\ X_{M_1+\ldots+M_i}$. При этом условное распределение случайной величины M_i при фиксированном значении Λ_i является пуассоновским с параметром Λ_i:

$$\mathsf{P}(M_i = n|\Lambda_i) \;=\; \mathsf{P}(N_1(\Lambda_i) = n|\Lambda_i) \;=\; \frac{e^{-\Lambda_i}\Lambda_i^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

в то время как ее безусловное распределение является смешанным пуассоновским:

$$\mathsf{P}(M_i = n) \;=\; \mathsf{P}(N_1(\Lambda_i) = n) \;=\int\limits_0^\infty \exp\{-\lambda\}\frac{\lambda^n}{n!}d\mathsf{P}(\Lambda_i < \lambda) \;=$$

$$=\int\limits_0^\infty \exp\{-\lambda\}\frac{\lambda^n}{n!}d\mathsf{P}(\Lambda_1 < \lambda), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

В силу независимости случайных величин $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ и независимости приращений процесса $N_1(t)$ случайные величины $M_1, M_2, \ldots$ независимы.

В отношении случайных величин $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ мы будем предполагать, что $\mathsf{E}\Lambda_1 = 1$ и выполнено условие, аналогичное (9.3.1):

$$\frac{\sum_{j=1}^n \Lambda_j - n}{b(n)n^{1/\alpha}} \;\Longrightarrow\; \widetilde{Y}_\alpha \quad (n \to \infty),$$

где $\widetilde{Y}_\alpha$ – устойчивая случайная величина с характеристической функцией

$$f_{\widetilde{Y}_\alpha}(s) \;=\; \exp\Big\{i\widetilde{\gamma}s - \widetilde{d}|s|^\alpha\Big(1 + \frac{i\widetilde{\beta}s}{|s|}\tan\frac{\pi\alpha}{2}\Big)\Big\}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Тогда можно показать (см. Кашаев и Королев, 2004), что выполнено условие

$$\frac{\Lambda(t) - t}{b(t)t^{1/\alpha}} \Longrightarrow \widetilde{Y}_\alpha \quad (t \to \infty).$$

При этом, применяя теорему 9.3.1, мы получаем, что

$$\frac{R(t) - (c-a)t}{b(t)t^{1/\alpha}} \Longrightarrow Y_\alpha^*$$

при $t \to \infty$, где Y_α^* – устойчивая случайная величина с характеристической функцией

$$f_{Y_\alpha^*}(s) \;=\; \exp\Big\{i\gamma^*s - d^*|s|^\alpha\Big(1 + \frac{i\beta^*s}{|s|}\tan\frac{\pi\alpha}{2}\Big)\Big\}, \quad s \in \mathbb{R},$$

а параметры γ^*, d^* и β^* имеют вид

$$\gamma^* = (c-a)\widetilde{\gamma} - \gamma, \qquad d^* = |c-a|^\alpha\widetilde{d} + d, \qquad \beta^* = \frac{\widetilde{d}|c-a|^{\alpha-1}\widetilde{\beta}(c-a) - d\beta}{d + \widetilde{d}|c-a|^\alpha}.$$

Более того, теорема 9.3.1 позволяет нам описать взаимосвязь характеристик “тяжести” хвостов распределений случайных величин X_1 и Λ_1 в описанной выше модели (см. соотношение (9.3.3)) с выбором констант, нормирующих соответствующий обобщенный процесс риска. А именно, предположим, что при $n \to \infty$ случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ удовлетворяют условию

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j - na}{b(n)n^{1/\alpha_X}} \Longrightarrow Y_{\alpha_X},$$

а случайные величины $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ – условию

$$\frac{\sum_{j=1}^n \Lambda_j - n}{b(n)n^{1/\alpha_\Lambda}} \Longrightarrow \widetilde{Y}_{\alpha_\Lambda}$$

с некоторыми $\alpha_X \in (1,2]$ и $\alpha_\Lambda \in (1,2]$. Мы по-прежнему интересуемся асимптотическим поведением случайных величин $Z(t)$, определяемых соотношением (9.3.4) с некоторым $\alpha \in (1,2]$. Теорема 9.3.1 позволяет полностью описать предельное поведение случайных величин $Z(t)$ в зависимости от соотношения между α, α_X и α_Λ.

А именно, если $1 < \alpha_X < \alpha_\Lambda \le 2$, то

$$Z(t) \implies Z \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } 1 < \alpha < \alpha_X, \\ -Y_{\alpha_X}, & \text{если } \alpha = \alpha_X, \end{cases}$$

и $Z(t)$ не имеет собственного предельного распределения при $\alpha_X < \alpha \le 2$.

Если $1 < \alpha_X = \alpha_\Lambda \le 2$, то

$$Z(t) \implies Z \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } 1 < \alpha < \alpha_X, \\ (c-a)\widetilde{Y}_{\alpha_\Lambda} - Y_{\alpha_X}, & \text{если } \alpha = \alpha_X, \end{cases}$$

где $\widetilde{Y}_{\alpha_\Lambda}$ и Y_{α_X} независимы, причем остальные параметры устойчивых случайных величин $\widetilde{Y}_{\alpha_\Lambda}$ и Y_{α_X} (γ, d и β) могут и не совпадать, и $Z(t)$ не имеет собственного предельного распределения при $\alpha_X < \alpha \le 2$.

Наконец, если $1 < \alpha_\Lambda < \alpha_X \le 2$, то

$$Z(t) \implies Z \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } 1 < \alpha < \alpha_\Lambda, \\ (c-a)Y_{\alpha_\Lambda}, & \text{если } \alpha = \alpha_\Lambda, \end{cases}$$

и $Z(t)$ не имеет собственного предельного распределения при $\alpha_\Lambda < \alpha \le 2$.

Другими словами, чтобы получить невырожденное предельное распределение, нормировка должна соответствовать более “тяжелому” хвосту, который и определяет вид предельного закона для обобщенного процесса риска с пакетным поступлением страховых требований.

9.5 Классические процессы риска со случайными премиями

9.5.1 Определение и простейшие свойства

В данном разделе мы рассмотрим еще одну модель процесса риска со случайными премиями, обобщающую классический процесс риска

$$R_0(t) = u + ct - \sum_{j=1}^{N_\lambda(t)} X_j \quad t \ge 0.$$

А именно, предположим, что процесс поступления премий страховой компании описывается не линейной функцией ct, но обобщенным пуассоновским процессом, так что процесс риска имеет вид

$$R(t) = u + \sum_{j=1}^{N^+(t)} Z_j - \sum_{j=1}^{N^-(t)} X_j, \qquad t \ge 0, \tag{9.5.1}$$

где $u > 0$, $Z_1, Z_2, \ldots$ – одинаково распределенные положительные случайные величины, $X_1, X_2, \ldots$ – одинаково распределенные положительные случайные величины, $N^+(t)$ и $N^-(t)$ – однородные пуассоновские процессы с интенсивностями λ^+ и λ^- соответственно. Предположим, что все случайные величины, вовлеченные в модель (9.5.1), независимы в совокупности.

Процесс риска (9.5.1) называется классическим процессом риска со случайными премиями. При этом, как и ранее, параметр $u > 0$ интерпретируется как начальный капитал страховой компании, Z_j – размер страховой премии по j-му контракту, X_j – размер j-ой страховой выплаты. Таким образом, процесс риска (9.5.1) имеет смысл резерва страховой компании в момент времени t.

Характеристическая функция случайной величины $R(t)$, очевидно, имеет вид

$$\mathsf{E}\exp\{isR(t)\} = e^{isu}\exp\{\lambda^+[f_Z(s) - 1]\}\exp\{\lambda^+[f_X(-s) - 1]\}, \qquad (9.5.2)$$

$s \in \mathbb{R}$, где $f_Z(s)$ и $f_X(s)$ – характеристические функции случайных величин Z_1 и X_1 соответственно. Продолжая (9.5.2), получим

$$\mathsf{E}\exp\{isR(t)\} =$$

$$= e^{isu}\exp\left\{(\lambda^+ + \lambda^-)\left[\left(\frac{\lambda^+}{\lambda^+ + \lambda^-}f_Z(s) + \frac{\lambda^-}{\lambda^+ + \lambda^-}f_X(-s)\right) - 1\right]\right\},$$

$s \in \mathbb{R}$, откуда вытекает возможность представления

$$R(t) \stackrel{d}{=} u + \sum_{j=1}^{N(t)} V_j, \quad t \geq 0,$$

где $N(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda^+ + \lambda^-$, $V_1, V_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$\mathsf{P}(V_1 < x) = \frac{\lambda^+}{\lambda^+ + \lambda^-}\mathsf{P}(Z_1 < x) + \frac{\lambda^-}{\lambda^+ + \lambda^-}\mathsf{P}(-X_1 < x),$$

причем величины $V_1, V_2, \ldots$ и процесс $N(t)$ – независимы. Другими словами, классический процесс риска со случайными премиями является обобщенным пуассоновским процессом, сдвинутым на u. Поэтому процесс риска (9.5.1) обладает всеми асимптотическими свойствами, присущими обобщенным пуассоновским процессам.

9.5.2 Вероятность разорения

Как и ранее, под *вероятностью неразорения* будем понимать величину

$$\phi(u) = \mathsf{P}\Big(\inf_{t\geq 0} R(t) \geq 0\Big)$$

и интерпретировать ее как меру платежеспособности страховой компании. Соответственно, величина

$$\psi(u) = 1 - \phi(u) = \mathsf{P}\Big(\inf_{t\geq 0} R(t) < 0\Big)$$

называется *вероятностью разорения*.

Используя математический аппарат анализа случайных блужданий, можно показать, что, если $\lambda^+\mathsf{E}Z_1 \leq \lambda^-\mathsf{E}X_1$, то $\psi(u) = 1$ для любого $u > 0$. Условие

$$\lambda^+\mathsf{E}Z_1 > \lambda^-\mathsf{E}X_1 \tag{9.5.3}$$

называют условием *неразорения в среднем*. Всюду далее в этом разделе мы предполагаем, что условие (9.5.3) выполнено.

Функции распределения случайных величин Z_1 и X_1 обозначим $F_Z(x)$ и $F_X(x)$ соответственно.

В работе (Бойков, 2003) доказаны следующие утверждения.

Теорема 9.5.1. *Вероятность неразорения $\phi(u)$ удовлетворяет интегральному уравнению*

$$(\lambda^+ + \lambda^-)\phi(u) = \lambda^+ \int_0^\infty \phi(u+x)dF_Z(x) + \lambda^- \int_0^u \phi(u-x)dF_Z(x).$$

Пусть R – показатель Крамера–Лундберга для модели (9.5.1), то есть R – положительное решение уравнения

$$\lambda^-[\mathsf{E}e^{-RZ_1} - 1] + \lambda^+[\mathsf{E}e^{RX_1} - 1] = 0$$

или, что эквивалентно, положительное решение уравнения

$$\lambda^- \int_0^\infty \mathsf{E}e^{-Rx}dF_Z(x) + \lambda^+ \int_0^\infty \mathsf{E}e^{Rx}dF_X(x) = \lambda^+ + \lambda^-.$$

В рамках модели классического процесса риска со случайными премиями справедлив следующий аналог неравенства Лундберга для вероятности разорения.

Теорема 9.5.2. *Вероятность разорения $\psi(u)$ удовлетворяет неравенству*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}.$$

В некоторых конкретных случаях удается получить явное представление вероятности разорения в модели классического процесса риска со случайными премиями. В частности, в работе (Бойков, 2003) показано, что, если $F_Z(x) = 1 - e^{-\beta x}$ и $F_X(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, $x \geq 0$, то

$$\psi(u) = \frac{(\alpha+\beta)\lambda^-}{(\lambda^- + \lambda^+)\alpha} \exp\Big\{ - \frac{\lambda^+\alpha - \lambda^-\beta}{\lambda^- + \lambda^+} \cdot u \Big\}. \tag{9.5.4}$$

Заметим, что условие (9.5.3) в данном случае приобретает вид $\lambda^+\alpha - \lambda^-\beta > 0$.

В работе (Темнов, 2004) получен аналог представления Поллачека–Хинчина–Беекмана для вероятности разорения в модели классического процесса риска со случайными премиями.

В заключение этого раздела заметим, что, динамические модели страхования со случайными премиями (классические процессы риска со случайными премиями) представляют собой не что иное как вариации на тему хорошо знакомой со школьных времен задачи о бассейне, в который вода вливается и из которого она выливается случайными порциями в случайные моменты времени. Такие модели хорошо известны и изучены, тем не менее, адекватность таких моделей применительно к страховым задачам представляется весьма сомнительной вследствие постулируемой стохастической независимости процессов премий и выплат, существенно облегчающей их математическое исследование. Действительно, реально эти процессы никак не могут быть независимыми хотя бы потому, что моментов выплат не может быть больше, чем моментов поступления премий (заключения договоров). Однако такие модели оказываются весьма реалистичными инструментами, позволяющими описать процесс спекуляции, основанный на использовании возможности арбитража. Это применение классических процессов риска со случайными премиями рассматривается в следующем разделе.

9.5.3 Описание модели спекулятивной деятельности пункта обмена валют

В данном разделе процессы риска со случайными премиями используются в качестве математической модели процесса извлечения спекулятивной прибыли. Изложение базируется на материалах работ (Артюхов и др., 2005) и (Королев и др., 2005).

Рассмотрим процесс получения спекулятивной прибыли более подробно. Основной закон образования спекулятивной прибыли известен с давних времен: надо сначала “дешево” купить какой-то товар, а затем его же "дорого" продать (так называемая стратегия игры на повышение). Спекулятивная прибыль в указанном случае будет определяться разницей курсов продажи и покупки соответствующего товара (маржей). В связи с этим заметим, что явление спекуляции можно наблюдать в любой отрасли экономики. Рынок ценных бумаг обогатил теорию спекуляции еще одним законом образования спекулятивной прибыли: продать товар, пока он дорого стоит и снова купить этот же товар, когда цена на него упадет (стратегия игры на понижение). Таким образом, все возможное разнообразие спекулятивных стратегий, фактически, сводится к тем или иным комбинациям указанных выше двух основных "законов" извлечения прибыли при их диверсификации по различным рынкам, видам финансовых инструментов и возможным сочетаниям финансовых инструментов во времени и между собой.

Одним из мест, в которых существует возможность проводить спекулятивные операции в обоих направлениях, то есть играть как на повышение, так на понижение, является пункт обмена валют.

Предположим, что курс на валютном рынке остается неизменным на рассматриваемом промежутке времени. В этом случае существует возможность как купить, так и продать любое количество валюты по цене c^* за единицу валюты. Назовем величину c^* ценой обмена.

Пусть в начальный момент времени пункт обмена валют обладает некоторой суммой денег. Часть денег обменивается на валюту по цене обмена c^* на валютном рынке. Затем обменный пункт выставляет свои цены на покупку и продажу, которые соответственно меньше и больше, чем c^*. При этом цены покупки и продажи пункта обмена валют должны быть определены таким образом, чтобы к концу отчетного периода получить максимально возможную прибыль от проведенных операций.

Опишем формально рассматриваемую модель. Определим при $\tau \geq 0$ случайные процессы

$$M(\tau) = u + c^+ \sum_{j=1}^{N^+(\tau)} X_j^+ - c^- \sum_{j=1}^{N^-(\tau)} X_j^- \tag{9.5.5}$$

и

$$G(\tau) = v - \sum_{j=1}^{N^+(\tau)} X_j^+ + \sum_{j=1}^{N^-(\tau)} X_j^-, \tag{9.5.6}$$

(как и ранее, считаем, что $\sum_{j=1}^{0}(\cdot) = 0$). Здесь $u \geq 0$ имеет смысл начального капитала пункта обмена валют, величина $v \geq 0$ определяет начальный объем имеющейся валюты, положительные числа c^+ и c^- имеют смысл цены продажи и цены покупки валюты обменным пунктом соответственно, неотрицательные случайные величины X_k^+ и X_l^-

– это количество валюты, проданной k-тому клиенту и купленной у l-того клиента соответственно, а целочисленные случайные процессы $N^+(\tau)$ и $N^-(\tau)$ соответственно определяют количество клиентов, пришедших в пункт обмена валют для того, чтобы купить или продать валюту. Везде далее предполагается, что все перечисленные случайные величины и процессы являются независимыми в совокупности, а каждая из последовательностей $\{X_n^+\}_{n\geq 1}$ и $\{X_n^-\}_{n\geq 1}$ состоит из одинаково распределенных случайных величин. Таким образом, процессы $M(\tau)$ и $G(\tau)$ характеризуют капитал компании и объем имеющейся валюты в некоторый момент времени.

В дальнейшем нас будут интересовать капитал компании и валютный резерв в некоторый фиксированный момент времени t. Пусть

$$M \equiv M(t) = u + c^+ \sum_{j=1}^{N^+} X_j^+ - c^- \sum_{j=1}^{N^-} X_j^-, \tag{9.5.7}$$

$$G \equiv G(t) = v - \sum_{j=1}^{N^+} X_j^+ + \sum_{j=1}^{N^-} X_j^-, \tag{9.5.8}$$

где N^+ и N^- – проекции (значения) процессов $N^+(\tau)$ и $N^-(\tau)$ в момент времени t. Везде далее нам будет удобно представлять числа c^+ и c^- в виде

$$c^+ = c^* + \delta^+, \qquad c^- = c^* - \delta^-,$$

где $\delta^+ \geq 0$ и $\delta^- \geq 0$ – величины, на которые цена обмена c^* отличается от цен продажи и покупки, выставленных обменным пунктом, дающие компании возможность получать прибыль за счет спекуляции. Целью компании является определение δ^+ и δ^- таким образом, чтобы прибыль от деятельности была максимальной.

Чтобы формализовать зависимость между спросом и предложением, заметим, что при увеличении цены продажи c^+ количество клиентов, желающих купить у обменного пункта валюту, в среднем за единицу времени уменьшается: желающих купить валюту по большей цене меньше, естественно, меньше, чем желающих купить валюту по меньшей цене. Другими словами, интенсивность потока клиентов-покупателей уменьшается с ростом c^+. С другой стороны, очевидно, при приближении цены продажи к цене обмена c^*, интенсивность потока клиентов должна увеличиться. Таким образом, вполне разумным предположением является обратная (монотонно убывающая) зависимость интенсивности потока клиентов, покупающих валюту, от разницы δ^+ между ценой продажи и ценой обмена. Аналогичные рассуждения относятся и к зависимости среднего за единицу времени числа клиентов, продающих валюту обменному пункту, от маржи δ^-: интенсивность потока клиентов, продающих валюту, от разницы δ^- между ценой продажи и ценой обмена монотонно убывает с ростом δ^-.

9.5.4 Постановка задачи оптимизации спекулятивной прибыли

Выше мы предположили, что обменный пункт имеет возможность в любой момент времени обменять валюту на рубли по цене c^*. В этом случае суммарные активы компании к некоторому моменту времени (см. (9.5.7) и (9.5.8) можно представить в рублевом эквиваленте в следующем виде:

$$M + c^*G = u + c^*v + \delta^+ \sum_{j=1}^{N^+} X_j^+ + \delta^- \sum_{j=1}^{N^-} X_j^- .$$

Нашей дальнейшей целью будет являться описание распределения случайной величины

$$R = \delta^+ \sum_{j=1}^{N^+} X_j^+ + \delta^- \sum_{j=1}^{N^-} X_j^- , \tag{9.5.9}$$

характеризующей прибыль компании в ситуации, когда случайные величины N^+ и N^- имеют пуассоновское распределение с параметрами λ^+ и λ^-, которые, как уже отмечалось выше, являются убывающими функциями от δ^+ и δ^- соответственно.

Рассмотрим характеристическую функцию случайной величины R. Поскольку все случайные величины, стоящие в правой части (9.5.9), являются независимыми, для всех $s \in \mathbb{R}$ имеем

$$\mathsf{E}e^{isR} = \exp\Big\{\lambda^+ \Big(f_+(\delta^+ s) - 1\Big) + \lambda^- \Big(f_-(\delta^- s) - 1\Big)\Big\} =$$

$$= \exp\left\{\Big(\lambda^+ + \lambda^-\Big)\left(\frac{\lambda^+}{\lambda^+ + \lambda^-} f_+(\delta^+ s) + \frac{\lambda^-}{\lambda^+ + \lambda^-} f_-(\delta^- s) - 1\right)\right\},$$

где $f_+(s)$ и $f_-(s)$ – характеристические функции случайных величин X_1^+ и X_1^- соответственно. Таким образом, мы получаем, что (напомним, что символом $\stackrel{d}{=}$ мы обозначаем равенство распределений)

$$R \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{N} Y_j, \tag{9.5.10}$$

где N имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda^+ + \lambda^-$, случайные величины $N, Y_1, Y_2, \ldots$ независимы и $Y_1, Y_2, \ldots$ имеют одинаковую функцию распределения (см., например, (Лукач, 1979), стр. 31)

$$\mathsf{P}\left(Y_1 < x\right) = \frac{\lambda^+}{\lambda^+ + \lambda^-}\mathsf{P}\left(\delta^+ X_1^+ < x\right) + \frac{\lambda^-}{\lambda^+ + \lambda^-}\mathsf{P}\left(\delta^- X_1^- < x\right), \quad (9.5.11)$$

которая является не чем иным, как смесью функций распределения $F_+(x) = \mathsf{P}(\delta^+ X_1^+ < x)$ и $F_-(x) = \mathsf{P}(\delta^- X_1^- < x)$.

Из соотношений (9.5.10) и (9.5.11) вытекает общий вид функции распределения случайной величины R. Поскольку справедлива формула

$$(F_1 + F_2)^{*n}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(F_1^{*k} * F_2^{*(n-k)}\right)(x),$$

где символ $H^{*n}(x)$ обозначает n-кратную свертку функции $H(x)$ с самой собой:

$$H^{*n}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H^{*(n-1)}(x-z)dH(z),$$

$H^{*0}(x)$ – функция с единственным скачком в нуле, мы получаем

$$\mathsf{P}\left(R < x\right) = e^{-(\lambda^+ + \lambda^-)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\lambda^+)^k (\lambda^-)^{n-k} \left(F_+^{*k} * F_-^{*(n-k)}\right)(x). \quad (9.5.12)$$

Напомним, что целью компании является определение δ^+ и δ^- таким образом, чтобы прибыль от деятельности была в некотором смысле максимальной. Это требование можно сформулировать в виде следующих задач:

Задача 1: определить δ^+ и δ^- таким образом, чтобы максимизировать ожидаемую прибыль:

$$\mathsf{E}R \to \max_{\delta^+, \delta^-}; \quad (9.5.13)$$

Задача 2: найти значения δ^+ и δ^-, обеспечивающие для некоторого $r \geq 0$ и близкой к единице величины γ соотношение

$$\mathsf{P}(R \geq r) \geq \gamma, \quad (9.5.14)$$

то есть требуется найти курсы покупки и продажи валюты, которые дают возможность получить заданную прибыль с достаточно большой вероятностью. Кроме того, соотношение (9.5.14) дает возможность оценить величину прибыли при заданных значениях δ^+ и δ^-.

9.5.5 Решение, основанное на нормальной аппроксимации

Для ожидаемой прибыли справедливо очевидное равенство

$$\mathsf{E}R = \lambda^+\delta^+\mathsf{E}X_1^+ + \lambda^-\delta^-\mathsf{E}X_1^-. \tag{9.5.15}$$

Поскольку λ^+ и λ^- являются функциями от δ^+ и δ^- соответственно, решение задачи (9.5.13) в общем случае (без дополнительных предположений о конкретном виде зависимости λ^+ и λ^- от δ^+ и δ^-) не представляется возможным. Более того, при решении задачи (9.5.14) также возникают вполне очевидные затруднения, поскольку даже для простейших видов распределений случайных величин X_1^+ и X_1^- вычисление функции распределения пуассоновской случайной суммы R в явном виде по формуле (9.5.12) крайне затруднительно. Поэтому имеет смысл каким-либо образом оценить функцию распределения R и решить задачу (9.5.14) с помощью полученной оценки. В частности, мы можем воспользоваться аналогом неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм, для чего нам понадобится следующее утверждение.

Будем обозначать через $\Phi(x)$ и u_q функцию стандартного нормального распределения и q-квантиль стандартного нормального распределения соответственно.

Лемма 9.5.1. *Предположим, что* $\mathsf{E}|Y_1|^3 < \infty$. *Тогда*

$$\sup_x \left| \mathsf{P}\left(\frac{R - (\lambda^+ + \lambda^-)\mathsf{E}Y_1}{\sqrt{(\lambda^+ + \lambda^-)\mathsf{E}Y_1^2}} < x \right) - \Phi(x) \right| \le \frac{C_0 L_1^3}{\sqrt{\lambda^+ + \lambda^-}},$$

где C_0 *– постоянная из неравенства Берри–Эссеена* ($0.4097 < C_0 \le 0.7056$), *а* L_1^3 *– нецентральная ляпуновская дробь:*

$$L_1^3 = \frac{\mathsf{E}|Y_1|^3}{(\mathsf{E}Y_1^2)^{3/2}}.$$

Доказательство см. раздел 2.4.

Введем обозначения: $\mu_k^+ = \mathsf{E}(X_1^+)^k$ и $\mu_k^- = \mathsf{E}(X_1^-)^k$. Предположим, что $\mu_3^+ < \infty$ и $\mu_3^- < \infty$. Используя Лемму 9.5.1, неотрицательность случайной величины Y_1 и очевидное соотношение

$$\mathsf{E}Y_1^k = \frac{\lambda^+(\delta^+)^k\mu_k^+ + \lambda^-(\delta^-)^k\mu_k^-}{\lambda^+ + \lambda^-},$$

справедливое для любого k, получаем следующую равномерную оценку:

$$\sup_x \left| \mathsf{P}\left(\frac{R - (\lambda^+\delta^+\mu_1^+ + \lambda^-\delta^-\mu_1^-)}{\sqrt{\lambda^+(\delta^+)^2\mu_2^+ + \lambda^-(\delta^-)^2\mu_2^-}} < x \right) - \Phi(x) \right| \le$$

$$\le C_0 \frac{\lambda^+(\delta^+)^3\mu_3^+ + \lambda^-(\delta^-)^3\mu_3^-}{\left(\lambda^+(\delta^+)^2\mu_2^+ + \lambda^-(\delta^-)^2\mu_2^-\right)^{3/2}}. \tag{9.5.16}$$

Соотношение (9.5.16) дает возможность выписать двустороннюю оценку распределения прибыли для задачи (9.5.14). Предположим, требуется оценить величину r прибыли компании с вероятностью γ, близкой к единице, то есть

$$\mathsf{P}(R \ge r) = \gamma. \tag{9.5.17}$$

Из (9.5.16) следует, что

$$\Phi\left(\frac{r - (\lambda^+\delta^+\mu_1^+ + \lambda^-\delta^-\mu_1^-)}{\sqrt{\lambda^+(\delta^+)^2\mu_2^+ + \lambda^-(\delta^-)^2\mu_2^-}} \right) - C_0 \frac{\lambda^+(\delta^+)^3\mu_3^+ + \lambda^-(\delta^-)^3\mu_3^-}{\left(\lambda^+(\delta^+)^2\mu_2^+ + \lambda^-(\delta^-)^2\mu_2^-\right)^{3/2}} \le$$

$$\le\; 1 - \gamma \;\le$$

$$\le \Phi\left(\frac{r - (\lambda^+\delta^+\mu_1^+ + \lambda^-\delta^-\mu_1^-)}{\sqrt{\lambda^+(\delta^+)^2\mu_2^+ + \lambda^-(\delta^-)^2\mu_2^-}} \right) + C_0 \frac{\lambda^+(\delta^+)^3\mu_3^+ + \lambda^-(\delta^-)^3\mu_3^-}{\left(\lambda^+(\delta^+)^2\mu_2^+ + \lambda^-(\delta^-)^2\mu_2^-\right)^{3/2}}.$$

Предположим, что

$$C_0 \frac{\lambda^+(\delta^+)^3\mu_3^+ + \lambda^-(\delta^-)^3\mu_3^-}{\left(\lambda^+(\delta^+)^2\mu_2^+ + \lambda^-(\delta^-)^2\mu_2^-\right)^{3/2}} - \gamma < 0 \tag{9.5.18}$$

и

$$1 - \gamma - C_0 \frac{\lambda^+(\delta^+)^3\mu_3^+ + \lambda^-(\delta^-)^3\mu_3^-}{\left(\lambda^+(\delta^+)^2\mu_2^+ + \lambda^-(\delta^-)^2\mu_2^-\right)^{3/2}} > 0. \tag{9.5.19}$$

Тогда, для удобства полагая $u_q = u(q)$, $q \in (0,1)$, мы получаем

$$u\Bigg(1 - \gamma - C_0 \frac{\lambda^+(\delta^+)^3\mu_3^+ + \lambda^-(\delta^-)^3\mu_3^-}{\left(\lambda^+(\delta^+)^2\mu_2^+ + \lambda^-(\delta^-)^2\mu_2^-\right)^{3/2}}\Bigg) \sqrt{\lambda^+(\delta^+)^2\mu_2^+ + \lambda^-(\delta^-)^2\mu_2^-} +$$

$$+ \lambda^+\delta^+\mu_1^+ + \lambda^-\delta^-\mu_1^- \le r \le \lambda^+\delta^+\mu_1^+ + \lambda^-\delta^-\mu_1^- +$$

$$+ u\Bigg(1 - \gamma + C_0 \frac{\lambda^+(\delta^+)^3\mu_3^+ + \lambda^-(\delta^-)^3\mu_3^-}{\left(\lambda^+(\delta^+)^2\mu_2^+ + \lambda^-(\delta^-)^2\mu_2^-\right)^{3/2}}\Bigg) \sqrt{\lambda^+(\delta^+)^2\mu_2^+ + \lambda^-(\delta^-)^2\mu_2^-}. \tag{9.5.20}$$

Этот результат дает возможность определить пределы будущей прибыли при установленных δ^+ и δ^- и известных моментах μ_k^+ и μ_k^- $(1 \leq k \leq 3)$, которые могут быть оценены статистически. Заметим также, что неравенство (9.5.20) можно уточнить, имея дополнительную информацию о моментах μ_k^+ и μ_k^- $(k \geq 4)$.

Соотношение (9.5.16) также дает возможность оценить оптимальные (в смысле задачи (9.5.14) или (9.5.17) значения курсов продажи и покупки валюты, основанные на нормальной аппроксимации

$$\frac{r - (\lambda^+\delta^+\mu_1^+ + \lambda^-\delta^-\mu_1^-)}{\sqrt{\lambda^+(\delta^+)^2\mu_2^+ + \lambda^-(\delta^-)^2\mu_2^-}} \approx u_{1-\gamma}. \tag{9.5.21}$$

Так же, как и при решении задачи (9.5.13), определение оптимальных значений δ^+ и δ^- требует дополнительных предположений о виде зависимости среднего количества клиентов компании от маржи. Рассмотрим некоторые виды такой зависимости, но прежде всего, опишем наиболее значимые ее черты. Во-первых, как уже отмечалось ранее, согласно закону спроса, при изменении цены товара спрос на него меняется в противоположном направлении, поэтому λ^+ и λ^- должны быть связаны с δ^+ и δ^- обратно монотонной зависимостью. Второй важной чертой, характеризующей зависимость спроса на товар от его цены является эластичность товара (чувствительность спроса на товар к изменению его цены). Товар является совершенно неэластичным, если даже сильное изменение цены товара не приводит к изменению спроса на него. График функции спроса на совершенно неэластичный товар представляет собой линию, параллельную оси ординат. Товар является совершенно эластичным, если даже бесконечно малое изменение его цены приводит к бесконечно большому изменению спроса на него. График функции спроса в этом случае имеет вид линии, параллельной оси абсцисс. Таким образом, эластичность товара определяет угол наклона графика функции спроса к оси абсцисс, а также скорость убывания функции спроса. Если в качестве товара выступает валюта, то невозможно определить в общем случае, является ли она эластичным или неэластичным товаром. Для установления этого свойства необходимо рассматривать конкретную валюту в условиях конкретной страны. Например, в России, где доллар почти является национальной валютой, спрос на него будет неэластичным, в то время как во Франции спрос на те же доллары будет почти совершенно эластичным ввиду особого отношения французов к данной валюте. Несомненно, что показатель эластичности может меняться со временем. Так, в России после введения евро спрос на доллары стал менее неэластичным, поскольку появилась альтернативная валюта, в которой можно хранить свои сбережения. Из общих соображений по поводу изменения спроса на товар при изменении его цены можно высказать предположение о том, что, чем больше относительное изменение величины маржи обменного пункта, тем больше изменение величины спроса. Поскольку в различных условиях функция спроса на товар имеет разный вид, мы рассмотрим несколько наиболее характерных видов зависимостей интенсивности потока клиентов от надбавок δ^+ и δ^- обменного пункта. Везде далее мы будем предполагать, что $\delta^+ = \delta^- = \delta$, то есть ситуация на валютном рынке достаточно стабильна.

9.5.6 Примеры

В данном разделе мы рассмотрим несколько модельных примеров зависимости интенсивностей потоков клиентов λ^+ и λ^- от величины δ. На практике подобные виды зависимостей могут быть получены, исходя из статистических соображений. Нашей целью будет являться решение задач (9.5.13) и (9.5.14) при заданной взаимосвязи интенсивности потока клиентов и маржи. Мы будем предполагать, что при значениях δ, больших некоторого критического уровня $\delta_0 \le c^*$, поток клиентов иссякает (то есть $\lambda^+ = \lambda^- = 0$ при $\delta > \delta_0$). При этом, величина δ_0 может определяться как из чисто математических соображений, так и из экономических, связанных, прежде всего, с эластичностью валюты.

Во всех нижеследующих примерах значения рассматриваемых параметров выбирались из соображения наибольшей наглядности рисунков.

Пример 9.5.1. Предположим, что λ^+ и λ^- линейно зависят от δ:

$$\lambda^+(\delta) = b^+ - a^+\delta \ , \qquad \lambda^-(\delta) = b^- - a^-\delta \ , \tag{9.5.22}$$

где a^+, a^-, b^+, b^- – некоторые положительные константы. Данная зависимость представляет собой аналитическое выражение классической кривой спроса. Ее основным свойством является то, что величина изменения спроса зависит только от величины изменения маржи и не зависит от текущего уровня спроса. То есть эластичность спроса по цене является одинаковой для каждой точки рассматриваемого вида кривой спроса.

В этом случае для ожидаемой прибыли справедливо равенство (ср. (9.5.15))

$$\mathsf{E}R = \delta \cdot \left(b^+\mu_1^+ + b^-\mu_1^- - \left(a^+\mu_1^+ + a^-\mu_1^- \right) \delta \right) .$$

Правая часть этого равенства представляет собой квадратическую функцию от δ, поэтому максимум ожидаемой прибыли существует и достигается при

$$\delta_1 = \frac{b^+\mu_1^+ + b^-\mu_1^-}{2(a^+\mu_1^+ + a^-\mu_1^-)},$$

а для величины δ_0 при этом справедливо равенство

$$\delta_0 = \frac{b^+\mu_1^+ + b^-\mu_1^-}{a^+\mu_1^+ + a^-\mu_1^-}.$$

Соотношение (9.5.21) при заданных в (9.5.22) зависимостях λ^+ и λ^- от δ принимает вид:

$$r \approx \delta \cdot \left[\left(b^+ - a^+\delta\right)\mu_1^+ + \left(b^- - a^-\delta\right)\mu_1^-\right] +$$

$$+u_{1-\gamma} \cdot \sqrt{\delta^2 \cdot \left[(b^+ - a^+\delta)\,\mu_2^+ + (b^- - a^-\delta)\,\mu_2^-\right]}. \tag{9.5.23}$$

С помощью соотношения (9.5.23) легко (например, численно) найти значение оптимальной (в смысле (9.5.14)) маржи δ_2, максимизирующей с заданной близкой к единице вероятностью γ гарантированную прибыль r.

Примеры 9.5.2 и 9.5.3 иллюстрируют задачи, рассмотренные в примере 9.5.1, для других видов зависимости λ^+ и λ^- от δ. В отличие от зависимости, рассмотренной выше, в нижеследующих случаях величина изменения спроса зависит не только от величины изменения маржи, но и от текущего значения спроса. Это предположение является более реалистичным: если величина изменения маржи составляет существенную часть цены покупки (продажи), то естественно, что спрос изменится сильнее, чем если величина изменения маржи составляет незначительную часть существующего уровня цены покупки (продажи). Таким образом, эластичность спроса по цене при таких видах зависимости определятся текущим уровнем цены покупки (продажи): при разных значениях цены спрос может быть как эластичным, так и неэластичным, что соответствует реальной ситуации на рынке обмена валют. По своей сути, виды зависимостей, рассмотренные в примерах 9.5.2, 9.5.3 и 9.5.4, отличаются друг от друга только точкой, в которой характеристика валюты меняется с эластичной на неэластичную.

Пример 9.5.2. Пусть

$$\lambda^+(\delta) = \frac{b^+}{\delta} \quad \text{и} \quad \lambda^-(\delta) = \frac{b^-}{\delta}, \tag{9.5.24}$$

то есть среднее количество клиентов, обратившихся в пункт обмена валют, обратно пропорционально марже.

В данном случае для ожидаемой прибыли компании будет иметь месть равенство

$$\mathsf{E}R = b^+\mu_1^+ + b^-\mu_1^-.$$

Таким образом, если между интенсивностью потока клиентов и маржей наблюдается зависимость (9.5.24), то компания никак не может влиять на ожидаемую прибыль.

Из соотношений (9.5.21) и (9.5.24) имеем:

$$r \approx b^+\mu_1^+ + b^-\mu_1^- + u_{1-\gamma}\sqrt{b^+\mu_2^+ + b^-\mu_2^-} \cdot \sqrt{\delta}. \tag{9.5.25}$$

Заметим, что при $\gamma \geq 1/2$ квантиль $u_{1-\gamma}$ будет неположительной. Таким образом, соотношение (9.5.25) имеет смысл лишь при условии

$$r \leq b^+\mu_1^+ + b^-\mu_1^-. \tag{9.5.26}$$

Ограничение (9.5.26) возникает в силу приближения распределения прибыли, сосредоточенного на неотрицательной полуоси, нормальным распределением, симметричным, относительно нуля.

Очевидно, что в этом случае обменному пункту выгодно выбирать наименьшую из приемлемых для него маржей.

Пример 9.5.3. Пусть λ^+ и λ^- экспоненциально убывают по δ:

$$\lambda^+(\delta) = \alpha^+e^{-\kappa^+\delta}, \qquad \lambda^-(\delta) = \alpha^-e^{-\kappa^-\delta}, \tag{9.5.27}$$

где α^+, α^-, κ^+ и κ^- – некоторые положительные числа.

Ожидаемая прибыль компании равняется в этом случае

$$\mathsf{E}R = \delta \cdot \left(\alpha^+e^{-\kappa^+\delta}\mu_1^+ + \alpha^-e^{-\kappa^-\delta}\mu_1^-\right).$$

Соотношение (9.5.21) при условии (9.5.27) имеет вид

$$r \approx \delta \cdot \left(\alpha^+e^{-\kappa^+\delta}\mu_1^+ + \alpha^+e^{-\kappa^-\delta}\mu_1^-\right) +$$

$$+u_{1-\gamma}\delta \cdot \sqrt{\alpha^+e^{-\kappa^+\delta}\mu_2^+ + \alpha^-e^{-\kappa^-\delta}\mu_2^-}\ .$$

Заметим, что, вообще говоря, оптимальная (в том или ином смысле) маржа может не являться единственной. Так, например, мы можем назначить цену покупки и продажи валюты таким образом, чтобы получить необходимую прибыль за счет притока дополнительных клиентов, а можем, наоборот, увеличить маржу и получить прибыль за счет выгодной разницы курсов. Простейшей иллюстрацией этого утверждения является пример 9.5.2.

Возможны и иные виды зависимостей, удовлетворяющих основному условию, при котором λ^+ и λ^- убывают как функции δ.

9.5.7 Решение, основанное на экспоненциальных оценках вероятностей больших уклонений пуассоновских случайных сумм

Введем обозначения $\mathsf{E}Y_1 = a$, $\mathsf{E}Y_1^2 = b$, тогда $\mathsf{E}R = (\lambda^+ + \lambda^-)a$, $G^2 = \mathsf{D}R = (\lambda^+ + \lambda^-)b$. Для решения задачи 2 (см. (9.5.14)) можно использовать следующий результат.

Теорема 9.5.3. *Пусть* $\mathsf{P}(Y_1 \le C) = 1$. *Тогда для всех* $x \ge 0$ *справедливо неравенство*

$$\mathsf{P}(R - (\lambda^+ + \lambda^-)a \ge Gx) \le \exp\left\{-x^2\frac{(1+\zeta)\ln(1+\zeta') - \zeta'}{\zeta^2}\right\},$$

где

$$\zeta = \frac{xC}{G}, \qquad \zeta' = \min\{e-1, \zeta\}.$$

Доказательство сходно с доказательством Теоремы 5.8.3.

Как и ранее, мы будем использовать обозначения $\mu_k^+ = \mathsf{E}(X_1^+)^k$, $\mu_k^- = \mathsf{E}(X_1^-)^k$. В терминах случайных величин Y_j, введенных в (9.5.10) и (9.5.11), мы можем записать

$$\mathsf{P}(R < r) = \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^N Y_i - (\lambda^+ + \lambda^-)a < r - (\lambda^+ + \lambda^-)a\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^N Z_i + (\lambda^+ + \lambda^-)a > -r + (\lambda^+ + \lambda^-)a\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left\{\frac{\sum_{i=1}^N Z_i + (\lambda^+ + \lambda^-)a}{G} > \frac{-r + (\lambda^+ + \lambda^-)a}{G}\right\}, \tag{9.5.28}$$

где $Z_i = -Y_i$, $\mathsf{E}Z_i = -a$. Очевидно, что $|Z_i| = |Y_i| \le$. Пусть

$$x = \frac{-r + (\lambda^+ + \lambda^-)a}{G}. \tag{9.5.29}$$

Используя Теорему 9.5.3, неотрицательность случайной величины Y_1 и соотношение

$$\mathsf{E}(Y_1)^k = \frac{\lambda^+(\delta^+)^k\mu_k^+ + \lambda^-(\delta^-)^k\mu_k^-}{\lambda^+ + \lambda^-},$$

справедливое для любого k, для всех $r \le \mathsf{E}R = \delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^-$ получаем

$$\mathsf{P}(R < r) < \exp\left\{-x^2\frac{(1+\zeta)\ln(1+\zeta') - \zeta'}{\zeta^2}\right\}$$

Учитывая соотношение

$$x = \frac{\delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^- - r}{G}$$

и обозначения

$$\zeta = \frac{xC}{G},\ \zeta' = \min\{e-1, \zeta\},$$

для всех $r \leq \delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^-$ получим: если $r \leq \delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^- - \frac{(e-1)G^2}{C}$, то

$$\mathsf{P}(R < r) < \exp\left\{-\frac{G^2}{C^2}[(1+\zeta)\ln(1+\zeta) - \zeta]\right\};$$

если $\delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^- - \frac{(e-1)G^2}{C} < r$, то

$$\mathsf{P}(R < r) < \exp\left\{-\frac{G^2}{C^2}(\zeta + 2 - e)\right\}. \qquad (9.5.30)$$

При этом справедливо представление

$$\zeta = \frac{(\delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^- - r)C}{G^2}.$$

Напомним, что нашей целью было получить некоторую оценку распределения прибыли R, в частности решить задачу (9.5.14). Соотношение (9.5.30) дает возможность выписать нижнюю оценку распределения прибыли компании, а именно,

$$\mathsf{P}(R \geq r) \geq \gamma = 1 - \exp\left\{-\frac{G^2}{C^2}((1+\zeta)\ln(1+\zeta') - \zeta')\right\}. \qquad (9.5.31)$$

Чтобы оптимальным образом выбрать маржу с целью максимизации величины r по данной формуле при величине γ, близкой к 1, можно воспользоваться неравенством (9.5.30). С этой целью необходимо разрешить уравнение (9.5.31) относительно r на интервале $\gamma \in (0,1)$, чтобы получить зависимость прибыли от маржи с целью последующей оптимизации δ^+ и δ^-, максимизирующих r. В условиях нашей модели данное уравнение $\forall\gamma \in (0,1)$ имеет единственное решение в силу того, что функция $\exp\left\{-\frac{G^2}{C^2}((1+\zeta)\ln(1+\zeta') - \zeta')\right\}$ непрерывна, возрастает по r и принимает значения в интервале (0,1). Рассмотрим два случая:

1). $\zeta \geq e-1$, то есть

$$r \leq \delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^- - \frac{(e-1)G^2}{C}. \qquad (9.5.32)$$

В этом случае мы получаем уравнение

$$1-\gamma=\exp\left\{-\frac{G^2}{C^2}(2-e+\zeta)\right\},$$

решение которого имеет вид

$$\zeta=e-2-\frac{C^2}{G^2}\ln(1-\gamma),$$

откуда

$$r=\delta^+\lambda^+\mu_1^++\delta^-\lambda^-\mu_1^--\frac{G^2}{C}(e-2)+C\ln(1-\gamma).$$

В силу монотонности правой части (9.5.30) по r, с учетом (9.5.32) мы замечаем, что данное решение имеет место при

$$\gamma\in(\exp\{-G^2/C^2\},1)$$

2). $\zeta\le e-1$, то есть

$$\delta^+\lambda^+\mu_1^++\delta^-\lambda^-\mu_1^--\frac{(e-1)G^2}{C}\le r\le\delta^+\lambda^+\mu_1^++\delta^-\lambda^-\mu_1^-. \qquad (9.5.33)$$

В таком случае мы получаем уравнение

$$1-\gamma=\exp\left\{-\frac{G^2}{C^2}[(1+\zeta)\ln(1+\zeta)-\zeta]\right\}.$$

Аналогично случаю 1) получим

$$\ln(1-\gamma)=-\frac{G^2}{C^2}[(1+\zeta)\ln(1+\zeta)-\zeta]$$

Пусть $k=-\frac{G^2}{C^2}\ln(1-\gamma)$, тогда решение этого уравнения имеет вид

$$\zeta=\exp\left\{LW\left(\frac{k-1}{e}\right)+1\right\}-1,$$

где $LW(y)$ – функция Ламберта, обратная к функции $y=xe^x$ (подробнее см. (Corless et al., 1996)). Значение функции Ламберта в точке можно вычислить, разложив функцию в ряд Тейлора:

$$LW(x)=x-x^2+\frac{3}{2}x^3+\frac{8}{3}x^4+\frac{125}{4}x^5-\frac{54}{5}x^6+\frac{16807}{620}x^7+o(x^8).$$

В силу тех же соображений, что и в пункте 1, заметим, что данное решение имеет место при $\gamma\in(0,\exp\{-DR/C^2\})$. Таким образом, из неравенства, приведенного в Теореме 9.5.3, мы смогли для любого значения величины $\gamma \in (0,1)$ получить гарантированную оценку прибыли компании: если $0 < \gamma < \exp\{-G^2/C^2\}$, то

$$r \geq \delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^- -$$

$$- \frac{(\delta^+)^2\lambda^+\mu_2^+ + (\delta^-)^2\lambda^-\mu_2^-}{C} \exp\left\{LW\left(\frac{k-1}{e}+1\right)-1\right\}; \qquad (9.5.34)$$

если же $\exp\{-G^2/C^2\} \leq \gamma < 1$, то

$$r \geq \delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^- -$$

$$- \frac{(\delta^+)^2\lambda^+\mu_2^+ + (\delta^-)^2\lambda^-\mu_2^-}{C}(e-2) + C\ln(1-\gamma). \qquad (9.5.35)$$

Константа C определяется из представления (9.5.11) и условия $\mathsf{P}(Y_1 < C) = 1$. Если

$$\mathsf{P}(X_1^+ < C_1 = 1),\ \mathsf{P}(X_1^- < C_1 = 1),$$

тогда $C = \max(C_1\delta^+, C_1\delta^-)$. Другими словами, константу C можно определить как величину, ограничивающую с вероятностью 1 прибыль от одной операции обмена. Соотношения (9.5.34) и (9.5.35) позволяет оценить размер будущей прибыли при установленных δ^+ и δ^-, известных моментах $\mu_1^+, \mu_1^-, \mu_2^+, \mu_2^-$, величине C_1 и виде зависимости интенсивностей клиентов λ^+ и λ^- от маржи. Этот результат также дает возможность определить оптимальные δ^+ и δ^-, максимизирующие прибыль r в соотношении (9.5.14). Рассмотрим еще один результат также позволяющий решить задачу (9.5.14):

Теорема 9.5.4. *Пусть* $\mathsf{P}(Y_1 \leq C) = 1$, *тогда для всех* $x \geq 0$ *и любого* $\lambda > 0$, *если* $Cx \leq \sqrt{(\lambda^+ + \lambda^-)\mathsf{E}Y_1^2}$, *то*

$$\mathsf{P}\left(\frac{R-(\lambda^+ + \lambda^-)a}{\sqrt{(\lambda^+ + \lambda^-)\mathsf{E}Y_1^2}} \geq x\right) \leq \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{xC}{2\sqrt{(\lambda^+ + \lambda^-)\mathsf{E}Y_1^2}}\right)\right\};$$

если $Cx > \sqrt{(\lambda^+ + \lambda^-)\mathsf{E}Y_1^2}$, *то*

$$\mathsf{P}\left(\frac{R-(\lambda^+ + \lambda^-)a}{\sqrt{(\lambda^+ + \lambda^-)\mathsf{E}Y_1^2}} \geq x\right) \leq \exp\left\{-\frac{x\sqrt{(\lambda^+ + \lambda^-)\mathsf{E}Y_1^2}}{4C}\right\}. \qquad (9.5.36)$$

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 2.7.1.

Следствие 9.5.1. *В условиях Теоремы* 9.5.4 *для всех* $x \geq 0$ *и любого* $\lambda > 0$, *если* $Cx \leq \sqrt{(\lambda^+ + \lambda^-)\mathsf{E}Y_1^2}$, *то*

$$\mathsf{P}\left(\frac{R - (\lambda^+ + \lambda^-)a}{\sqrt{(\lambda^+ + \lambda^-)\mathsf{E}Y_1^2}} \geq x\right) \leq \exp\Big\{-\frac{x^2}{4}\Big\};$$

если $Cx > \sqrt{(\lambda^+ + \lambda^-)\mathsf{E}Y_1^2}$, *то*

$$\mathsf{P}\left(\frac{R - (\lambda^+ + \lambda^-)a}{\sqrt{(\lambda^+ + \lambda^-)\mathsf{E}Y_1^2}} \geq x\right) \leq \exp\Big\{-\frac{x\sqrt{(\lambda^+ + \lambda^-)\mathsf{E}Y_1^2}}{4C}\Big\}. \qquad (9.5.37)$$

Соотношения (9.5.36) и (9.5.37) на основании тех же рассуждений, что и в (9.5.28), позволяют выписать следующие оценки для функции распределения случайной величины R.

Для всех

$$r \leq \delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^-, \qquad (9.5.38)$$

если при этом $r \geq \delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^- - G^2/C$, то

$$\mathsf{P}(R < r) \leq \exp\Big\{-\Big(\frac{\delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^- - r}{2G}\Big)^2\Big\}.$$

Если же в дополнение к (9.5.38) $r < \delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^- - G^2/C$, то

$$\mathsf{P}(R < r) \leq \exp\Big\{-\frac{\delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^- - r}{4C}\Big\}. \qquad (9.5.39)$$

Воспользуемся соотношением (9.5.39) для решения задачи (9.5.14). Возможны два случая:

1). $\gamma \in (0, \exp\{-G^2/(4C^2)\})$. В этом случае мы получаем уравнение

$$1 - \gamma = \exp\left\{-\left(\frac{\delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^- - r}{2G}\right)^2\right\},$$

очевидно, эквивалентное

$$r^2 - 2r\mathsf{E}R + (\mathsf{E}R)^2 + 4G^2\ln(1-\gamma) = 0.$$

Учитывая, что $r \leq \delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^-$, получаем решение

$$r = \mathsf{E}R - 4G\sqrt{-\ln(1-\gamma)}.$$

2). $\gamma \in (\exp\{-G^2/(4C^2)\}, 1)$. В этом случае мы получаем уравнение

$$1 - \gamma = \exp\left\{-\frac{\delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^- - r}{4C}\right\},$$

решение которого имеет вид

$$r = \mathsf{E}R + 4C\ln(1-\gamma).$$

Таким образом, мы окончательно получаем: если $0 < \gamma < \exp\{-G^2/(4C^2)\}$, то

$$r \geq \delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^- - 4\sqrt{(\delta^+)^2\lambda^+\mu_2^+ - (\delta^-)^2\lambda^-\mu_2^-\ln(1-\gamma)};$$

если же $\exp\{-G^2/(4C^2)\} \leq \gamma < 1$, то

$$r \geq \delta^+\lambda^+\mu_1^+ + \delta^-\lambda^-\mu_1^- + 4C\ln(1-\gamma).$$

Глава 10

Стоимостной подход к математическому описанию функционирования страховых компаний

10.1 Введение. Постановка задачи

В актуарной математике в качестве одной из основных оптимизационных задач рассматривается задача об оптимальном значении начального капитала страховой компании. При этом в качестве критерия оптимальности как правило используется вероятность неразорения страховой компании. Хорошо известны классические результаты типа теоремы Крамéра–Лундберга (см. раздел 8.6) и неравенства Лундберга (см. раздел 8.7), определяющие экспоненциальный характер убывания вероятности разорения при возрастании начального капитала. Однако по имеющемуся опыту, практическая польза этих результатов, при всей их математической красоте, далеко не так велика, как хотелось бы (особенно в условиях современного российского страхового рынка). Действительно, во-первых, красота упомянутых результатов достигается за счет довольно сильных модельных предположений (например, о том, что поток страховых требований должен быть однородным пуассоновским, то есть, иметь постоянную интенсивность, о линейном возрастании во времени дохода страховой компании, обусловленного страховыми взносами клиентов, и об игнорировании возможности инвестирования свободного капитала страховой компании в прибыльные проекты). Во-вторых, хотя “разорению” можно дать вполне строгое математическое определение как существованию такого момента времени, в который текущий резерв страховой компании становится отрицательным, на практике, как правило, разорения не происходит, поскольку в упомянутой выше ситуации существует возможность, например, взять кредит в банке и расплатиться с клиентами за счет этого кредита. В-третьих, как мы уже отмечали в разделе 8.10, наибольший прогресс достигнут в деле оценивания вероятности разорения на бесконечных временны́х интервалах, в то время как совершенно ясно, что в современных российских условиях рассматривать интервалы времени бесконечной длины абсолютно бессмысленно. Более того, встречаются периоды времени, когда по объективным обстоятельствам деятельность страховой компании не удовлетворяет принципу средней безубыточности.

В настоящей главе изучается другой, так называемый *стоимостной* подход к математическому описанию функционирования страховых компаний. Рассмотрим критерий оптимальности, связанный как с возможностью инвестирования капитала в прибыльные проекты, так и с возможностью в необходимых случаях пользоваться кредитами.

Здесь мы приведем уравнение для значения начального капитала, минимизирующего средние издержки страховой компании, связанные как с избыточным размером стартового капитала, приводящим к напрасному "пролеживанию" средств, так и с нехваткой резерва. В предположении, что поток страховых требований является пуассоновским (как мы увидим ниже, это предположение здесь не играет столь критической роли как в разделах 8.6–8.7), на основе нормальной аппроксимации будут построены двусторонние оценки для решения упомянутого уравнения. Рассматривается критерий оптимальности, связанный как с возможностью инвестирования капитала в прибыльные проекты, так и с возможностью в необходимых случаях пользоваться кредитами. Будут также приведены гарантированные нижние оценки ставок страховых премий, обеспечивающие заданную величину резерва страховой компании в конце рассматриваемого периода ее функционирования при условии минимума средних издержек.

Предположим, что в начальный момент некоторого отрезка времени $[0, T]$ страховая компания имеет стартовый капитал u. Пусть $N(t)$, $0 \le t \le T$, – число страховых выплат до момента t. Будем считать, что $N(t)$ – пуассоновский процесс с некоторой интенсивностью $\lambda > 0$. Это предположение соответствует тому, что моменты выплат абсолютно хаотично рассредоточены на временно́й оси (см., например, разделы 7.3 и 7.4). Пусть X_i – страховая выплата по i-ому страховому случаю. Рассмотрим простейшую модель функционирования страховой компании, согласно которой предполагается, что прирост капитала страховой компании за счет страховых взносов клиентов линеен во времени, так что потери страховой компании за период времени $[0,t]$ имеют вид

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - \alpha\lambda t,$$

где α – ставка страховой премии. Тогда величина $R(t) = u - S(t)$ имеет смысл резерва страховой компании в момент времени t. Будем считать, что случайные величины $X_1, X_2, ...$ независимы и одинаково распределены, а процесс $N(t)$ независим от последовательности $X_1, X_2, ...$

Пусть ${}_1(t,u)$ – издержки в момент t на единицу средств начального капитала. Будем считать, что если $u \geq 0$, то $c_1(t,u) = c_1(t) > 0$. В этом случае ${}_1(t)$ имеет смысл издержек из-за "пролеживания" денег ввиду их напрасного привлечения в резерв. В качестве $c_1(t)$ можно взять, например, доходность ценных бумаг, в которые страховая компания могла бы вложить средства с целью получения прибыли, которую фактически она теряет (ясно, что эта характеристика может изменяться с течением времени). Если же $u < 0$, что соответствует ситуации, в которой компания начинает страховой бизнес, имея долги, то положим $c_1(t,u) = -c_0(t) > 0$. Здесь $|c_0(t)|$ имеет смысл "штрафа" за наличие долгов. Например, в качестве $|c_0(t)|$ можно взять процент, под который следует возвратить долги. Пусть $c_2(t) > 0$ – издержки в момент t на единицу средств на единицу времени из-за нехватки денег при необходимости их выплаты клиенту. В качестве $c_2(t)$ можно взять, например, безрисковый банковский процент, при котором компания может взять кредит в банке для погашения задолженности клиентам (ясно, что эта характеристика также может изменяться с течением времени). Тогда средние суммарные издержки $D(u)$ страховой компании за время T определяются соотношением

$$D(u) = u\int_0^T c_1(t,u)dt + \int_0^T c_2(t)\mathsf{E}(S(t)-u)^+dt =$$

$$= \begin{cases} -u\int_0^T c_0(t)dt + \int_0^T c_2(t)\mathsf{E}(S(t)-u)^+dt, & \text{если } u \leq 0; \\ u\int_0^T c_1(t)dt + \int_0^T c_2(t)\mathsf{E}(S(t)-u)^+dt, & \text{если } u \geq 0, \end{cases} \tag{10.1.1}$$

где используется стандартное обозначение $x^+ = \max\{x, 0\}$. Сходные критерии оптимальности в задачах оптимального управления запасами рассматривались в работах (Г. В. Ротарь, 1972), (Г. В. Ротарь, 1976), (Петраков и В. И. Ротарь, 1985). В работе (Кашаев и Королев, 1999) рассмотрен критерий эффективности деятельности страховой компании, в котором издержки, связанные с недостатком средств, понимаются так же, как и здесь, но издержки другого типа связаны с нежелательным избытком резерва в *каждый момент времени*, а не с избытком начального капитала, как здесь.

10.2 Основное уравнение

Мы будем искать такое значение начального капитала u_0, при котором минимальны средние суммарные издержки (10.1.1).

Для простоты предположим, что случайные величины X_j абсолютно непрерывны. Поэтому для каждого $t \in [0, T]$ существует плотность с.в. $S(t)$, которую мы обозначим $f_t(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Обозначая индикатор множества A через $\mathbf{1}(A)$, при $u < 0$ мы можем представить $D(u)$ в виде

$$D(u) =$$

$$= -u\int\limits_0^T c_0(t)dt + \int\limits_0^T c_2(t)\mathsf{E}S(t)\mathbf{1}(S(t) > u)dt - u\int\limits_0^T c_2(t)\mathsf{P}(S(t) > u)dt =$$

$$= -u\int\limits_0^T c_0(t)dt + \int\limits_0^T c_2(t)\mathsf{E}S(t)dt -$$

$$-\int\limits_0^T c_2(t)\left[\int\limits_{-\infty}^u xf_t(x)dx\right]dt - u\int\limits_0^T c_2(t)dt + u\int\limits_0^T c_2(t)\left[\int\limits_{-\infty}^u f_t(x)dx\right]dt.$$

Дифференцируя $D(u)$ по u при $u < 0$, получаем

$$\frac{dD(u)}{du} = -\int\limits_0^T c_0(t)dt - u\int\limits_0^T c_2(t)f_t(u)dt -$$

$$-\int\limits_0^T c_2(t)dt + \int\limits_0^T c_2(t)\left[\int\limits_{-\infty}^u f_t(x)dx\right]dt + u\int\limits_0^T c_2(t)f_t(u)dt =$$

$$= -\int\limits_0^T [c_0(t) + c_2(t)]dt + \int\limits_0^T c_2(t)\mathsf{P}(S(t) < u)dt.$$

Отсюда несложно видеть, что при $u < 0$ производная функции $D(u)$ по u отрицательна, откуда следует, что $D(u) \geq D(0)$ для любого $u < 0$.

Поэтому минимум функции $D(u)$ достигается на неотрицательных u (если он достигается на конечном u).

При $u \geq 0$

$$D(u) =$$

$$= u \int_0^T c_1(t)dt + \int_0^T c_2(t)\mathsf{E}S(t)\mathbf{1}(S(t) > u)dt - u \int_0^T c_2(t)\mathsf{P}(S(t) > u)dt =$$

$$= u \int_0^T c_1(t)dt + \int_0^T c_2(t)\mathsf{E}S(t)dt -$$

$$- \int_0^T c_2(t) \left[\int_{-\infty}^u x f_t(x)dx \right] dt - u \int_0^T c_2(t)dt + u \int_0^T c_2(t) \left[\int_{-\infty}^u f_t(x)dx \right] dt.$$

Дифференцируя $D(u)$ по u при $u \geq 0$, получаем

$$\frac{dD(u)}{du} = \int_0^T c_1(t)dt - u \int_0^T c_2(t)f_t(u)dt - \int_0^T c_2(t)dt +$$

$$+ \int_0^T c_2(t) \left[\int_{-\infty}^u f_t(x)dx \right] dt + u \int_0^T c_2(t)f_t(u)dt =$$

$$= \int_0^T [c_1(t) - c_2(t)]dt + \int_0^T c_2(t)\mathsf{P}(S(t) < u)dt =$$

$$= \int_0^T c_1(t)dt - \int_0^T c_2(t)\mathsf{P}(S(t) \geq u)dt.$$

Приравнивая эту производную нулю, мы приходим к уравнению

$$\int_0^T c_2(t)\mathsf{P}(S(t) \geq u)dt = \int_0^T c_1(t)dt. \tag{10.2.1}$$

В дальнейшем мы будем считать, что $c_1(t) \equiv \text{const} = c_1$, $c_2(t) \equiv \text{const} = c_2$. Если $c_1 > c_2$, то как несложно видеть, $\frac{dD(u)}{du} > 0$. Поэтому с учетом сказанного выше мы заключаем, что при $c_1 > c_2$ оптимальным значением является $u_0 = 0$. Таким образом, единственным нетривиальным случаем остается $c_1 < c_2$. При таких c_1 и c_2 уравнение (10.2.1) принимает вид

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathsf{P}(S(t) < u)dt = \delta, \tag{10.2.2}$$

где $\delta = (c_2 - c_1)/c_2$. Таким образом, задача минимизации средних суммарных издержек страховой компании, понимаемых в смысле (10.1.1), свелась к отысканию неотрицательного решения уравнения (10.2.2). Другими словами,

$$u_0 = (u^\star)^+,$$

где $u^\star$ – решение уравнения (10.2.2)

10.3 Оценки для оптимального начального капитала

Точное решение уравнения (10.2.2) чрезвычайно трудоемко, а без дополнительной исчерпывающей информации о распределении случайных величин X_i, $i \geq 1$, практически невозможно. Поэтому мы, ограничившись информацией о первых трех моментах случайных величин X_i, $i \geq 1$, будем искать верхние и нижние оценки для u_0 такого, что $D(u_0) = \min_{u \geq 0} D(u)$.

Стандартную нормальную функцию распределения и ее плотность мы как всегда будем обозначать $\Phi(x)$ и $\phi(x)$ соответственно. Мы также будем использовать обозначения $\mathsf{E}X_i = m$, $\mathsf{D}X_i = \sigma^2$, $\mathsf{E}X_i^2 = \mu_2$ $(= m^2 + \sigma^2)$, $\mathsf{E}X_i^3 = \mu_3$.

Легко видеть, что $\mathsf{E}S(t) = (m - \alpha)\lambda t$, $\mathsf{D}S(t) = \mu_2 \lambda t$. Положим $m_1 = m - \alpha$. Принцип средней безубыточности заключается в том, что $m_1 < 0$. Это означает, что ожидаемый резерв страховой компании растет со временем. Однако в условиях неустоявшейся финансово-экономической системы следует допускать также наличие таких временны́х интервалов, на которых $m_1 > 0$.

Основная идея отыскания верхних и нижних оценок для u_0 заключается в замене, вообще говоря, неизвестной подынтегральной функции в уравнении (10.2.2) известной конструкцией с сохранением монотонности зависимости левой части (10.2.2) от u и решении новых уравнений вместо (10.2.2). В разделе 2.4.2 показано, что

$$\sup_x \left| \mathsf{P}\left(\frac{S(t) - m_1 \lambda t}{\sqrt{\mu_2 \lambda t}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{L_3}{\sqrt{\lambda t}}, \tag{10.3.1}$$

где

$$L_3 = \frac{C_0 \mu_3}{\mu_2^{3/2}},$$

C_0 – абсолютная постоянная в неравенстве Берри–Эссеена, $C_0 \leq 0.7056$.

Из (10.3.1) при этом вытекает, что

$$\Phi\left(\frac{u-m_1\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)-\frac{L_3}{\sqrt{\lambda t}} \le \mathsf{P}(S(t)<u) \le \Phi\left(\frac{u-m_1\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)+\frac{L_3}{\sqrt{\lambda t}},$$

откуда мы получаем, что

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \Phi\left(\frac{u-m_1\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)dt-\frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}} \le \frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathsf{P}(S(t)<u)dt \le$$

$$\le \frac{1}{T}\int\limits_0^T \Phi\left(\frac{u-m_1\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)dt+\frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}. \qquad (10.3.2)$$

Поскольку под интегралами здесь стоят функции распределения, монотонно не убывающие по u, все части цепочки неравенств (10.3.2) монотонно не убывают по u. Поэтому с учетом (10.2.2) мы заключаем, что

$$(u_1)^+ \le u_0 \le (u_2)^+,$$

где u_1 – решение уравнения

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \Phi\left(\frac{u-m_1\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)dt=\delta-\frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}, \qquad (10.3.3)$$

а u_2 – решение уравнения

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \Phi\left(\frac{u-m_1\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)dt=\delta+\frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}. \qquad (10.3.4)$$

Таким образом, задача свелась к отысканию нижней оценки для u_1 и верхней оценки для u_2.

Теорема 10.3.1. *Пусть*

$$\delta \in \left[\Phi\left(-m_1\sqrt{\frac{\lambda T}{\mu_2}}\right)+\frac{\mu_2}{2\lambda T m_1^2}+\frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}},\ 1-\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\mu_2}{2\pi\lambda T}}-\frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}\right].$$

Если $m \ge \alpha$, то

$$\delta m_1\lambda T(1-\psi_2(\lambda T))^+ \le u_0 \le \delta m_1\lambda T(1+\psi_1(\lambda T)),$$

где

$$\psi_1(z)=\frac{1}{\delta\sqrt{z}}\left(2L_3+\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\mu_2}{2\pi}}\right),$$

$$\psi_2(z) = \frac{2L_3}{\delta\sqrt{z}} + \frac{\mu_2}{2\delta m_1^2 z} + \frac{1}{\delta}\Phi\left(-m_1\sqrt{\frac{z}{\mu_2}}\left(1-\delta+\frac{\mu_2}{2m_1^2 z}+\frac{2L_3}{\sqrt{z}}\right)\right).$$

Если $m < \alpha$, то

$$0 \le u_0 \le (-|m_1|\lambda T(1-\delta)(1-\chi_1(\lambda T)))^+,$$

где

$$\chi_1(z) = \frac{2L_3}{(1-\delta)\sqrt{z}} + \frac{\mu_2}{2(1-\delta)m_1^2 z} +$$

$$+\frac{1}{(1-\delta)}\Phi\left(-|m_1|\sqrt{\frac{z}{\mu_2}}\left(1-\delta-\frac{\mu_2}{2m_1^2 z}-\frac{2L_3}{\sqrt{z}}\right)\right).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $m > \alpha$ или, что то же самое, $m_1 > 0$. Введем обозначения

$$\frac{u}{m_1\lambda} = x, \quad m_1\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} = A.$$

Так как $m_1 > 0$, то и $A > 0$. Оценим сверху и снизу

$$J_+(x;T) = \frac{1}{T}\int_0^T \Phi\left(\frac{u-m_1\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \Phi\left(A\frac{x-t}{\sqrt{t}}\right)dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^T \Phi\left(A\frac{x-t}{\sqrt{t}}\right)dt = T\Phi\left(A\frac{x-T}{\sqrt{T}}\right) + \frac{A}{2}\int_0^T \phi\left(A\frac{x-t}{\sqrt{t}}\right)\left(\frac{x+t}{\sqrt{t}}\right)dt.$$

Таким образом, задача свелась к оцениванию интеграла

$$I(x) = \int_0^T \phi\left(A\frac{x-t}{\sqrt{t}}\right)\left(\frac{x+t}{\sqrt{t}}\right)dt.$$

Оценим $I(x)$ сверху. Имеем

$$I(x) \le \int_0^\infty \phi\left(A\frac{x-t}{\sqrt{t}}\right)\left(\frac{x+t}{\sqrt{t}}\right)dt =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\exp\{A^2x\}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left\{-\frac{A^2}{2}\left(\frac{x^2}{t}+t\right)\right\}dt+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{A^2x\}\int\limits_0^\infty \sqrt{t}\exp\left\{-\frac{A^2}{2}\left(\frac{x^2}{t}+t\right)\right\}dt \equiv I_1(x)+I_2(x).$$

Используя хорошо известные свойства цилиндрических функций мнимого аргумента $K_\nu(z)$ (см., например, (Градштейн и Рыжик, 1962), соотношения 3.478(4) (с. 356) и 8.432(2) (с. 972)), мы получаем

$$I_1(x)=\frac{2x^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}\exp\{A^2x\}K_{1/2}(A^2x)=$$

$$=\frac{2x^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}\exp\{A^2x\}A\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\int\limits_1^\infty e^{-A^2xz}dz=\frac{x}{A}.$$

Аналогично,

$$I_2(x)=\frac{2x^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}\exp\{A^2x\}K_{3/2}(A^2x)=\frac{A^3x^3}{2}\exp\{A^2x\}\int\limits_1^\infty e^{-A^2xz}(z^2-1)dz=$$

$$=\frac{A^3x^3}{2}\exp\{A^2x\}\frac{2e^{-A^2x}}{A^4x^2}\left(1+\frac{1}{A^2x}\right)=\frac{x}{A}+\frac{1}{A^3},$$

то есть

$$I(x)\le\frac{2x}{A}+\frac{1}{A^3},$$

откуда

$$J_+(x;T)\le\Phi\left(A\frac{x-T}{\sqrt{T}}\right)+\frac{x}{T}+\frac{1}{2TA^2}. \tag{10.3.5}$$

Перейдем к отысканию нижней оценки для $J_+(x;T)$. А именно, покажем, что при $x\in[0,T]$ справедливо неравенство

$$J_+(x;T)\ge\frac{x}{T}-J_+(T;T). \tag{10.3.6}$$

Легко показать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на некотором отрезке $[a,b]$, причем $f'(x)\le g'(x)$ при $x\in[a,b]$ и $f(b)\ge g(b)$, то $f(x)\ge g(x)$ при $x\in[a,b]$.

В качестве $f(x)$ возьмем $J_+(x;T)$, а в качестве $g(x)$ возьмем $\frac{x}{T}-J_+(T;T)$. Ясно, что $g'(x)\equiv\frac{1}{T}$. Рассмотрим $f'(x)$. По уже доказанному (см. вычисление $I_1(x)$),

$$f'(x)=(J_+(x;T))'_x=\frac{A}{T}\int\limits_0^T\frac{1}{\sqrt{t}}\phi\left(A\frac{x-t}{\sqrt{t}}\right)dt\le$$

$$\leq \frac{A}{T\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{-A^2\frac{(x-t)^2}{2t}\right\} dt = \frac{A}{T\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{A} = \frac{1}{T}.$$

Таким образом, $f'(x) \leq g'(x)$, и неравенство (10.3.6) будет доказано, если мы убедимся, что

$$J_+(T;T) = f(T) \geq g(T) = 1 - J_+(T;T),$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_0^T \Phi\left(A\frac{T-t}{\sqrt{t}}\right) dt \geq \frac{T}{2} \tag{10.3.7}$$

при любом $T \geq 0$. При $T = 0$ неравенство (10.3.7) очевидно. Производная по T правой части (10.3.7) равна $\frac{1}{2}$. Поэтому для доказательства неравенства (10.3.6) достаточно убедиться, что

$$\left(\int\limits_0^T \Phi\left(A\frac{T-t}{\sqrt{t}}\right) dt\right)'_T \geq \frac{1}{2}. \tag{10.3.8}$$

Но неравенство (10.3.8) верно, так как

$$\left(\int\limits_0^T \Phi\left(A\frac{T-t}{\sqrt{t}}\right) dt\right)'_T = \int\limits_0^T \frac{1}{\sqrt{t}}\phi\left(A\frac{T-t}{\sqrt{t}}\right) dt + \Phi(0) \geq \frac{1}{2}.$$

Таким образом, неравенство (10.3.6) доказано.

Итак, из неравенства (10.3.5) вытекает, что $u_1 \geq m_1\lambda x_1$, где x_1 – решение уравнения

$$\Phi\left(A\frac{x-T}{\sqrt{T}}\right) + \frac{x}{T} = \delta - \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}} - \frac{1}{2TA^2}, \tag{10.3.9}$$

а из неравенства (10.3.6) вытекает, что $u_2 \leq m_1\lambda x_2$, где x_2 – решение уравнения

$$\frac{x}{T} = J_+(T;T) + \delta + \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}. \tag{10.3.10}$$

Рассмотрим уравнение (10.3.9) и найдем нижнюю оценку для его корня x_1. Обозначим $\delta_1 = \delta - \frac{1}{2A^2T} - \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}$. Будем искать x_1 в виде $x_1 = T(\delta_1 - z)$. Переписав уравнение (10.3.9) относительно нового неизвестного z, получим

$$\Phi(A\sqrt{T}(\delta_1 - z - 1)) = z. \tag{10.3.11}$$

Левая часть (10.3.11), будучи значением функции распределения, заключена между нулем и единицей. Поэтому из (10.3.11) вытекает, что $0 \le z \le 1$, и, следовательно,

$$z \le \Phi(A\sqrt{T}(\delta_1 - 1)),$$

то есть

$$x_1 \ge T(\delta_1 - \Phi(-A\sqrt{T}(1-\delta_1))),$$

откуда

$$u_0 \ge u_1 \ge m_1\lambda x_1 \ge$$

$$\ge m_1\lambda T\left[\delta - \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}} - \frac{1}{2A^2T} - \Phi\left(-A\sqrt{T}\left(1-\delta+\frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}+\frac{1}{2A^2T}\right)\right)\right] =$$

$$= m_1\lambda T\delta\Big[1 - \frac{2L_3}{\delta\sqrt{\lambda T}} - \frac{\mu_2}{2\delta\lambda T m_1^2} -$$

$$-\frac{1}{\delta}\Phi\Big(-m_1\sqrt{\frac{\lambda T}{\mu_2}}\Big(1-\delta+\frac{\mu_2}{2\lambda T m_1^2}+\frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}\Big)\Big)\Big]. \qquad (10.3.12)$$

Рассмотрим уравнение (10.3.10). Для отыскания верхней оценки для u_2 оценим $J_+(T;T)$. Имеем

$$J_+(T;T) = \int_0^1 \Phi\Big(-A\sqrt{T}\frac{z}{\sqrt{1-z}}\Big)dz < \int_0^1 \Phi(-A\sqrt{T}z)dz =$$

$$= \Phi(-A\sqrt{T}) + \frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{1/2}\exp\{-A^2Tz\}dz =$$

$$= \Phi(-A\sqrt{T}) + \frac{1}{A\sqrt{2\pi T}}\Big[1-\exp\Big\{-\frac{A^2T}{2}\Big\}\Big] \le$$

$$\le \frac{1}{A\sqrt{T}}\phi(A\sqrt{T}) + \frac{1}{A\sqrt{2\pi T}} - \frac{1}{A\sqrt{2\pi T}}\exp\Big\{-\frac{A^2T}{2}\Big\} = \frac{1}{A\sqrt{2\pi T}}. \quad (10.3.13)$$

Поэтому $u_2 \le m_1\lambda x_2 \le m_1\lambda x_2^*$, где x_2^* – решение уравнения

$$\frac{x}{T} = \delta + \frac{1}{A\sqrt{2\pi T}} + \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}.$$

Это уравнение решается элементарно:

$$x_2^* = T\left(\delta + \frac{1}{A\sqrt{2\pi T}} + \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}\right),$$

откуда

$$u_0 \le u_2 \le m_1\lambda x_2^* = m_1\lambda T\delta\left(1+\frac{2L_3}{\delta\sqrt{\lambda T}}+\frac{1}{\delta m_1}\sqrt{\frac{\mu_2}{2\pi\lambda T}}\right). \qquad (10.3.14)$$

С учетом неотрицательности u_0 из соотношений (10.3.12) и (10.3.14) мы получаем нужное утверждение. Для случая $m > \alpha$ теорема доказана.

Теперь рассмотрим случай $m < \alpha$. Мы будем искать оценки для решений u_1 и u_2 соответственно уравнений (10.3.3) и (10.3.4), используя уже полученные результаты. Снова положим

$$\frac{u}{m_1\lambda}=x, \quad m_1\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}}=A.$$

На сей раз $A<0$, поэтому

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \Phi\left(\frac{u-m_1\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)dt = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \Phi\left(-|A|\frac{x-t}{\sqrt{t}}\right)dt \equiv J_-(x;T).$$

Несложно убедиться, что

$$J_-(x;T) = 1 - J_+(x;T).$$

Поэтому с учетом оценок (10.3.5), (10.3.6) и (10.3.13) мы имеем

$$1-\Phi\left(|A|\frac{x-t}{\sqrt{t}}\right)-\frac{x}{T}-\frac{1}{2TA^2} \le J_-(x;T) \le 1-\frac{x}{T}+\frac{1}{|A|\sqrt{2\pi T}},$$

откуда

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \Phi\left(\frac{u-m_1\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)dt \le 1+\frac{u}{|m_1|\lambda T}+\frac{\sqrt{\mu_2}}{|m_1|\sqrt{2\pi\lambda T}} \qquad (10.3.15)$$

и

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \Phi\left(\frac{u-m_1\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)dt \ge 1-\Phi\left(\frac{u-m_1\lambda T}{\sqrt{\mu_2\lambda T}}\right)-\frac{u}{m_1\lambda T}-\frac{\mu_2}{2m_1^2\lambda T}. \qquad (10.3.16)$$

Таким образом, $u_1 \le u_0 \le u_2'$, где u_1 – решение уравнения

$$1+\frac{u}{|m_1|\lambda T}+\frac{\sqrt{\mu_2}}{|m_1|\sqrt{2\pi\lambda T}}+\frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}=\delta, \qquad (10.3.17)$$

а u_2' – решение уравнения

$$1-\Phi\left(\frac{u-m_1\lambda T}{\sqrt{\mu_2\lambda T}}\right)-\frac{u}{m_1\lambda T}-\frac{\mu_2}{2m_1^2\lambda T}-\frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}=\delta. \qquad (10.3.18)$$

Решение уравнения (10.3.17) находится элементарно:

$$u_1=-|m_1|(1-\delta)\lambda T\left[1+\frac{1}{(1-\delta)|m_1|}\sqrt{\frac{\mu_2}{2\pi\lambda T}}+\frac{2L_3}{(1-\delta)\sqrt{\lambda T}}\right].$$

Отметим, что $u_1\le 0$. С учетом сказанного в п. 2 мы приходим к выводу, что в рассматриваемом случае нижней оценкой для u_0 является нуль.

Решение u_2' уравнения (10.3.18) будем искать в виде $u_2'=m_1\lambda T(\delta_1^*-z)$, где $\delta_1^*=1-\delta-\frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}-\frac{\mu_2}{2m_1^2\lambda T}$. В новых переменных уравнение (10.3.18) запишется так:

$$\Phi\left(m_1\sqrt{\frac{\lambda T}{\mu_2}}(\delta_1^*-z-1)\right)=z, \qquad (10.3.19)$$

откуда мы заключаем, что $0\le z\le 1$. Поэтому из (10.3.19) вытекает неравенство

$$z\ge\Phi\left(m_1\sqrt{\frac{\lambda T}{\mu_2}}(\delta_1^*-1)\right).$$

Возвращаясь к исходному неизвестному u_2', мы окончательно получаем

$$u_2'\le u_2=m_1\lambda T\left[\delta_1^*-\Phi\left(m_1\sqrt{\frac{\lambda T}{\mu_2}}(\delta_1^*-1)\right)\right]=$$

$$=-|m_1|\lambda T(1-\delta)\left[1-\frac{2L_3}{(1-\delta)\sqrt{\lambda T}}-\frac{\mu_2}{2(1-\delta)m_1^2\lambda T}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1-\delta}\Phi\left(-|m_1|\sqrt{\frac{\lambda T}{\mu_2}}\left(1-\delta-\frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}-\frac{\mu_2}{2m_1^2\lambda T}\right)\right)\right].$$

Теорема доказана.

10.4 Нижняя оценка для оптимального начального капитала в условиях равномерно ограниченных страховых выплат

В предыдущем разделе для оценки функции распределения случайной величины $S(t)$ использовалось неравенство Берри–Эссеена. Другой путь оценки вероятности $\mathsf{P}(S(t)<u)$ основывается на применении

оценок больших уклонений для функции распределения пуассоновских случайных сумм. Ниже будет использована верхняя оценка для "хвоста" этой функции распределения, предложенная в (Шоргин, 1998), на основе которой будет получена нижняя оценка для u_0.

Следует отметить, что данная оценка, имеющая гораздо более простой и наглядный вид, чем аналогичная оценка из предыдущего раздела, доказывается в рамках некоторого дополнительного условия: предполагается, что случайная величина, равная страховой выплате, равномерно ограничена. Это условие на первый взгляд представляется достаточно серьезным ограничением общности. Однако нужно отметить, что с точки зрения изучения реального страхового дела это не так. При страховании имущества ответственность страховщика ограничена страховой стоимостью объекта страхования. А так как в страховой портфель включаются достаточно однородные объекты страхования, то, как правило, нетрудно достаточно точно заранее оценить максимальную стоимость объекта страхования и, следовательно, максимальную величину выплаты, которая может возникнуть в данном страховом портфеле. Кроме того, предположение о равномерной ограниченности страховых выплат может быть обосновано, аналогично (Beard, Pentikainen and Pesonen, 1978) тем, что на практике риски страховщика обычно ограничиваются за счет перестрахования.

В (Шоргин, 1998) доказан результат, который в наших обозначениях может быть записан так.

Лемма 10.4.1. *Если все X_i равномерно ограничены, т.е. $|X_i| \leq H$, то при $u + (\alpha - m)\lambda t \geq 0$*

$$\mathsf{P}(S(t) < u) \geq 1 - \exp\{-\lambda t \mu_2 F(x/H^2\},$$

где $x = [u + (\alpha - m)\lambda t]H/(\lambda t \mu_2)$, $F(x) = (1 + x)\ln(1 + x') - x'$, $x' = \min\{x, e - 1\}$.

Теорема 10.4.1. *Предположим, что существует конечная положительная постоянная H такая, что $X_i \leq H$ и*

$$H \log\Big(\frac{1}{\delta}\Big)\frac{e^{w\lambda T} - 1}{w\lambda T} \geq (m - \alpha)^{+}\lambda T, \qquad (10.4.1)$$

где $w = (e - 2)\mu_2 H^{-2} - (\alpha - m)H^{-1}$. Тогда

$$u_0 \geq u_1 = H \log\Big(\frac{1}{\delta}\Big)\frac{e^{w\lambda T} - 1}{w\lambda T}\,.$$

Доказательство. Воспользуемся простейшей нижней оценкой функции $F(x)$:

$$F(x) \geq x - e + 2.$$

Будем рассматривать только u, удовлетворяющие условию

$$u \geq H\ln(1/\delta)[(e^{wT}-1)/(w\lambda T)]. \tag{10.4.2}$$

Из (10.4.1) вытекает, что для таких u при всех t выполняется условие $u+(\alpha-m)\lambda t > 0$, и можно применить лемму 1. Из леммы 1 следует, что

$$\mathsf{P}(S(t) < u) \geq 1 - \exp\{(e-2)\lambda t\mu_2/H^2 - (\alpha-m)\lambda t/H - u/H\}.$$

Значит, уравнение (10.3.4) для u_1 может быть заменено на следующее:

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \exp\{(e-2)\lambda t\mu_2/H^2 - (\alpha-m)\lambda t/H - u_1/H\}\,dt = 1-\delta.$$

Это уравнение легко решается в явном виде, и решение его таково:

$$u_1 = H\ln(1/(1-\delta))[(e^{w\lambda T}-1)/(w\lambda T)]. \tag{10.4.3}$$

Очевидно, что это значение u_1 “допустимо”, так как удовлетворяет условию (10.4.2). Тем самым теорема доказана.

Отметим, что условие

$$H\log\Big(\frac{1}{\delta}\Big)\frac{e^{w\lambda T}-1}{w\lambda T} \geq (m-\alpha)^+\lambda T$$

выполняется, в частности, при $-m_1 = \alpha - m \geq 0$ (именно данная ситуация — ситуация “неотрицательной нагрузки безопасности” — является наиболее распространенной). При достаточно большой по абсолютной величине отрицательной нагрузке безопасности соотношение (10.4.1) не выполняется и, следовательно, формулой (10.4.3) пользоваться нельзя.

Кроме того, заметим, что при достаточно большой положительной нагрузке безопасности, а именно при $\alpha - m > (e-2)\mu_2/H$, величина w отрицательна, и (10.4.3) можно записать следующим образом:

$$u_1 = H\ln(1/\delta)[(1-e^{-|w|\lambda T})/(|w|\lambda T)],$$

откуда следует, что в этих условиях при неограниченно возрастающем интервале времени T нижняя оценка для оптимального начального капитала убывает как $1/T$. Достаточно простой вид правой части (10.4.3) дает возможность исследования поведения нижней оценки оптимального начального капитала u_1 при различном характере изменения параметров случайных величин X_i, величин H, δ, λ и T.

(Попутно отметим, что для справедливости результата леммы не требуется, чтобы случайные величины X_i были неотрицательными. Однако для рассматриваемого в настоящем разделе вопроса это не имеет значения.)

Глава 11

Статистическое оценивание параметров страховой деятельности

11.1 Проблема статистического оценивания распределения страховых выплат

Предположим, что в нашем распоряжении имеются данные $X_1, X_2, \ldots, X_n$, представляющие собой размеры страховых выплат, осуществленных за определенный период времени. Выводы о распределении страховых выплат необходимо сделать на основе этих данных.

Многие приближенные формулы для вероятности разорения, приведенные в предыдущих разделах, зависят только от первых моментов случайных величин X_i. Как известно, наилучшими статистическими оценками моментов являются выборочные моменты:

$$\mathsf{E}X_1^k \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\mathsf{D}X_1 \approx \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2, \quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Однако для уточнения выводов нужна более полная информация о распределениях страховых выплат. Другими словами, необходима *статистическая идентификация распределений.*

Принято говорить, что моменты осуществления страховых выплат образуют *поток* выплат на временнóй оси. С теоретической точки зрения задача статистической идентификации распределений является частью задачи *статистической идентификации потоков страховых выплат*.

Целью задачи идентификации распределений является подбор такого распределения из заранее выделенного достаточно широкого набора чаще всего употребляемых законов, которое наиболее точно описывает распределение экспериментальных данных. *Подгонка распределений* состоит из двух этапов. Первый этап – это этап *статистического оценивания распределений*, второй этап – это этап *проверки согласия* экспериментальных данных с оцененными распределениями и выбор наилучшей модели.

Задача идентификации потоков страховых выплат сложнее, чем задача идентификации распределений, так как помимо последней включает в себя задачи *проверки однородности наблюдений* и *проверки их независимости*.

Ниже упомянутые задачи будут рассмотрены подробно.

11.1.1 Подгонка распределений

В качестве исходных данных для решения задачи идентификации распределений страховых выплат используется *выборка* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – набор n чисел, где каждое x_i представляет собой реализацию (то есть наблюдаемое значение) случайной величины X_i. В данном пункте мы будем предполагать, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и имеют одинаковое распределение. В таком случае иногда говорят о независимой и однородной выборке, но мы для краткости будем говорить просто о *выборке*, по умолчанию подразумевая наличие у случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ свойств независимости и совпадения распределений. В таком случае выборку можно интерпретировать как n независимых реализаций *одной и той же* случайной величины X. Если уверенности в наличии этих свойств нет, то сначала необходимо проверить однородность и независимость выборки так, как об этом будет сказано в соответствующем разделе. Поскольку с формальной точки зрения анализ распределения интервалов времени между последовательными выплатами идентичен анализу распределения самих выплат, мы, если не оговорено противное, впредь будем иметь дело только с размерами $X_1, X_2, \ldots, X_n$ страховых выплат.

11.1.2 Непараметрическое оценивание

Для визуализации данных необходимо построить непараметрическую оценку распределений.В качестве такой оценки проще всего построить *гистограмму*, которая является оценкой функции плотности вероятностей $f(x)$ рассматриваемого распределения. Гистограмма строится по формуле

$$\widetilde{f}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} n_j \mathbf{1}_x([L_0 + (j-1)h,\ L_0 + jh)),$$

где

$$m = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{если } n \le 200; \\ c\ln n, & \text{если } n > 200, \end{cases}$$

$$c = \frac{10\sqrt{2}}{\ln 2 + 2\ln 10},$$

$$h = \frac{1}{m}\Big[\max_{1\le j\le n} x_j - \min_{1\le j\le n} x_j\Big],$$

$$L_0 = \min_{1\le j\le n} x_j,$$

$\mathbf{1}_x(A)$ – индикаторная функция множества A, то есть

$$\mathbf{1}_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A; \\ 0, & \text{если } x \notin A, \end{cases}$$

n_j – число элементов x_i выборки, удовлетворяющих неравенствам

$$L_0 + (j-1)h \le x_i < L_0 + jh.$$

Если изучаемое распределение дискретно с целочисленными значениями, то строится *частотная оценка* вида

$$\widetilde{f}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} n_j \mathbf{1}_x([(j-1)h,\ jh)),$$

где m и h имеют тот же смысл, что и выше, а n_j – число элементов x_i выборки, равных j.

При всей простоте, гистограмма имеет несколько существенных недостатков. Во-первых, гистограмма не является в достаточной степени гладкой функцией. Во-вторых, гистограмма строится *по сгруппированным данным*, и стало быть, происходит потеря информации при группировании, когда наблюдения, попавшие в один интервал $[L_0 + (j-1)h, L_0 + jh)$, фактически заменяются их средним значением.

Идея построения более совершенных оценок плотности заключается в следующем. Если наблюдаемыми значениями выборки $\mathbf{X}$ =

$(X_1, \ldots, X_n)$ является набор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, то соответствующая реализация эмпирической функции распределения

$$F_n(x) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty,x)}(x_j) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Q_j(x)$$

является средним арифметическим функций

$$Q_j(x) \;=\; \begin{cases} 0, & \text{если } x \le x_j, \\ 1, & \text{если } x > x_j. \end{cases}$$

Каждая функция $Q_j(x)$ представляет собой вырожденную функцию распределения, соответствующую случайной величине, с вероятностью единица принимающей значение x_j. Теперь ясно, что если вместо функций $Q_j(x)$ взять какие-нибудь гладкие (непрерывные) функции распределения $G_j(x)$, то соответствующая оценка для функции распределения $F(x)$ также станет гладкой. На практике в качестве $G_j(x)$ берут функции вида $G_j(x) = G(x - X_j)/a_n)$, где $G(x)$ – некоторая фиксированная функция распределения, а $a_n > 0$ – так называемый параметр гладкости, выбор которого является прерогативой исследователя, так что получается приближенная формула

$$F(x) \;\approx\; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} G\Big(\frac{x - X_j}{a_n}\Big). \tag{11.1.1}$$

Легко убедиться, что если при этом функции распределения $G(x)$ соответствует плотность $g(x)$, то есть $G(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} g(x)dx$, то функции распределения, стоящей в правой части формулы (11.1.1) соответствует плотность

$$f_n(x) \;=\; \frac{1}{na_n}\sum_{j=1}^{n} g\Big(\frac{x - X_j}{a_n}\Big). \tag{11.1.2}$$

Функция $f_n(x)$ представляет собой оценку для неизвестной плотности $p(x)$. Оценки типа (11.1.2) называются *ядерными*, а соответствующая плотность $g(x)$ называется *ядром*.

При использовании ядерных оценок плотности главными проблемами являются выбор ядра и выбор параметра гладкости. Как правило, используются ядра, удовлетворяющие условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)dx = 1.$$

Первое из этих условий вытекает из требования, чтобы функция $g(x)$ была плотностью распределения, второе условие означает, что случайная величина с плотностью распределения $g(x)$ имеет нулевое математическое ожидание, а третье условие означает, что дисперсия этой случайной величины равна единице. Чаще всего в качестве $g(x)$ используются равномерная плотность $g(x) = \mathbf{1}_{[-\sqrt{3},\sqrt{3}]}(x)$ (в этом случае получается непрерывная оценка для функции распределения $F(x)$, но ступенчатая оценка для плотности $f(x)$) или стандартная нормальная плотность $g(x) = \phi(x)$. Некоторые исследователи отмечают, что хорошие, наглядные результаты дает применение квадратичного ядра

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -2.5, \\ -\dfrac{576x^2}{390625} + \dfrac{144}{15625} & \text{при } -2.5 \le x \le 2.5, \\ 0 & \text{при } x > 2.5. \end{cases}$$

При малых значениях параметра гладкости a_n ядерная оценка имеет много довольно часто расположенных острых зубцов. При увеличении параметра a_n ядерная оценка становится все более и более гладкой. При этом в качестве окончательного значения выбирается то, при котором вид ядерной оценки плотности в наибольшей степени устраивает исследователя. Другими словами, выбор параметра сглаживания на практике – это в бóльшей степени искусство или шаманство, нежели математика.

11.1.3 Параметрическое оценивание

Задача параметрического оценивания заключается в том, чтобы для каждого из фиксированного набора (банка) распределений, наиболее часто употребляемых для описания размера страховой выплаты или периода времени между последовательными выплатами, найти приближенные значения соответствующих параметров, более всего соответствующих выборке.

Перед тем как описать каждое из распределений, влюченных в банк, и привести формулы, определяющие статистические оценки их параметров, обсудим некоторые общие понятия и методы *статистического оценивания.*

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – выборка, представляющая собой n реализаций случайной величины X. Предположим, что распределение случайной величины задано с точностью до неизвестного параметра θ (который может быть многомерным: $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$). Функцию распределения случайной величины X будем обозначать $F(x;\theta)$. По определению,

$$F(x;\theta) = \mathsf{P}(X < x), \qquad x \in \mathbb{R};$$

строго говоря, в последнем соотношении вероятность P зависит от параметра θ. Символом $f(x;\theta)$ будем обозначать *плотность вероятностей* случайной величины X, если последняя является абсолютно непрерывной. Напомним, что плотность – это такая функция, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$F(x;\theta) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x;\theta)dx.$$

Тем же самым символом $f(x;\theta)$ мы будем обозначать и *функцию частоты* дискретной случайной величины X, то есть такую функцию, что $\mathsf{P}(X = x) = f(x;\theta)$, где x принадлежит множеству возможных значений случайной величины X.

Оценкой параметра θ называется функция от выборки, принимающая значения в множестве возможных значений параметра θ.

Среди всевозможных функций от выборки разумно иметь дело только с такими функциями

$$\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n),$$

для которых справедливо приближенное равенство

$$\widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n) \approx \theta.$$

Смысл символа $\approx$ раскрывается в следующих определениях.

Будем говорить, что оценка $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ является *несмещенной оценкой* параметра θ, если

$$\mathsf{E}_\theta \widehat{\theta}(X_1, \ldots, X_n) \equiv \theta. \tag{11.1.3}$$

Здесь символ математического ожидания снабжен индексом θ, чтобы подчеркнуть зависимость распределения каждой из случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ от параметра θ. Свойство несмещенности означает, что значения оценки $\widehat{\theta}$, вычисленные по разным выборкам, должны группироваться вокруг истинного значения параметра θ.

Будем говорить, что оценка $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ является *состоятельной оценкой* параметра θ, если

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_\theta(|\widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n) - \theta| < \epsilon) = 1 \tag{11.1.4}$$

при любом $\epsilon > 0$ и всех возможных значениях θ. Символ вероятности в (11.1.4) снабжен индексом θ по уже оговоренным причинам. Свойство состоятельности означает, что по мере увеличения объема выборки n точность приближения параметра θ с помощью оценки $\widehat{\theta}$ возрастает.

Точность оценки $\widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ может характеризовать функция риска, например, вида

$$S_{\widehat{\theta}}(\theta) = \mathsf{E}_\theta(\widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n) - \theta)^2.$$

При этом, если оценка $\widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ является несмещенной, то

$$S_{\widehat{\theta}}(\theta) = \mathsf{D}_\theta \widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n).$$

Предпочтительнее пользоваться той оценкой, которая имеет меньший риск. При фиксированном объеме выборки функции риска нетривиальных оценок ограничены снизу одной и той же величиной.

Будем говорить, что оценка $\widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ является *оптимальной*, если для любой другой оценки $\widetilde{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ выполняется неравенство

$$S_{\widehat{\theta}}(\theta) \leq S_{\widetilde{\theta}}(\theta)$$

при всех возможных значениях параметра θ.

Наиболее распространенными методами построения оценок (то есть функций от выборки) являются *метод моментов* и *метод максимального правдоподобия*. Опишем сначала *метод моментов*. Предположим, что $\theta = (\theta_1, \ldots \theta_r)$. Поскольку распределение $F(x; \theta$ зависит от θ, от θ, вообще говоря, также будет зависеть и $\mathsf{E}_\theta X^k$ – теоретический момент случайной величины X порядка k (если он существует) – при каждом целом $k \geq 1$. Обозначим

$$\mu_k(\theta_1, \ldots \theta_r) = \mathsf{E}_\theta X^k.$$

Идея метода моментов заключается в приравнивании теоретических моментов $\mu_k(\theta_1, \ldots \theta_r)$ эмпирическим моментам $\frac{1}{n}(x_1^k + \ldots + x_n^k)$:

$$\mu_k(\theta_1, \ldots \theta_r) = \frac{1}{n}(x_1^k + \ldots + x_n^k), \qquad k = 1, 2, \ldots, r \tag{11.1.5}$$

и разрешении системы уравнений (11.1.5) относительно $\theta_1, \ldots \theta_r$. Полученные таким образом оценки, как правило, являются состоятельными.

Метод максимального правдоподобия заключается в отыскании такого значения θ, которое при фиксированной выборке $x_1, \ldots, x_n$ доставляет максимум *функции правдоподобия*

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j; \theta).$$

Идею метода максимального правдоподобия наглядно иллюстрирует ситуация, когда X – дискретная случайная величина. В этом случае $L(\theta; x_1, \ldots, x_n)$ – это вероятность того, что будут наблюдаться именно значения $x_1, \ldots, x_n$. Интуитивно ясно, что чаще других происходят события, вероятность которых велика. Коль скоро мы знаем выборку

$x_1, \ldots, x_n$, то событие, результатом которого она стала, произошло, а раз так, то есть все основания считать, что вероятность этого события велика. Таким образом, надо искать те значения θ, при которых функция правдоподобия $L(\theta; x_1, \ldots, x_n)$ велика. Оценки, полученные по методу наибольшего правдоподобия, как правило, состоятельны и при больших n почти оптимальны.

11.1.4 Наиболее часто употребляемые дискретные распределения и оценки их параметров

Теперь мы приступаем к описанию банка моделей и оценок соответствующих параметров.

Биномиальное распределение.

Функция частоты имеет вид

$$f(x;\theta) = C_m^x p^x (1-p)^{m-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, m.$$

Параметры: $m \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$.

Если случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами m и p, то

$$\mathsf{E}X = mp, \quad \mathsf{D}X = mp(1-p), \quad \mathsf{E}X^3 = mp(1-p)(1-2p).$$

Случайная величина, имеющая биномиальное распределение с параметрами m и p, может быть интерпретирована как число появлений некоторого события в последовательности из m независимых испытаний, когда вероятность появления этого события в каждом испытании равна p.

Если $\theta = (m, p)$, то есть неизвестны оба параметра, то оценки метода моментов для m и p имеют вид

$$\widetilde{m} = \left[\frac{(\overline{x})^2}{\overline{x} - s^2}\right], \quad \widetilde{p} = 1 - \frac{s^2}{\overline{x}},$$

где

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j, \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2,$$

а символ $[a]$ обозначает целую часть числа а.

Если $\theta = p$, то есть неизвестен только параметр p, то оптимальной оценкой параметра p является

$$\widehat{p} = \frac{\overline{x}}{m}.$$

Отрицательное биномиальное распределение.

Функция частоты имеет вид

$$f(x;\theta) = C_{m+x-1}^{x-1} p^m (1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

Параметры: $m \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$.

Если случайная величина X имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами m и p, то

$$\mathsf{E}X = \frac{m(1-p)}{p}, \quad \mathsf{D}X = \frac{m(1-p)}{p^2}, \quad \mathsf{E}X^3 = \frac{m(1-p)(2-p)}{p^3}.$$

Случайная величина, имеющая отрицательное биномиальное распределение с параметрами m и p, может быть интерпретирована как единица плюс число появлений некоторого события в последовательности независимых испытаний, когда вероятность появления этого события в каждом испытании равна p, до m-го испытания, закончившегося непоявлением рассматриваемого события.

Если $\theta = (m, p)$, то есть неизвестны оба параметра, то оценки метода моментов для m и p имеют вид

$$\widetilde{m} = \left[\frac{(\overline{x}-1)^2}{s^2 - \overline{x} + 1}\right], \quad \widetilde{p} = 1 - \frac{\overline{x}-1}{s^2}. \tag{11.1.6}$$

Если $\theta = p$, то есть неизвестен только параметр p, то оптимальной оценкой параметра p является

$$\widehat{p} = \frac{\overline{x}}{\overline{x} + m - \frac{1}{n}}. \tag{11.1.7}$$

Иногда под отрицательным биномиальным распределением понимают распределение, задаваемое частотой

$$f(x;\theta) = C_{m+x-1}^{x} p^m (1-p)^{x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \tag{11.1.8}$$

или частотой

$$f(x;\theta) = C_{x-1}^{m-1} p^m (1-p)^{m-x}, \quad x = m, m+1, \dots \tag{11.1.9}$$

Ни в одном из этих случаев оценки (11.1.6) или (11.1.7) не применимы. Чтобы воспользоваться этими формулами, необходимо предварительно преобразовать выборку, прибавив к каждому ее элементу единицу в случае (11.1.8) или уменьшив каждый ее элемент на $m-1$ в случае (11.1.9).

Геометрическое распределение.

Функция частоты имеет вид

$$f(x;p) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

Параметр: $p \in (0,1)$.

Если случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром p, то

$$\mathsf{E}X = \frac{1-p}{p}, \quad \mathsf{D}X = \frac{1-p}{p^2}, \quad \mathsf{E}X^3 = \frac{(1-p)(2-p)}{p^3}.$$

Геометрическое распределение является частным случаем отрицательного биномиального с $m = 1$. Геометрическое распределение является дискретным аналогом показательного распределения (см. ниже).

Наилучшая несмещенная оценка параметра p имеет вид

$$\widehat{p} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\overline{x} + 1 - \frac{1}{n}}.$$

Распределение Пуассона.

Функция частоты имеет вид

$$f(x;\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Параметр: $\lambda > 0$.

Если случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром λ, то

$$\mathsf{E}X = \mathsf{D}X = \lambda.$$

Оптимальная оценка параметра λ имеет вид

$$\widehat{\lambda} = \overline{x}.$$

11.1.5 Наиболее часто употребляемые непрерывные распределения размера страховой выплаты и оценки их параметров

Равномерное распределение.

Соответствующая плотность имеет вид

$$f(x;\theta) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_x([a,b]), \quad \mathcal{X} \in \mathbb{R}.$$

Параметры $-\infty < a < b < \infty$.

Если случайная величина X имеет равномерное распределение с параметрами a и b, то

$$\mathsf{E}X = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathsf{D}X = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$\mathsf{E}X^k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Если $\theta = (a, b)$, то есть неизвестны оба параметра, то наилучшими несмещенными оценками параметров a и b являются

$$\widehat{a} = \frac{1}{n-1}\Big[n \min_{1 \le j \le n} x_j - \max_{1 \le j \le n} x_j\Big],$$

$$\widehat{b} = \frac{1}{n-1}\Big[n \max_{1 \le j \le n} x_j - \min_{1 \le j \le n} x_j\Big].$$

Если $a = 0$ и $\theta = b$, то наилучшей оценкой параметра b является

$$\widehat{b} = \frac{n+1}{n} \max_{1 \le j \le n} x_j.$$

Гамма-распределение.

Соответствующая плотность имеет вид

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(\alpha)$ – эйлерова гамма-функция:

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Параметры: $\lambda > 0$ (параметр масштаба); $\alpha > 0$ (параметр формы).

Если случайная величина X имеет гамма-распределение с параметрами α и λ, то

$$\mathsf{E}X = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad \mathsf{D}X = \frac{\alpha}{\lambda^2},$$

$$\mathsf{E}X^k = \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha+k-1)}{\lambda^k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Если $\theta = (\alpha, \lambda)$, то есть неизвестны оба параметра, то оценки метода моментов для α и λ имеют вид

$$\widetilde{\alpha} = \frac{(\overline{x})^2}{s^2}, \qquad \widetilde{\lambda} = \frac{\overline{x}}{s^2}.$$

Если $\theta = \lambda$, то есть неизвестен только параметр λ, то наилучшая несмещенная оценка параметра λ имеет вид

$$\widehat{\lambda} = \frac{\alpha - \frac{1}{n}}{\overline{x}}.$$

Показательное (экспоненциальное) распределение.

Соответствующая плотность имеет вид

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Параметр: $\lambda > 0$.

Показательное распределение является частным случаем гамма-распределения, соответствующим значению $\alpha = 1$.

Если случайная величина X имеет показательное распределение с параметром λ, то

$$\mathsf{E}X = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathsf{D}X = \frac{1}{\lambda^2},$$

$$\mathsf{E}X^k = \frac{(k-1)!}{\lambda^k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Наилучшая несмещенная оценка параметра λ имеет вид

$$\widehat{\lambda} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\overline{x}}.$$

Распределение Эрланга.

Соответствующая плотность имеет вид

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{(\mu m)^m}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-\mu m x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Параметры: $m \in \mathbb{N}$ (параметр формы); $\mu > 0$ (параметр масштаба).

Распределение Эрланга является частным случаем гамма-распределения, соответствующим значениям $\alpha = m$, $\lambda = \mu m$. Если случайная величина X имеет распределение Эрланга с параметрами m и μ, то

$$\mathsf{E}X = \frac{1}{\mu}, \qquad \mathsf{D}X = \frac{1}{m\mu^2},$$

$$\mathsf{E}X^k = \frac{(m-k+1)!}{(m-1)!(\mu m)^k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Если $\theta = (m, \mu)$, то есть неизвестны оба параметра, то оценки метода моментов для m и μ имеют вид

$$\widetilde{m} = \left[\frac{(\overline{x})^2}{s^2}\right] + 1, \qquad \widetilde{\mu} = \frac{1}{\overline{x}}.$$

Если $\theta = \mu$, то есть неизвестен только параметр μ, то наилучшая несмещенная оценка параметра μ имеет вид

$$\widehat{\mu} = \frac{m - \frac{1}{n}}{m\overline{x}}.$$

Гиперэкспоненциальное распределение.

Соответствующая плотность имеет вид

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \sum_{k=1}^{m} p_k \lambda_k e^{-\lambda_k x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Параметры: $m \in \mathbb{N}$; $p_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, m$ $(p_1 + \ldots + p_m = 1)$; $\lambda_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$.

Гиперэкспоненциальное распределение представляет собой *конечную смесь* показательных законов.

Если случайная величина X имеет гиперэкспоненциальное распределение, то

$$\mathsf{E}X^k = k! \sum_{j=1}^{m} \frac{p_j}{\lambda_j^k}, \qquad \mathsf{D}X = 2\sum_{j=1}^{m} \frac{p_j}{\lambda_j^2} - \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{p_j}{\lambda_j}\right]^2.$$

Оценки параметров гиперэкспоненциального распределения ищутся с помощью численной максимизации функции правдоподобия.

Распределение Вейбулла.

Соответствующая плотность имеет вид

$$f(x;\theta)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ \lambda\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}, & \text{если } x>0.\end{cases}$$

Параметры: $\lambda>0$ (параметр масштаба); $\alpha>0$ (параметр формы).

Если случайная величина X имеет распределение Вейбулла с параметрами α и λ, то

$$\mathsf{E}X=\lambda^{-1/\alpha}\Gamma\Big(\frac{1}{\alpha}+1\Big),\qquad \mathsf{D}X=\lambda^{-2/\alpha}\Big\{\frac{2}{\alpha}\Gamma\Big(\frac{2}{\alpha}\Big)-\frac{1}{\alpha^2}\Big[\Gamma\Big(\frac{1}{\alpha}\Big)\Big]^2\Big\},$$

$$\mathsf{E}X^k=\lambda^{-k/\alpha}\Gamma\Big(\frac{k}{\alpha}+1\Big),\qquad k=1,2,\ldots$$

При $\alpha=1$ распределение Вейбулла переходит в показательное распределение.

Оценка параметра α ищется (см. (Гумбель, 1965), с. 349) как решение уравнения

$$\overline{\kappa}_3=\frac{\Gamma\Big(1+\frac{3}{\alpha}\Big)-3\Gamma\Big(1+\frac{2}{\alpha}\Big)\Gamma\Big(1+\frac{1}{\alpha}\Big)+2\Big[\Gamma\Big(1+\frac{1}{\alpha}\Big)\Big]^3}{\Big\{\Gamma\Big(1+\frac{2}{\alpha}\Big)-\Big[\Gamma\Big(1+\frac{1}{\alpha}\Big)\Big]^2\Big\}^{3/2}},$$

где $\overline{\kappa}_3$ – выборочный коэффициент асимметрии,

$$\overline{\kappa}_3=\frac{1}{ns^3}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\overline{x})^3.$$

При известном значении параметра α и $n\alpha>1$ наилучшая несмещенная оценка параметра λ имеет вид (см. (Воинов и Никулин, 1989), с. 326)

$$\widetilde{\lambda}=\frac{\Gamma(n)}{\Gamma\Big(n-\frac{1}{\alpha}\Big)T^{1/\alpha}},$$

где

$$T=\sum_{j=1}^{n}x_j^{\alpha}.$$

Распределение Вейбулла, наряду с гамма-распределением, по мнению многих авторов является наиболее разумной моделью распределения страховых выплат.

Логнормальное распределение.

Соответствующая плотность имеет вид

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2} \right\}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Параметры: $\sigma > 0$ (параметр масштаба); $m \in \mathbb{R}$ (параметр формы).

Если случайная величина X имеет логнормальное распределение с параметрами σ и m, то

$$\mathsf{E}X = \exp\left\{\frac{\sigma^2}{2} + m\right\}, \qquad \mathsf{D}X = e^{\sigma^2+2m}(e^{\sigma^2} - 1),$$

$$\mathsf{E}X^k = \exp\left\{\frac{k^2\sigma^2}{2} + km\right\}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Если случайная величина Y имеет нормальное распределение с параметрами m и σ^2, то случайная величина $X = e^Y$ имеет логнормальное распределение с параметрами σ и m.

Наилучшей несмещенной оценкой для параметра m является

$$\widetilde{m} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln x_j,$$

наилучшей несмещенной оценкой для параметра σ^2 является

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left(\ln x_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln x_j \right)^2.$$

Хи-распределение.

Плотность хи-распределения с m степенями свободы имеет вид

$$f(x;\theta,m) = \begin{cases} \dfrac{\theta^m x^{m-1} \exp\{-(\theta x)^2/2\}}{2^{m/2-1}\Gamma(m/2)}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Если случайная величина X имеет хи-распределение с m степенями свободы, то

$$\mathsf{E}X^k = \frac{2^{k/2}\Gamma((m+k)/2)}{\theta^k \Gamma(m/2)},$$

$$\mathsf{D}X = \frac{m}{\theta^2} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\theta^2} \left[\frac{\Gamma((m+1)/2)}{\Gamma(m/2)} \right]^2.$$

Оценки метода моментов параметров θ и m ищутся как решение системы уравнений

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\sqrt{2}\Gamma((m+1)/2)}{\theta\Gamma(m/2)} \\ \theta^2 s^2 = m + (2-\sqrt{2})\Big[\dfrac{\Gamma((m+1)/2)}{\Gamma(m/2)}\Big]^2. \end{cases}$$

Распределение Рэлея–Райса.

Хи-распределение с двумя степенями свободы ($m = 2$) называется *распределением Рэлея–Райса*. Его плотность имеет вид

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta^2 x \exp\{-(\theta x)^2/2\}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Для распределения Рэлея–Райса простейшая оценка параметра θ по методу моментов имеет вид

$$\widetilde{\theta}_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{\overline{x}}.$$

11.1.6 Критерий согласия хи-квадрат.

Степень адекватности математической модели, описывающей ту или иную стохастическую ситуацию, можно проверить с помощью так называемых критериев согласия. В данном разделе мы рассмотрим два таких критерия – критерий согласия хи-квадрат и критерий согласия Колмогорова.

Критерий согласия хи-квадрат использует сгруппированные данные подобно тому, как это было сделано при рассмотрении гистограммы в разделе 11.1.1.

Пусть имеется независимая однородная выборка $X_1, \dots, X_n$ из генеральной совокупности с неизвестным распределением $F(x) = \mathsf{P}(X_1 < x)$. Предположим, что для описания вида распределения $F(x)$ сформулирована модель $F_0(x)$. Проверка адекватности этой модели по выборке $X_1, \dots, X_n$ эквивалентна проверке гипотезы о том, что $F(x) \equiv F_0(x)$. Критерий согласия хи-квадрат как раз и предназначен для проверки этой гипотезы. Заключение о справедливости указанной выше гипотезы делается на основе сравнения *статистики хи-квадрат* с соответствующим пороговым значением. Опишем эту процедуру подробнее.

Пусть a и b – числа, удовлетворяющие неравенствам $a < X_{(1)}$, $b > X_{(n)}$ (напомним, что $X_{(1)}$ – наименьший элемент выборки, а $X_{(n)}$ –

наибольший). Зададим целое положительное число k и разобьем интервал $[a, b]$ на k равных непересекающихся частей. Обозначим полученные подынтервалы символами Δ_j, $j = 1, \ldots, k$ (в формальной записи $\Delta_j = [a+(j-1)\delta, a+j\delta)$, $j = 1, \ldots, k$, где $\delta = (b-a)/k$). Пусть ν_j – число тех элементов выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которые попали в интервал Δ_j. С помощью модельной (гипотетической) функции распределения $F_0(x)$ определим числа $p_j^{(0)}$, положив $p_j^{(0)} = F_0(j\delta) - F_0((j-1)\delta)$, $j = 1, \ldots, k$ (другими словами, $p_j^{(0)}$ – это вероятность того, что случайно взятый элемент генеральной совокупности попадает в интервал Δ_j, вычисленная в предположении о том, что $F(x) \equiv F_0(x)$). *Статистикой хи-квадрат* называется величина

$$X^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(\nu_j - np_j^{(0)})^2}{np_j^{(0)}}.$$

В терминах выборочных частот $\widetilde{p}_j = \nu_j/n$ статистика хи-квадрат может быть записана в виде

$$X^2 = n \sum_{j=1}^{k} \frac{(\widetilde{p}_j - p_j^{(0)})^2}{p_j^{(0)}}.$$

Статистика хи-квадрат характеризует суммарное отклонение выборочных (наблюдаемых) частот от теоретических (гипотетических). По тому, насколько велика эта статистика, можно сделать вывод о неадекватности или адекватности (согласии) теоретического распределения с экспериментальными данными. Чем эта статистика больше, тем менее адекватна теоретическая модель. А именно, справедлива так называемая *теорема Пирсона*, устанавливающая, что, если гипотеза $F(x) \equiv F_0(x)$ верна, то при неограниченно увеличивающемся объеме выборки ($n \to \infty$) распределение случайной величины X^2, введенной выше, все больше и больше сближается с распределением хи-квадрат с $k - 1$ степенями свободы.

Зафиксируем малое положительное число α (на практике традиционно выбирается $\alpha = 0.01$ или $\alpha = 0.05$). Пусть, как и ранее, $\chi^2_{k-1}(1-\alpha)$ – $(1-\alpha)$-квантиль распределения хи-квадрат с $k - 1$ степенями свободы. Процедура проверки указанной гипотезы с помощью критерия хи-квадрат заключается в следующем. Значение статистики хи-квадрат X^2 сравнивается с порогом $\chi^2_{k-1}(1-\alpha)$. Если $X^2 > \chi^2_{k-1}(1-\alpha)$, то гипотеза о том, что $F(x) \equiv F_0(x)$ отвергается. Если же $X^2 \leq \chi^2_{k-1}(1-\alpha)$, то делается вывод о том, что экспериментальные данные не противоречат выдвинутой гипотезе, то есть согласуются с ней. При этом вероятность ошибочного отклонения гипотезы $F(x) \equiv F_0(x)$, если она на самом деле верна, равна α.

На практике критерий согласия хи-квадрат можно применять, если наименьшая из величин $np_1^{(0)}, \ldots, np_k^{(0)}$ не меньше пяти.

Критерий согласия хи-квадрат можно применять и тогда, когда сформулированная гипотеза описывает распределение генеральной совокупности не однозначно, а с точностью до некоторых неизвестных параметров: $F(x) \equiv F_0(x; \theta_1, \ldots, \theta_r)$. В этом случае необходимо предварительно оценить неизвестные параметры и вычислить значения $p_j^{(0)}$ как $p_j^{(0)} = F_0(j\delta; \hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_r) - F_0((j-1)\delta; \hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_r)$, $j = 1, \ldots, k$. При этом, однако, предельным распределением случайной величины X^2 будет распределение хи-квадрат с $k - r - 1$ степенями свободы, и стало быть, величину X^2 надо сравнивать с $(1-\alpha)$-квантилью именно этого распределения.

При использовании критерия согласия хи-квадрат надо, однако, принимать во внимание следующие обстоятельства.

a). Критерий хи-квадрат имеет асимптотический характер: только при “бесконечно большом"объеме выборки распределение статистики X^2 совпадает с распределением хи-квадрат. Точность же приближения истинного (допредельного) распределения этой статистики предельным распределением хи-квадрат, вообще говоря, неизвестна. Поэтому истинная вероятность ошибки, совершаемой при отказе от верной гипотезы, не совпадает с α.

b). Более того, если если проверяемая гипотеза неоднозначно задает распределение генеральной совокупности, то предельное распределение статистики X^2 будет совпадать с распределением хи-квадрат (с соответствующим числом степеней свободы), только если неизвестные параметры оцениваются с помощью так называемого полиномиального метода максимального правдоподобия. По крайней мере, сходимость распределения статистики X^2 к распределению хи-квадрат доказана только для такого случая.

c). Поскольку базой для вычисления статистики критерия согласия хи-квадрат являются сгруппированные данные типа гистограммы, конкретное значение этой статистики существенно зависит от того, как сгруппированы данные, то есть от числа k интервалов и выбора точек a и b.

d). Критерий согласия хи-квадрат позволяет сделать вывод о том, что данные *не согласуются* с той или иной гипотезой. Однако с его помощью нельзя сделать вывода о том, что данные *согласуются* с конкретной гипотезой. Можно лишь сделать вывод о том, что данные ей *не противоречат.*

е). Чрезмерно малые (близкие к нулю) значения статистики X^2 (на основании которых формально надо делать вывод о том, что данные не противоречат проверяемой гипотезе, свидетельствуют о нарушении условий независимости или однородности наблюдений, как если бы при многократном воспроизведении серий, скажем, по четыре испытания Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании, скажем, равной $\frac{1}{4}$, каждый раз наблюдался бы ровно один успех.

11.1.7 Критерий согласия Колмогорова.

Если теоретическая (гипотетическая) функция распределения генеральной совокупности непрерывна, то адекватность выбранной модели можно проверять с помощью критерия согласия Колмогорова. Он основан на сравнении *статистики Колмогорова* с соответствующим пороговым значением. Опишем эту процедуру подробнее.

Пусть $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $X_1, \ldots, X_n$ так, как это было описано в разделе 11.1.1. Пусть в отношении (неизвестного) распределения генеральной совокупности $F(x)$ выдвинута гипотеза $F(x) \equiv F_0(x)$. Определим *статистику Колмогорова* $D_n^{(0)}$ как

$$D_n^{(0)} = \max_x |F_n(x) - F_0(x)|.$$

Значение этой статистики, как несложно видеть, можно вычислить по формуле

$$D_n^{(0)} = \max_{j=1,\ldots,n} |F_n(X_{(j)}) - F_0(X_{(j)})|.$$

Статистика Колмогорова характеризует отклонение выборочной (эмпирической) функции распределения от теоретической (гипотетической). По тому, насколько велика эта статистика, можно сделать вывод о неадекватности или адекватности теоретического распределения (его согласии с экспериментальными данными). Чем эта статистика больше, тем менее адекватна теоретическая модель. А именно, можно показать, что, если верна гипотеза $F(x) \equiv F_0(x)$, то при неограниченном увеличении объема выборки ($n \to \infty$) распределение величины $\sqrt{n}D_n^{(0)}$ все больше и больше сближается с функцией распределения Колмогорова $K(x)$.

Поэтому, если мы зафиксируем произвольное малое положительное число α и, как и ранее, $(1-\alpha)$-квантиль распределения Колмогорова обозначим через $k(1-\alpha)$, то указанная гипотеза отклоняется, если $\sqrt{n}D_n^{(0)} > k(1-\alpha)$. Если же $\sqrt{n}D_n^{(0)} \le k(1-\alpha)$, то делается вывод о том, что экспериментальные данные не противоречат выдвинутой гипотезе, то есть согласуются с ней. При этом вероятность ошибочного отклонения гипотезы $F(x) \equiv F_0(x)$, если она на самом деле верна, равна α.

Критерий согласия Колмогорова можно применять только тогда, когда выдвинутая гипотеза однозначно описывает непрерывное распределение генеральной совокупности, то есть не содержит никаких неизвестных параметров. Например, с его помощью *нельзя* проверять гипотезу “распределение генеральной совокупности нормально", поскольку нормальных распределений бесконечно много и каждое из них определяется парой параметров, но *можно* проверить гипотезу “распределение генеральной совокупности нормально с параметрами 0 и 1". При подстановке оценок параметров, построенных по выборке, вместо неизвестных параметров гипотетической функции распределения в статистику Колмогорова $D_n^{(0)}$ *изменяется ее предельное распределение*, которое становится зависящим от конкретного вида гипотетической функции распределения и способа получения оценок. А это означает, что истинная вероятность ошибки будет отличаться от требуемого значения (оставаясь, вообще говоря, неизвестной).

11.1.8 Выбор наилучшей модели

Поскольку, как правило, на практике значения параметров, фигурирующих в тех или иных аналитических моделях распределений, неизвестны, а критерий согласия Колмогорова ориентирован на проверку простых гипотез согласия (то есть таких, в которых все параметры считаются известными), то на практике проверку согласия моделей и экспериментальных данных целесообразно проводить с использованием критерия хи-квадрат. Кратко опишем методику выбора наилучшей модели с помощью такого подхода.

Для каждой из моделей, упомянутых выше, с учетом оценок параметров, полученных на этапе подгонки, вычисляется значение статистики хи-квадрат, определяемое как

$$T_k = T_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{n_j - np_j^{(k)})^2}{np_j^{(k)}}.$$

Здесь числа k – номер модельного распределения, m и n_j определяются так же, как при построении гистограммы (см. пункт 11.1.1), а $p_j^{(k)}$ – вероятность того, что случайная величина с k-м модельным распределением попадет в j-й интервал (см. пункт 11.1.1)

Пусть $r(k)$ – число параметров k-го модельного распределения, оцененных по выборке $x_1, \ldots, x_n$.

Выбор наиболее адекватной модели осуществляется следующим образом. Для каждого k вычисляются значения

$$P_k = 1 - \chi^2_{m-r(k)-1}(T_k),$$

где $\chi^2_l(x)$ – значение функции распределения хи-квадрат с l степенями свободы, соответствующей плотности

$$p_l(x) = \frac{x^{l/2-1}e^{-x/2}}{2^{l/2}\Gamma(l/2)}, \quad x > 0.$$

Числа P_k примерно (при больших n) равны вероятностям того, что будут наблюдаться такие же или еще бóльшие отклонения от модельных законов. В качестве наиболее адекватной принимается модель с номером k_0, для которого

$$P_{k_0} = \max_k P_k.$$

11.2 Статистические оценивание вероятности разорения в классическом процессе риска

В этом разделе мы рассмотрим некоторые методы построения статистических оценок для параметров классического процесса риска

$$R(t) = ct - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j, \quad t \geq 0,$$

где $c > 0$ – интенсивность роста страховой премии, $\{X_j\}_{j\geq1}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathsf{E}X_j = \mu$, имеющие смысл страховых выплат, $N(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$, независимый от $\{X_j\}_{j\geq1}$ и имеющий смысл количества страховых случаев до момента времени t.

В силу многих причин распределение страховых требований никогда не бывает известно с исчерпывающей точностью. Аналогично, изначальные представления об интенсивности предстоящих страховых выплат могут не совпадать с реальной ситуацией. Поэтому аналитические методы, описаные выше, могут дать неаккуратные оценки для параметров процесса риска. Таким образом, с течением времени может возникнуть необходимость сверить априорные расчеты, определяющие величину риска страховой компании, то есть вероятность разорения, с тем, как развивается процесс риска в действительности. Те самым мы приходим к задаче о статистическом оценивании вероятности разорения (и попутно других параметров процесса риска) по предыстории.

Будем считать, что в момент времени $t > 0$ *известны*:

1. коэффициент c (он определяется (“назначается”) самой страховой компанией и/или действующим законодательством);

2. моменты осуществления страховых выплат (на самом деле, как мы увидим ниже, нужны даже не сами моменты выплат, а лишь информация об их количестве $N(t)$ до момента времени t;

3. размеры самих выплат $X_1, \ldots, X_{N(t)}$.

Неизвестными будем считать функцию распределения $F(x)$ страховых выплат и интенсивность λ потока выплат.

В этом разделе мы рассмотрим задачу построения точечных статистических оценок для вероятности разорения

$$\psi(u) = \mathsf{P}\left(\inf_{t>0} R(t) < -u\right).$$

При этом величина u начального капитала страховой компании может быть произвольной и, естественно, считается известной.

Сначала рассмотрим подход, основанный на использовании асимптотики Крамера–Лундберга. Из Теоремы 8.6.1 вытекает, что при определенных условиях на хвост функции распределения $F(x) = \mathsf{P}(X_1 < x)$ и при большом стартовом капитале u справедливо соотношение

$$\psi(u) \approx e^{-Ru} \frac{\rho\mu}{K'(R) - c/\lambda}, \tag{11.2.1}$$

где R – показатель Лундберга, удовлетворяющий условию

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{Rx}[1 - F(x)]dx = 1, \tag{11.2.2}$$

а $K(r)$ – это производящая функция моментов случайной величины X_1:

$$K(r) = \int_0^\infty e^{rx} dF(x). \tag{11.2.3}$$

Идея рассматриваемого подхода заключается в замене неизвестных параметров в правой части (11.2.1) их эмпирическими аналогами.

Эмпирическим аналогом функции $K(r)$ является (случайная) функция

$$\widetilde{K}(r) = \frac{1}{N(t)} \sum_{j=1}^{N(t)} e^{rX_j}. \tag{11.2.4}$$

Известно, что показатель Лундберга R является корнем уравнения

$$K(r) = \frac{cr}{\lambda} \tag{11.2.5}$$

(см. (8.6.7)). Очевидно, что наилучшей оценкой параметра λ является

$$\widetilde{\lambda} = \frac{N(t)}{t}. \tag{11.2.6}$$

Заменив уравнение (11.2.5) его эмпирическим аналогом, определим статистическую оценку $\widetilde{R}_t$ параметра R как решение уравнения

$$\sum_{j=1}^{N(t)} e^{rX_j} = crt. \tag{11.2.7}$$

При фиксированных значениях $N(t), X_1, \ldots, X_{N(t)}$ мы имеем

$$(\widetilde{K}(r))' = \frac{1}{N(t)} \sum_{j=1}^{N(t)} X_j e^{rX_j}. \tag{11.2.8}$$

Наконец, ясно, что наилучшей оценкой для μ является

$$\overline{X} = \frac{1}{N(t)} \sum_{j=1}^{N(t)} X_j.$$

Подставляя полученные статистические оценки вместо соответствующих параметров в (11.2.1), мы окончательно получаем оценку

$$\widetilde{\psi}_1(u) = \frac{e^{-\widetilde{R}_t}(ct - N(t)\overline{X})}{\overline{X}\left[\sum_{j=1}^{N(t)} X_j e^{\widetilde{R}_t X_j} - ct\right]}. \tag{11.2.9}$$

Статистические свойства оценки $\widetilde{\psi}_1(u)$ можно определить, скажем, с помощью имитационного моделирования. Из теоретических результатов, относящихся к оценке $\widetilde{\psi}_1(u)$ (точнее, к статистике $\widetilde{R}_t$, определяемой как решение уравнения (11.2.7)), упомянем утверждение, доказанное Я. Гранделлом (см. (Grandell, 1991)).

Теорема 11.2.1. *Если $N(t)$ – пуассоновский процесс, $\rho > 0$, $K(2R) < \infty$ и существует $r_\infty > 0$ такое, что $K(r) \uparrow +\infty$ при $r \uparrow r_\infty$ (возможно, $r_\infty = +\infty$), то*

$$\sqrt{t}(\widetilde{R}_t - R) \Longrightarrow Y \qquad (t \to \infty),$$

где Y – нормально распределенная случайная величина с $\mathsf{E}Y = 0$ и

$$\mathsf{D}Y = \frac{K(2R) - 2cR/\lambda}{\lambda(K'(R) - c/\lambda)^2}.$$

В силу замкнутости формул, определяющих оценку $\widetilde{\psi}_1(u)$, эту оценку *всегда* можно вычислить. Однако слепое доверие к формуле (11.2.9) может привести к ложным выводам. Обсудим, насколько можно доверять оценке $\widetilde{\psi}_1(u)$. К сожалению, аппроксимация Крамера–Лундберга, лежащая в основе оценки (11.2.9), применима лишь при выполнении весьма суровых условий на хвост функции распределения $F(x)$, ключевым из которых является как минимум экспоненциально быстрое его убывание. На практике же *поведение хвоста распределения не известно никогда*, поскольку заключение о распределении $F(x)$ можно сделать только на основании *конечной* выборки $X_1, \ldots, X_{N(t)}$, а стало быть, для значений аргумента x, превосходящих максимальное из наблюдений $X_1, \ldots, X_{N(t)}$, выводы о поведении $F(x)$ исключительно ненадежны. Таким образом, возникает ситуация, чрезвычайно опасная для практических выводов: вычисления по формуле (11.2.9) при фиксированных наблюдениях всегда приводят к конкретному числу, но, вообще говоря, далеко не всегда ясно, какое отношение это число имеет к оцениваемой вероятности разорения.

Оценки, получаемые при втором их рассматриваемых нами подходов, имеют реальный смысл при существенно более слабых ограничениях на $F(x)$, а стало быть, им можно доверять в значительно более высокой мере. Эти оценки основаны на иной асимптотической аппроксимации для $\psi(u)$, нежели $\widetilde{\psi}_1(u)$, а именно, на аппроксимациях при $\rho \to 0$. Мы уже упоминали метод построения таких статистических оценок в разделе 8.2.

Начнем описание второго метода с напоминания о том, что в разделе 8.2 была построена аппроксимация

$$\psi(u) \approx \frac{1}{1+\rho} \exp\left\{-\frac{2\rho\mu u}{(1+\rho)\mathsf{E}X_1^2}\right\}, \tag{11.2.10}$$

имеющая погрешность порядка $O(\rho)$ при $\rho \to 0$ (более точно погрешность этой аппроксимации оценена в соотношении (8.2.3)). Вновь заметим, что наиболее правдоподобной оценкой параметра λ является величина $\hat{\lambda} = t^{-1}N(t)$, и обозначим

$$m_k(t) = \frac{1}{N(t)} \sum_{j=1}^{N(t)} X_j^k, \quad k = 1, 2, 3,$$

(ясно, что $m_1(t) = \overline{X}$);

$$\widetilde{\rho}(t) = \frac{ct}{N(t)\overline{X}} - 1.$$

Подставляя в (11.2.10) вместо теоретических моментов их эмпирические аналоги, мы приходим к оценке

$$\widetilde{\psi}_2(u) = \frac{1}{1+\widetilde{\rho}(t)} \exp\left\{-\frac{2\widetilde{\rho}(t)m_1(t)u}{(1+\widetilde{\rho}(t))m_2(t)}\right\} =$$

$$= \frac{N(t)\overline{X}}{ct} \exp\left\{\frac{2\overline{X}u(ct - N(t)\overline{X})}{ctm_2(t)}\right\}. \qquad (11.2.10)$$

В то же время, Теорема 8.3.1 позволяет использовать приближенное соотношение

$$\psi(u) \approx \frac{1}{1+\rho} \exp\left\{-\frac{2\rho\mu u}{(1+\rho)\mathsf{E}X_1^2}\right\} \times$$

$$\times \left[1 + \left(\frac{2\mu\mathsf{E}X_1^3}{3(\mathsf{E}X_1^2)^2} - 1\right)\left(\frac{2\rho\mu u}{(1+\rho)\mathsf{E}X_1^2} - 1\right)\frac{\rho}{1+\rho}\right] \qquad (11.2.11)$$

для получения еще одной, “уточненной” по сравнению с (11.2.10), статистической оценки вероятности разорения по предыстории развития процесса риска до некоторого момента t. Замена теоретических моментов в (11.2.11) на их эмпирические аналоги приводит к оценке

$$\widetilde{\psi}_3(u) = \frac{1}{1+\widetilde{\rho}(t)} \exp\left\{-\frac{2\widetilde{\rho}(t)\overline{X}u}{(1+\widetilde{\rho}(t))m_2(t)}\right\} \times$$

$$\times \left[1 + \left(\frac{2\overline{X}m_3(t)}{3m_2^2(t)} - 1\right)\left(\frac{2\widetilde{\rho}(t)\overline{X}u}{(1+\widetilde{\rho}(t))m_2(t)} - 1\right)\frac{\widetilde{\rho}(t)}{1+\widetilde{\rho}(t)}\right]. \qquad (11.2.12)$$

Естественно, что оценки (11.2.10) и (11.2.12) имеют практический смысл лишь в том случае, когда значение $\widetilde{\rho}(t)$ положительно и невелико.

Еще один подход, предложенный Де Вилдером (см. (De Vylder, 1978), (Grandell, 1991)), основан на формуле (см. раздел 8.5)

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\rho u/\mu(1+\rho)}, \qquad (11.2.13)$$

справедливой для вероятности разорения в классическом процессе риска с экспоненциально распределенными выплатами. Суть этого подхода в следующем. Пусть $R(t)$ – процесс риска Спарре Андерсена с интенсивностью λ (то есть $\mathsf{E}\theta_j = 1/\lambda$), $\mathsf{E}X_j = \mu$ и нагрузкой безопасности ρ. Пусть $R^*(t)$ – классический процесс риска с экспоненциально распределенными выплатами и соответствующими параметрами λ^*, μ^* и ρ^*, определяемыми как решение системы трех уравнений

$$\mathsf{E}[R^*(t)]^n = \mathsf{E}[R(t)]^n, \qquad n = 1, 2, 3.$$

Можно показать, что эта система однозначно определяет параметры λ^*, μ^* и ρ^* по параметрам λ, μ и ρ. В качестве статистических оценок параметров λ^*, μ^* и ρ^* следует взять, как и выше, $\widehat{\lambda} = t^{-1}N(t)$, $\widehat{\mu} = \overline{X}$, $\widehat{\rho}(t) = ct(N(t)\overline{X})^{-1} - 1$. Тогда, согласно подходу Де Вилдера, в качестве статистической оценки вероятности разорения $\psi(u)$ в процесссе риска $R(t)$ следует взять

$$\widetilde{\psi}_{DV}(u) = \frac{1}{1+\widehat{\rho}} \exp\left\{-\frac{\widehat{\rho}u}{\widehat{\mu}(1+\widehat{\rho})}\right\}.$$

Строго говоря, оценки $\widetilde{\psi}_1(u)$, $\widetilde{\psi}_2(u)$, $\widetilde{\psi}_3(u)$ $\widetilde{\psi}_{DV}(u)$ с формальной точки зрения не являются “честными” в том смысле, что они представляют собой статистическую оценку не сам́ой вероятности разорения, а аппроксимирующих ее выражений, которые могут быть близким к оцениваемой характеристике, но совсем не обязаны с ней совпадать. Однако, забегая вперед, отметим, что в отличие от “честной” непараметрической оценки вероятности разорения, о которой пойдет речь в следующем разделе, “нечестные” оценки совсем просто вычисляются (особенно $\widetilde{\psi}_{DV}(u)$, $\widetilde{\psi}_2(u)$ и $\widetilde{\psi}_3(u)$) и вполне могут быть пригодны для грубых практических прикидок.

Тем не менее, указанное обстоятельство сильно затрудняет обсуждение таких важных свойств “нечестных” оценок как состоятельность, несмещенность и оптимальность хотя бы в асимптотическом (при $t \to \infty$) смысле.

11.3 Непараметрическая оценка для вероятности разорения в обобщенном процессе риска

В данном разделе мы рассматриваем задачу о статистическом оценивании вероятности разорения для обобщенных процессов риска по их предыстории, то есть по наблюдениям за такими процессами до некоторого фиксированного момента времени и описываем асимптотические свойства предлагаемых оценок.

Мы будем активно использовать свойства классического процесса риска

$$R_0(t) = ct - \sum_{j=1}^{N_1(t)} X_j, \quad t \geq 0,$$

где $c > 0$ – интенсивность роста страховой премии, $\{X_j\}_{j\geq 1}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathsf{E}X_j = a$, имеющие смысл страховых выплат, $N_1(t)$ – стандартный пуассоновский процесс (однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью), независимый от $\{X_j\}_{j\geq 1}$ и имеющий смысл количества страховых случаев до момента времени t. В этом разделе нам удобнее рассматривать классический процесс риска в форме, немного отличающейся от традиционной и использованной нами выше в разделе 3.1, где, следуя традиции, мы предполагали, что поток страховых требований – однородный пуассоновский с некоторой интенсивностью $\lambda > 0$. В данном же разделе мы считаем, что $\lambda = 1$. Это предположение отнюдь не ограничивает общность наших рассуждений, а означает лишь, что мы выбираем единицу времени так, чтобы в среднем на единицу времени приходилась ровно одна страховая выплата. При этом c имеет смысл прироста капитала страховой компании за выбранную таким образом единицу времени.

Пусть $N(t) = N_1(\Lambda(t))$, $t \geq 0$, – процесс Кокса, управляемый некоторым процессом $\Lambda(t)$, $t \geq 0$, с неубывающими, почти наверное конечными непрерывными справа траекториями, выходящими из нуля. Как и в разделе 3.7, мы рассматриваем обобщенный процесс риска

$$R(t) = c\Lambda(t) - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j, \quad t \geq 0.$$

Пусть u – стартовый капитал страховой компании. Выше мы убедились, что вероятность разорения для обобщенного процесса риска

$$\psi(u) = \mathsf{P}(\inf_{t>0} R(t) < -u)$$

совпадает с вероятностью разорения для классического процесса риска

$$\psi_0(u) = \mathsf{P}(\inf_{t>0} R_0(t) < -u),$$

поскольку процесс $R(t)$ отличается от $R_0(t)$ лишь случайной (вообще говоря, неоднородной) компрессией времени, не изменяющей амплитуду траекторий.

Известны многие *аналитические* методы вычисления границ (нижних и верхних оценок) для вероятности разорения (см. главу 8). Все они существенно используют информацию о поведении хвостов распределений страховых требований и существенно различны в зависимости от характера убывания этих хвостов. Однако, как мы уже отмечали в предыдущем разделе, на практике получить *исчерпывающую* информацию о поведении хвостов требований, вообще говоря, не представляется возможным, поскольку статистические выводы о распределении страховых требований приходится делать на основе выборки *конечного* объема, результатом чего является чрезвычайно малая надежность выводов о поведении хвостов распределений выплат для значений аргументов, превосходящих наибольшее наблюдение. Тем самым, с практической точки зрения оказывается очень важной идея построения *статистических* оценок вероятности разорения (в том числе и верхних и нижних ее доверительных границ) напрямую, без предварительного оценивания хвостов распределений страховых выплат.

Проблема статистического оценивания вероятности разорения для обобщенного процесса риска (равно как и для классического процесса риска) по его предыстории до некоторого момента t имеет одну важную особенность. А именно, число $N(t)$ страховых выплат, осуществленных до этого момента, случайно. Поэтому на практике вероятность разорения приходится оценивать по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_{N(t)}$ *случайного объема.* При этом класс возможных распределений случайной величины $N(t)$ даже при описанных выше ограничениях весьма широк и отнюдь не ограничивается только пуассоновскими законами. Например, если $\Lambda(t)$ имеет гамма-распределение, то распределение $N(t)$ является отрицательным биномиальным.

Важным шагом в направлении построения статистических оценок вероятности разорения стала работа (Croux and Veraverbeke, 1990), в которой предложена непараметрическая оценка вероятности разорения для классического процесса риска и доказана ее асимптотическая нормальность. Однако элегантные результаты этой работы едва ли могут найти широкое практическое применение, поскольку, во-первых, оценки в ней строятся на основе выборки *неслучайного* объема и, во-вторых, свойство асимптотической нормальности построенной в работе (Croux and Veraverbeke, 1990) оценки вероятности разорения нельзя напрямую использовать для построения (асимптотических) доверительных интервалов, поскольку предельное распределение оценки (точнее, его дисперсия) зависит от *неизвестного* распределения требований.

Нашей целью в этом разделе является построение практически применимых точечных и интервальных оценок вероятности разорения для обобщенных процессов риска.

Исходя из принципа неразорения в среднем, предположим, что $c > a$, причем оба параметра – c и a – известны. Как мы убедились выше, $\psi(u) = \psi_0(u)$. Поэтому мы можем использовать формулу Поллачека–Хинчина–Беекмана для вероятности разорения в классическом процессе риска (см. раздел 8.1)

$$\psi_0(u) = \left(1 - \frac{a}{c}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{c}\right)^k \left(1 - G^{*k}(u)\right), \tag{11.3.1}$$

где

$$G(x) = \frac{1}{a} \int_0^x (1 - F(y))dy,$$

$F(y) = \mathsf{P}(X_1 < y)$, а символ G^{*k} обозначает k-кратную свертку функции распределения G с самой собой, $G^{*k}(x) = (G^{*(k-1)} * G)(x)$, $k \geq 1$, G^{*0} – функция распределения с единственным единичным скачком в нуле.

Мы будем считать, что параметры c и a известны. Вначале формально предположим, что в нашем распоряжении имеется выборка $X_1, \ldots, X_n$, где $n \geq 1$ – некоторое целое число. Для такой ситуации в работе (Croux and Veraverbeke, 1990) предложена естественная непараметрическая оценка для $\psi_0(u)$ следующего вида. Поскольку

$$\psi_0(u) = \frac{a}{c} - \left(1 - \frac{a}{c}\right) \overline{\psi}_0(u), \tag{11.3.2}$$

где

$$\overline{\psi}_0(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{c}\right)^k G^{*k}(u), \tag{11.3.3}$$

достаточно построить оценку для $\overline{\psi}_0(u)$.

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$. Символом $\mathbf{1}_A(x)$ мы будем обозначать индикаторную функцию множества A: $\mathbf{1}_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\mathbf{1}_A(x) = 0$, если $x \notin A$. Пусть $Y_1, Y_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $G(x)$. Тогда

$$G^{*k}(u) = \mathsf{P}(Y_1 + \ldots + Y_k < u) =$$

$$= \frac{1}{a^k} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{[0,u)}(y_1 + \ldots + y_k) \prod_{j=1}^{k} (1 - F(y_j))dy_1 \cdots dy_k. \tag{11.3.4}$$

Пусть $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $X_1, \ldots, X_n$, то есть

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[0,x)}(X_i).$$

Тогда, заменяя в соотношении (11.3.4) F на F_n, получим выражение

$$\frac{1}{n^k a^k}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}\int\limits_0^\infty\cdots\int\limits_0^\infty \mathbf{1}_{[0,u)}(y_1+\ldots+y_k)\prod_{j=1}^{k}\mathbf{1}_{[y_j,\infty)}(X_{i_j})dy_1\ldots dy_k,$$

которое представляет собой функционал Мизеса (см., например, (Королюк и Боровских, 1989), с. 33). Поэтому в качестве статистической оценки для $G^{*k}(u)$ можно рассмотреть U-статистику вида

$$U_{n,k}=\left(C_n^k\right)^{-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}h_k(X_{i_1},\ldots,X_{i_k})$$

с симметричным ядром

$$h_k(x_1\ldots,x_k)=\frac{1}{a^k}\int\limits_0^\infty\cdots\int\limits_0^\infty \mathbf{1}_{[0,u)}(y_1+\ldots+y_k)\prod_{j=1}^{k}\mathbf{1}_{[y_j,\infty)}(x_j)dy_1\cdots dy_k.$$

Пусть $m(n)$ – некоторое целое число, $m(n)\le n$. В силу (11.3.2) и (11.3.3), в качестве оценки для $\psi_0(u)$ при неслучайном объеме выборки n формально примем

$$\psi_n(u)=\frac{a}{c}-\left(1-\frac{a}{c}\right)\overline{\psi}_n(u), \tag{11.3.5}$$

где

$$\overline{\psi}_n(u)=\sum_{k=1}^{m(n)}\left(\frac{a}{c}\right)^k U_{n,k}. \tag{11.3.6}$$

Теперь ясно, что, имея выборку $X_1,\ldots,X_{N(t)}$, в качестве оценки для $\psi(u)=\psi_0(u)$ следует взять

$$\psi_{N(t)}(u)=\frac{a}{c}-\left(1-\frac{a}{c}\right)\overline{\psi}_{N(t)}(u), \tag{11.3.7}$$

где

$$\overline{\psi}_{N(t)}(u)=\sum_{k=1}^{m(N(t))}\left(\frac{a}{c}\right)^k U_{N(t),k}. \tag{11.3.8}$$

Исследуем асимптотические свойства оценки, определяемой соотношениями (11.3.7) и (11.3.8), при $t\to\infty$. Обозначим

$$\sigma^2=\left(1-\frac{a}{c}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{a}{c}\right)^{k+m}km\sigma_{k,m}, \tag{11.3.9}$$

где

$$\sigma_{k,m}=\mathsf{E}h_k(X_1)h_m(X_1)-G^{*k}(u)G^{*m}(u), \tag{11.3.10}$$

$$h_j(x) = \frac{1}{a}\int_0^\infty G^{*j}(u-y)\mathbf{1}_{[y,\infty)}(x)dy. \qquad (11.3.11)$$

Теорема 11.3.1. *Пусть оценка $\psi_{N(t)}(u)$ определяется соотношениями* (11.3.7) *и* (11.3.8), *причем функция $m(n)$ такова, что $m(n) \le n$ и $m(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ так, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{m(n)} = 0. \qquad (11.3.12)$$

Предположим, что $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ при $t \to \infty$. Пусть $d(t) > 0$ – функция такая, что $d(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$. Для того чтобы случайная величина

$$\sigma^{-1}\sqrt{d(t)}(\psi_{N(t)}(u) - \psi(u))$$

имела предельное распределение при $t \to \infty$:

$$\sigma^{-1}\sqrt{d(t)}(\psi_{N(t)}(u) - \psi(u)) \Longrightarrow Z \quad (t \to \infty), \qquad (11.3.13)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неотрицательная случайная величина Y, что

$$\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \Longrightarrow Y \quad (t \to \infty). \qquad (11.3.14)$$

При этом

$$\mathsf{P}(Z < x) = \mathsf{E}\Phi(x\sqrt{Y}), \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (11.3.15)$$

Предельное распределение (11.3.15) *одно и то же для любого $u > 0$.*

Доказательству Теоремы 11.3.1 мы предпошлем две леммы.

Лемма 11.3.1. *Пусть оценка $\psi_n(u)$ определяется соотношениями* (11.3.5) *и* (11.3.6), *причем функция $m(n) \le n$ неограниченно возрастает при $n \to \infty$ так, что выполнено (11.3.15). Тогда случайная величина*

$$\sigma^{-1}\sqrt{n}(\psi_n(u) - \psi_0(u))$$

асимптотически нормальна:

$$\mathsf{P}\left(\sigma^{-1}\sqrt{n}(\psi_n(u) - \psi_0(u)) < x\right) \Longrightarrow \Phi(x) \quad (n \to \infty).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в работе (Croux and Veraverbeke, 1990). □

В разделах 12.4 – 12.6 мы будем систематически изучать предельное поведение статистик (измеримых функций от элементов выборки), построенных по выборкам случайного объема. Сейчас же мы, забегая вперед, сформулируем один из основных результатов асимптотической теории статистических выводов, основанных на выборках случайного объема.

Рассмотрим случайные величины $N_1, N_2, \ldots, X_1, X_2, \ldots$, определенные на одном и том же измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$. Пусть на $\mathcal{A}$ задано семейство вероятностных мер $\{\mathsf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$. Предположим, что при каждом $n \geq 1$ случайная величина N_n принимает только натуральные значения и независима от последовательности $X_1, X_2, \ldots$ относительно каждой из семейства мер $\{\mathsf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$. Пусть $T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n)$ – некоторая статистика. Для каждого $n \geq 1$ определим случайную величину T_{N_n}, положив $T_{N_n(\omega)} = T_{N_n(\omega)}\Big(X_1(\omega), \ldots, X_{N_n(\omega)}(\omega)\Big)$ для каждого элементарного исхода $\omega \in \Omega$. Будем говорить, что статистика T_n асимптотически нормальна, если существуют функции $\delta(\theta)$ и $t(\theta)$ такие, что при каждом $\theta \in \Theta$

$$\mathsf{P}_\theta\Big(\delta(\theta)\sqrt{n}(T_n - t(\theta)) < x\Big) \Longrightarrow \Phi(x) \quad (n \to \infty). \tag{11.3.16}$$

Лемма 11.3.2. *Пусть* $\{d_n\}_{n\geq 1}$ *– некоторая неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел. Предположим, что* $N_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ *при* $n \to \infty$. *Пусть статистика* T_n *асимптотически нормальна в смысле* (11.3.16). *Для того чтобы при каждом* $\theta \in \Theta$ *существовала такая функция распределения* $F(x, \theta)$, *что*

$$\mathsf{P}_\theta\left(\delta(\theta)\sqrt{d_n}(T_{N_n} - t(\theta)) < x\right) \Longrightarrow F(x, \theta) \quad (n \to \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало семейство функций распределения $\mathcal{H} = \{H(x, \theta):\ \theta \in \Theta\}$, *удовлетворяющее условиям*

$$H(x, \theta) = 0, \quad x < 0, \quad \theta \in \Theta;$$

$$F(x, \theta) = \int_0^\infty \Phi(x\sqrt{y})d_y H(y, \theta), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \Theta;$$

$$\mathsf{P}_\theta(N_n < d_n x) \Longrightarrow H(x, \theta), \quad n \to \infty, \quad \theta \in \Theta.$$

При этом, если функции распределения случайных величин N_n *не зависят от* θ, *то не зависят от* θ *и функции распределения* $H(x, \theta)$, *то есть семейство* $\mathcal{H}$ *состоит из единственного элемента.*

Доказательство см. в (Королев, 1995) (также см. главу 12). □

Д о к а з а т е л ь с т в о Теоремы 11.3.1. Пусть $\{t_1, t_2, \ldots\}$ – произвольная неограниченно возрастающая последовательность моментов времени. Положим $N_n = N(t_n)$, $n \geq 1$. По Лемме 7.9.1 условия $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ и $N(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ эквивалентны при $t \to \infty$. Поэтому, так как согласно Лемме 11.3.1 оценка $\psi_n(u)$ асимптотически нормальна, то по Лемме 11.3.2 для сходимости (11.3.13), в которой t пробегает последовательность $\{t_1, t_2, \ldots\}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала случайная величина $Y \geq 0$ такая, что

$$\frac{N_n}{d(t_n)} \Longrightarrow Y \quad (n \to \infty). \tag{11.3.19}$$

Но по Теореме 7.9.1 сходимость (11.3.19) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{\Lambda(t_n)}{d(t_n)} \Longrightarrow Y \quad (n \to \infty). \tag{11.3.20}$$

Как известно, семейство масштабных смесей нормальных законов (11.3.15) идентифицируемо, то есть из того, что

$$\mathsf{E}\Phi(W_1 x) = \mathsf{E}\Phi(W_2 x), \quad x \in \mathbb{R},$$

для неотрицательных случайных величин W_1 и W_2, вытекает, что $W_1 \stackrel{d}{=} W_2$ (см., например, (Круглов и Королев, 1990)). Поэтому распределение случайной величины Y не зависит от выбора последовательности $\{t_1, t_2, \ldots\}$. Из произвольности последовательности $\{t_n\}_{n\geq 1}$ вытекает, что (11.3.20) эквивалентно (11.3.14). Теорема доказана. □

СЛЕДСТВИЕ 11.3.1. *В условиях Теоремы* 11.3.1 *для асимптотической нормальности оценки $\psi_{N(t)}(u)$ при $t \to \infty$:*

$$\mathsf{P}(\sigma^{-1}\sqrt{d(t)}[\psi_{N(t)}(u) - \psi(u)] < x) \Longrightarrow \Phi(x) \quad (t \to \infty)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1 \quad (t \to \infty).$$

Из Теоремы 11.3.1 мы можем сделать несколько выводов об условиях состоятельности и асимптотической несмещенности оценки $\psi_{N(t)}(u)$. А именно, справедливы следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 11.3.2. *Пусть выполнены условия Теоремы* 11.3.1 *и существуют неограниченно возрастающая функция $d(t)$ и случайная величина Y такие, что имеет место сходимость* (11.3.14). *Тогда оценка $\psi_{N(t)}(u)$ состоятельна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функцию распределения случайной величины

$$\sigma^{-1}\sqrt{d(t)}(\psi_{N(t)}(u)-\psi(u))$$

обозначим $P_t(x)$. Для произвольного $\epsilon>0$ имеем

$$\mathsf{P}(|\psi_{N(t)}(u)-\psi(u)|>\epsilon)=$$

$$=\mathsf{P}(\sigma^{-1}\sqrt{d(t)}|\psi_{N(t)}(u)-\psi(u)|>\epsilon\sigma^{-1}\sqrt{d(t)})=$$

$$=P_t(-\epsilon\sigma^{-1}\sqrt{d(t)})+1-P_t(\epsilon\sigma^{-1}\sqrt{d(t)}+0). \qquad (11.3.21)$$

Но согласно Теореме 11.3.1, в условиях Следствия 11.3.2 семейство функций распределения $\{P_t(x)\}_{t>0}$ слабо компактно вследствие сходимости (11.3.13). Это означает, что для любого $\delta>0$ существует такое $R_\delta>0$, что, каким бы ни было $t>0$, для любого $R\geq R_\delta$ справедливо неравенство $P_t(-R)+1-P_t(R)<\delta$. В том числе, это выполнено и для $t\geq t_\epsilon=\inf\left\{t:\ \epsilon\sigma^{-1}\sqrt{d(t)}>R\right\}$. Таким образом, из (11.3.21) следует, что для произвольных $\epsilon>0$ и $\delta>0$ существует $t_0=t(\epsilon,\delta)$ такое, что для всех $t\geq t_0$

$$\mathsf{P}(|\psi_{N(t)}(u)-\psi(u)|>\epsilon)<\delta,$$

что и означает состоятельность оценки $\psi_{N(t)}(u)$. Следствие доказано. □

Особенностью данной задачи является то, что в случае невырожденной случайной величины Y асимптотическое распределение оценки $\psi_{N(t)}(u)$ имеет более тяжелые хвосты, нежели нормальное распределение.

В качестве примера рассмотрим ситуацию, когда $\Lambda(t)$ имеет показательное распределение с параметром $1/t$. В этом случае распределение случайной величины Y из (11.3.14) является стандартным показательным, и следовательно, распределение случайной величины Z из (11.3.13) имеет вид

$$\mathsf{P}(Z<x)=\int\limits_0^\infty\Phi(\sqrt{y}x)e^{-y}dy=\int\limits_0^\infty\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{y}x}e^{-u^2/2}du\right]e^{-y}dy=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{\sqrt{y}x}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}-y\right\}dudy=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty\int\limits_{u^2/x^2}^\infty e^{-y}dye^{-u^2/2}du=$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\right\} du = \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right). \quad (11.3.22)$$

Легко видеть, что распределению (11.3.22) соответствует плотность

$$p(x) = \frac{1}{(2+x^2)^{3/2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

откуда видно, что соотношение (11.3.22) задает распределение Стьюдента с двумя степенями свободы. У этого распределения отсутствуют моменты порядков, больших или равных двум. Несложно видеть, что для $\frac{1}{2} < \beta < 1$, β-квантиль этого распределения равна $\sqrt{2}(2\beta-1)/\sqrt{1-(2\beta-1)^2}$. Поэтому, например, разность между квантилями порядков 0.975 и 0.025 этого распределения оказывается почти в 2.2 раза длиннее соответствующей характеристики нормального распределения с тем же параметром масштаба. Этот пример наглядно иллюстрирует, насколько важно учитывать случайность объема выборки, по которой оценивается вероятность разорения. В противном случае можно существенно ошибиться в реальной точности оценок или в их реальной надежности (легко видеть, что доверительная вероятность “95%-ного нормального” интервала, вычисленная по распределению (11.3.22), оказывается меньшей, чем 0.82). К этому примеру мы вернемся в разделе 12.5 (см. Замечание 12.5.2).

В то же время, если $N(t) = N_1(t)$, то есть, если $\Lambda(t) \equiv t$, что соответствует классическому процессу риска, то, как вытекает из Следствия 11.3.1 с $d(t) \equiv t$, статистика $\psi_{N(t)}(u)$ является асимптотически нормальной. Другими словами, для такой ситуации оценка вероятности разорения, построенная по выборке $(X_1, \ldots, X_{N_1(n)})$ асимптотически (при $n \to \infty$) эквивалентна оценке вероятности разорения $\psi_n(u)$, определенной соотношениями (11.3.5) и (11.3.6).

Из-за упомянутой выше особенности предельных законов (наличие тяжелых хвостов, что может выражаться в отсутствии моментов, в частности, математического ожидания) говорить об асимптотической несмещенности оценки $\psi_{N(t)}(u)$ в терминах моментов не всегда целесообразно. Тем не менее, оказывается справедливым следующее утверждение. Как обычно, медиана случайной величины X будет обозначаться $\mathrm{med}X$.

Следствие 11.3.3. *Пусть выполнены условия Теоремы* 11.3.1 *и существуют неограниченно возрастающая функция* $d(t)$ *и случайная величина* Y *такие, что имеет место сходимость* (11.3.14). *Тогда оценка* $\psi_{N(t)}(u)$ *является асимптотически несмещенной в том смысле, что*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{med}\psi_{N(t)}(u) = \psi(u). \quad (11.3.23)$$

Более того,

$$\mathrm{med}\psi_{N(t)}(u) = \psi(u) + o\left(\left(d(t)\right)^{-1/2}\right). \tag{11.3.24}$$

Доказательство. В условиях Следствия 11.3.1, согласно Теореме 11.3.1, имеет место сходимость (11.3.13), из которой, как легко видеть, вытекает, что

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{med}\left(\sigma^{-1}\sqrt{d(t)}\left(\psi_{N(t)}(u) - \psi(u)\right)\right) = mZ = 0,$$

откуда следует, что

$$\sigma^{-1}\sqrt{d(t)}\left(\mathrm{med}\psi_{N(t)}(u) - \psi(u)\right) \to 0, \tag{11.3.25}$$

что в силу неограниченного возрастания функции $d(t)$ возможно только в случае, когда выполнено (11.3.23). Далее, соотношение (11.3.25) означает справедливость (11.3.24). Следствие доказано. □

В работе (Бенинг и Королев, 2001) получены интервальные оценки для вероятности разорения в обобщенном процессе риска. Как показано в (Бенинг и Королев, 2001), для $\gamma \in (0,1)$ приближенный $100\gamma\%$-й доверительный интервал можно искать в виде

$$\psi_{N(t)}(u) - \frac{u_{(\gamma+1)/2}\sigma_{N(t)}}{\sqrt{N(t)}} \le \psi(u) \le \psi_{N(t)}(u) + \frac{u_{(\gamma+1)/2}\sigma_{N(t)}}{\sqrt{N(t)}},$$

где u_δ — δ-квантиль стандартного нормального распределения. Статистики $U_{N(t),k}$ и $\sigma_{N(t)}$ определяются с помощью следующих соотношений:

$$\sigma^2_{N(t)} = \left(1 - \frac{a}{c}\right)^2 \sum_{r=1}^{k(N(t))} \sum_{l=1}^{k(N(t))} \left(\frac{a}{c}\right)^{r+l} rl\overline{\sigma}_{r,l},$$

$$\overline{\sigma}_{r,l} = \frac{1}{N(t)} \sum_{i=1}^{N(t)} \overline{h}_r(X_i)\overline{h}_l(X_i) - U_{N(t),r} \cdot U_{N(t),l},$$

$$\overline{h}_j(x) = \frac{1}{a}\int_0^x U_{N(t),j-1}(u-y)\,dy, \quad \overline{h}_1(x) = a^{-1}\min\{x,u\},$$

$$U_{N(t),k} = U_{N(t),k}(u) = \frac{1}{C^k_{N(t)}} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le N(t)} h_k(X_{i_1},\ldots,X_{i_k}), \tag{11.3.26}$$

$$h_k(x_1,\ldots,x_k) = \frac{1}{a^k}\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_k} \mathbf{1}_{(0,u)}(y_1+\ldots+y_k)\,dy_1\ldots dy_k, \tag{11.3.27}$$

где $k(N(t))$ – целое число, $1 \le k(N(t)) \le N(t)$, $\mathbf{1}_A(y) = 1$, если $y \in A$, $\mathbf{1}_A(y) = 0$, если $y \notin A$.

Позднее были найдены более простые выражения для $\overline{h}_j(x)$ и $U_{N(t),k}(u)$. А именно, если ввести в рассмотрение статистику

$$K_{n,k}^l(u,t) = (-1)^l \frac{C_{n-l}^{k-l}}{C_n^k} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_l \le n} \frac{(u - t - \sum_{p=1}^l X_{i_p})^k}{k!} \cdot \mathbf{1}\Big(\sum_{p=1}^l X_{i_p} < u\Big),$$

где $1 \le l \le k \le n$, причем

$$K_{n,k}^0(u,t) = \frac{(u-t)^k}{k!},$$

то полиномиальные аналоги соотношений (11.3.26) и (11.3.27) будут иметь вид

$$\overline{h}_j(x) = \frac{1}{a^j} \sum_{l=0}^{j-1} \frac{j-l}{j} \Big(K_{N(t),j}^l(u,0) - K_{N(t),j}^l\Big(u, \min\{x, u - \sum_{p=1}^l X_{i_p}\}\Big)\Big)$$

и

$$U_{N(t),k}(u) = \frac{1}{a^k} \sum_{l=0}^{k} K_{N(t),k}^l(u,0)$$

(см., например, (Бенинг, Королев и Кудрявцев, 2001)).

Глава 12

Смешанные гауссовские вероятностные модели рисковых ситуаций

12.1 Принципы анализа рисковых ситуаций с помощью смешанных гауссовских вероятностных моделей

Многие классические методы оценки риска, разработанные, как правило, в конце XIX – первой половине XX века, основаны на предположении о том, что параметры, характеризующие рисковые ситуации, имеют нормальное распределение. Однако, к сожалению, зачастую применение классических методов приводит к недооценке риска. Причины иногда имеющей место несостоятельности нормальных моделей могут быть разными. К примеру, если возможность и размер потерь в тех или иных рисковых ситуациях вычисляются на основе статистических данных, накопленных за определенное время, то, как мы убедимся ниже, существенную роль будет иметь то обстоятельство, является или нет поток событий, в результате которых накапливаются статистические данные, однородным. То есть, стремится ли отношение количества зарегистрированных в течение определенного интервала времени событий к длине этого интервала времени к некоторому числу с течением времени. Если такое сближение указанного отношения с некоторым числом имеет место, то нормальные модели могут давать адекватные результаты. Однако, если такое сближение не наблюдается, и указанное отношение сильно колеблется, оставаясь случайным (то есть непредсказуемым), то нормальные модели неадекватны и приводят к весьма существенной недооценке риска. Как мы увидим, вместо ожидаемого в соответствии с классической теорией нормального закона в подобных ситуациях (например, если упомянутое выше отношение ведет себя как гамма-распределенная случайная величина) могут возникать, скажем, функции распределения ущерба типа распределения Стьюдента с произвольно малым числом γ степеней свободы. Например, функция распределения Стьюдента при $\gamma = 2$ (ему соответствует интенсивность потока информативных событий, имеющая асимптотически экспоненциальное распределение) имеет вид

$$\Psi(x) = \tfrac{1}{2} + x/(2\sqrt{2+x^2}), \quad x \in \mathbb{R} \tag{12.1.1}$$

(см., например, соотношение (11.3.22)). Напомним, что этому распределению соответствует плотность

$$p(x) = \frac{1}{(2+x^2)^{3/2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Хвосты этого распределения столь тяжелы, что у него отсутствуют моменты порядков $\delta \geq 2$. В предыдущем разделе мы заметили, что для $\frac{1}{2} < \beta < 1$, β-квантиль этого распределения равна $\sqrt{2}(2\beta-1)/\sqrt{1-(2\beta-1)^2}$. Поэтому, например, расстояние между квантилями порядков 0.975 и 0.025 этого распределения (что в определенном смысле соответствует длине “наикратчайшего доверительного интервала” с коэффициентом доверия 0.95) оказывается почти в 2.2 раза больше соответствующей характеристики нормального распределения с тем же параметром масштаба. Этот пример наглядно иллюстрирует, насколько важно учитывать случайность интенсивности потока событий, несущих регистрируемую информацию. В противном случае можно существенно недооценить размер возможного ущерба или саму возможность критического ущерба (легко видеть, что реальная доверительная вероятность “95%-ного нормального” интервала, вычисленная по приведенной в (12.1.1) функции распределения $\Psi(x)$, оказывается меньшей, чем 0.82).

Неоднородность потока информативных событий, приводящая к возникновению не-нормальных вероятностных моделей с “тяжелыми хвостами”, является, увы, не исключением, а правилом. Поэтому особую важность приобретает изучение именно *внутренних*, аналитических механизмов формирования вероятностных моделей рисковых ситуаций. Асимптотический подход, основанный на предельных теоремах теории вероятностей, дает возможности получить не только сами формальные вероятностные модели рисковых ситуаций, но и в некотором смысле дать разумное теоретическое объяснение их адекватности на основе минимальных предположений о внутренней структуре изучаемых характеристик, что чрезвычайно важно при практическом решении задач анализа риска в условиях стохастической неопределенности.

Приведенный пример представляется особо важным для анализа экономических и финансовых рисков. Согласно современным методам экономического анализа, очень важна такая мера риска как VaR (Value at Risk). По определению, показатель VaR представляет собой наименьшее решение уравнения $\mathsf{P}(X \geq \mathrm{VaR}) = \epsilon$, где X – случайная величина, описывающая возможные в рассматриваемой рисковой ситуации потери, ϵ – наперед заданное малое положительное число, обычно интерпретируемое как вероятность практически невозможного события. Другими словами, VaR – это практический порог наибольших возможных потерь. С математической же точки зрения, VaR – это квантиль распределения случайной величины X порядка $1-\epsilon$. Поэтому наиболее уместный русский аналог термина VaR – это, по-видимому, *квантильная мера риска*. Существующие методы вычисления квантильной меры риска (показателя VaR), описываемые в экономической литературе, основаны на нормальности распределения величины X. Приведенный выше пример показывает, что при неправильном выборе модели легко ошибочно занизить практический порог наибольших возможных потерь почти в 2.2 раза.

Во многих случаях статистический анализ реальных данных, полученных в тех или иных рисковых ситуациях, показывает, что там, где, основываясь на классических результатах теории вероятностей и, в первую очередь, на центральной предельной теореме, следовало бы ожидать нормальное распределение рассматриваемых величин, реальные распределения оказываются заметно отличными от нормальных. Эта ситуация, например, характерна для анализа процессов биржевых цен. В финансовой математике первые работы, в которых отмечено это явление, появились еще в начале прошлого столетия. Отмеченный феномен является всеобщим: ненормальность распределений приращений биржевых цен проявляется на всех биржах независимо от объекта торговли. Переход к логарифмам, который должен приводить к так называемому геометрическому броуновскому движению, не спасает ситуацию. Приращения логарифмов биржевых цен на интервалах умеренной длины (до 2 – 3 недель) также не нормальны.

Отмеченная не-нормальность распределений приращений проявляется в том, что в действительности наблюдается заметно больше очень больших и очень маленьких по абсолютной величине значений приращений, нежели их должно быть в соответствии с нормальным распределением. Другими словами, наблюдаемые распределения приращений биржевых цен на интервалах времени умеренной длины являются более островершинными, нежели нормальные, имея заметно более тяжелые хвосты. Подобный эффект наблюдается повсеместно: в метрологии, экспериментальной физике и других областях, связанных со статистическим анализом реальных данных.

Широкое применение нормального закона для описания тех или иных вероятностно-статистических закономерностей обусловлено тем, что оно является удобной *асимптотической* аппроксимацией реальных распределений вероятностей случайных величин, определяемых суммарным воздействием большого числа “элементарных” случайных факторов. В большинстве приложений нет реальных оснований отвергать предположение об ограниченности влияния каждого случайного фактора. Поэтому в данной главе основное внимание мы уделим суммам случайных величин, в которых слагаемые имеют конечные дисперсии. Мы приведем пример асимптотической схемы, которая связана с суммами таких слагаемых, приводящей к не-нормальным распределениям с тяжелыми хвостами, и тем самым дадим обоснование использования последних в качестве асимптотических аппроксимаций, альтернативных нормальному закону.

Рассматриваемая асимптотическая схема основана на принципе, который может быть наглядно проиллюстрирован на примере простейшей задачи из теории измерений. Погрешность определяется суммарным воздействием случайных факторов, ни один из которых не является доминирующим, и потому, согласно центральной предельной теореме, должна иметь нормальное распределение. Однако на *разные* измерения воздействует, вообще говоря *разное* число случайных факторов, то есть число случайных факторов, определяющих погрешность, само является случайным фактором. Поэтому вместо классической центральной предельной теоремы здесь более уместно пользоваться предельными теоремами для сумм случайного числа независимых случайных величин.

Теория случайного суммирования довольно хорошо развита (см., например, монографии (Круглов и Королев, 1990), (Gnedenko and Korolev, 1996), (Bening and Korolev, 2002)). Не ставя перед собой цели привести результаты этой теории во всей полноте, мы сосредоточимся лишь на очень частном конкретном варианте постановки задачи, когда число слагаемых в суммах формируется в соответствии с так называемым дважды стохастическим пуассоновским процессом (процессом Кокса). Этот случай имеет чрезвычайно важное практическое значение.

12.2 Предельные теоремы для обобщенных процессов Кокса

Целью данного раздела является описание задачи моделирования неоднородных хаотических потоков событий с помощью обобщенных дважды стохастических процессов (процессов Кокса) и демонстрация того, что отклонение распределения наблюдаемых процессов от нормального могут быть успешно объяснены наличием существенной изменчивости интенсивности неоднородных хаотических потоков событий, описываемых процессами Кокса.

12.2.1 Обобщенные процессы Кокса

Пусть $N_1(t)$, $t \geq 0$, – однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью, а $\Lambda(t)$, $t \geq 0$, – независимый от $N_1(t)$ случайный процесс, обладающий следующими свойствами: $\Lambda(0) = 0$, $\mathsf{P}(\Lambda(t) < \infty) = 1$ для любого $t > 0$, траектории $\Lambda(t)$ не убывают и непрерывны справа. Дважды стохастический пуассоновский процесс $N(t)$, называемый также процессом Кокса, определяется как суперпозиция $N_1(t)$ и $\Lambda(t)$:

$$N(t) = N_1(\Lambda(t)),\ t \geq 0.$$

В этом случае будем говорить, что процесс Кокса $N(t)$ управляется процессом $\Lambda(t)$. В частности, если процесс $\Lambda(t)$ допускает представление

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau)d\tau, \quad t \geq 0,$$

в котором $\lambda(t)$ – положительный случайный процесс с интегрируемыми траекториями, то $\lambda(t)$ можно интерпретировать как мгновенную стохастическую интенсивность процесса $N(t)$. Поэтому иногда процесс $\Lambda(t)$, управляющий процессом Кокса $N(t)$, мы будем называть *накопленной интенсивностью* процесса $N(t)$. Свойства процессов Кокса подробно описаны в книгах (Grandell, 1978) и (Bening and Korolev, 2002).

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что при каждом $t \geq 0$ случайные величины $N(t), X_1, X_2, \ldots$ независимы. Процесс

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j, \quad t \geq 0, \tag{12.2.1}$$

назовем обобщенным процессом Кокса (при этом для определенности считаем, что $\sum_{j=1}^{0} = 0$).

Процессы вида (12.2.1) играют чрезвычайно важную роль во многих прикладных задачах. Достаточно сказать, что при $\Lambda(t) \equiv \lambda t$ с $\lambda > 0$ процесс $S(t)$ превращается в классический обобщенный пуассоновский процесс, традиционно используемый при моделировании многих явлений в физике, теории надежности, финансовой и актуарной деятельности, биологии и т. д. Большое число разнообразных прикладных задач, приводящих к обобщенным пуассоновским процессам, описано в книгах (Gnedenko and Korolev, 1996) и (Bening and Korolev, 2002).

Общие процессы $S(t)$ вида (12.2.1) со случайной интенсивностью $\Lambda'(t)$ являются более адекватными моделями реальных хаотических процессов, в которых свойство однородности является скорее исключением, нежели правилом, в частности, процессов страховых выплат или же изменений цен на биржах, где реальная интенсивность существенно изменчива. Поэтому обобщенные процессы Кокса находят весьма широкое применение в актуарной и финансовой математике, см. (Bening and Korolev, 2002).

12.2.2 Теоремы переноса для обобщенных процессов Кокса

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что у случайных величин $\{X_j\}_{j\geq 1}$ имеется по крайней мере два первых момента. Обозначим $\mathsf{E}X_1 = a$, $\mathsf{D}X_1 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$. Даже в таких предположениях предельные распределения обобщенных процессов Кокса могут иметь произвольно тяжелые хвосты. В данной главе мы сосредоточимся на ситуации, в которой $a = 0$. Мы продемонстрируем, что асимптотическое поведение процесса $S(t)$ полностью определяется асимптотическим поведением накопленной интенсивности $\Lambda(t)$. Более того, тяжелые (например, типа Парето) хвосты распределений, предельных для сумм (12.2.1), могут быть обусловлены не “плохим” поведением слагаемых (например, отсутствием у них моментов), а чрезмерно большим разбросом значений управляющего процесса $\Lambda(t)$.

Всюду далее, как обычно, символы $\Longrightarrow$ и $\xrightarrow{P}$ будут обозначать сходимость по распределению и сходимость по вероятности соответственно. Стандартная нормальная функция распределения будет обозначаться $\Phi(x)$. Пусть $d(t) > 0$ – вспомогательная нормирующая (масштабирующая) функция, неограниченно возрастающая при $t \to \infty$.

Теорема 12.2.1. *Предположим, что* $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ $(t \to \infty)$. *Для того чтобы одномерные распределения нормированного обобщенного процесса Кокса слабо сходились к распределению некоторой случайной* *величины Z :*

$$\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} \Longrightarrow Z \ (t \to \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала неотрицательная случайная величина U такая, что

1) $\mathsf{P}(Z < x) = \int_0^\infty \Phi(x/\sqrt{y}) d\mathsf{P}(U < y), \ x \in \mathbb{R};$

2) $\Lambda(t)/d(t) \Longrightarrow U \ (t \to \infty).$

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в (Королев, 1998) или (Bening and Korolev, 2002).

Обратим внимание на то, что условие 2) Теоремы 12.2.1 может быть интерпретировано как требование статистической регулярности накопленной интенсивности: предел отношения $\Lambda(t)/d(t)$ при $t \to \infty$ может быть случайным, но он должен существовать. Еще одна интерпретация этого условия заключается в том, что при больших t распределение случайной величины $\Lambda(t)/d(t)$ практически не зависит от t. При этом условие 1) означает, что, вообще говоря, предельным распределением обобщенного процесса Кокса является масштабная смесь нормальных законов.

Из Теоремы 12.2.1 и идентифицируемости семейства масштабных смесей нормальных законов (см. раздел 2.10.2) немедленно вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 12.2.1. *В условиях Теоремы 12.2.1*

$$\mathsf{P}\Big(\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} < x\Big) \Longrightarrow \Phi(x) \quad (t \to \infty)$$

тогда и только тогда, когда

$$\Lambda(t)/d(t) \ \Longrightarrow \ 1 \ \ (t \to \infty).$$

Другими словами, предельное распределение обобщенного процесса Кокса может быть нормальным только в том случае, когда случайная величина $\Lambda(t)/d(t)$ асимптотически (при $t \to \infty$) неслучайна.

В качестве еще одного следствия Теоремы 12.2.1 мы приведем один критерий сходимости одномерных распределений обобщенных процессов Кокса с нулевым средним и *конечными дисперсиями* к устойчивым законам. Мы покажем, что одномерные распределения обобщенных процессов Кокса с описанными выше свойствами асимптотически строго устойчивы тогда и только тогда, когда асимптотически строго устойчивы их управляющие процессы.

Пусть $G_{\alpha,\theta}(x)$ – строго устойчивая функция распределения с показателем α и параметром θ, которая, как известно, определяется своей характеристической функцией

$$g_{\alpha,\theta}(t) = \exp\Big\{ -|t|^\alpha \exp\Big\{ -i\frac{\pi\theta\alpha}{2}\mathrm{sign} t\Big\}\Big\},$$

где $t \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leq 2$, $|\theta| \leq \theta_\alpha = \min(1, 2/\alpha - 1)$ (см., например, (Золотарев, 1983)).

Теорема 12.2.2. *Предположим, что* $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ $(t \to \infty)$. *Для того чтобы*

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\Big(\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} < x\Big) = G_{\alpha,0}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(\Lambda(t) < d(t)x) = G_{\alpha/2,1}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство см. в (Королев, 1998).

Рассмотрим ситуацию с дискретным временем $t = n = 1, 2, \ldots$ и предположим, что управляющий процесс $\Lambda(n)$ имеет вид

$$\Lambda(n) = Z_1 + \ldots + Z_n, \tag{12.2.2}$$

где $\{Z_i\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, $Z_i \geq 0$, $i \geq 1$. Такое представление возникает в ситуации, когда $\Lambda(t)$ – однородный процесс с независимыми приращениями, а обобщенный процесс Кокса наблюдается в равноотстоящие моменты времени, то есть Z_i – приращения управляющего процесса $\Lambda(t)$ за интервалы времени между наблюдениями. В соответствии с (12.2.1) полагаем

$$S(n) \ = \sum_{j=1}^{N_1(\Lambda(n))} X_j.$$

В этой ситуации с помощью сформулированной выше Теоремы 12.2.2 и Теоремы 2 параграфа 35 из (Гнеденко и Колмогоров, 1949) мы легко получаем следующее утверждение.

Теорема 12.2.3. *Одномерные распределения нормированного обобщенного процесса Кокса с дискретным временем $S(n)/\delta_n$ слабо сходятся к строго устойчивому распределению $G_{\alpha,0}$ при некотором выборе констант δ_n тогда и только тогда, когда для любого $k > 0$*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathsf{P}(Z_1 \geq x)}{\mathsf{P}(Z_1 \geq kx)} = k^{\alpha/2}.$$

Другими словами, часто наблюдаемые на практике тяжелые хвосты (устойчивых) распределений, предельных для обобщенных процессов Кокса при возрастающей интенсивности, могут возникать не только в той ситуации, где тяжелые хвосты присущи распределениям скачков. Как видно из Теоремы 12.2.3, даже при произвольно легких хвостах распределений скачков тяжелые хвосты предельного закона могут возникать из-за того, что тяжелые (паретовские) хвосты имеются у распределений приращений управляющего процесса.

В работах (Кащеев, 2001) и (Королев и Кудрявцев, 2003), доказаны и исследованы функциональные предельные теоремы для обобщенных процессов Кокса в схеме серий. В упомянутых работах в качестве предельных выступают так называемые подчиненные винеровские процессы. Эти результаты представляют собой мостик, который соединяет модели эволюции рассматриваемых процессов на микроуровне (то есть на малых временны́х интервалах) и популярные в настоящее время макромодели многих реальных процессов типа геометрического броуновского движения со случайными сносом и диффузией (подобные модели описывают броуновское движение в случайной среде, скажем, в жидкости со случайной температурой и/или вязкостью), и тем самым дают дополнительное теоретическое обоснование моделям конечномерных распределений соответствующих процессов, имеющим вид масштабных смесей нормальных законов.

12.2.3 Асимптотические разложения для квантилей обобщенных процессов Кокса

В этом разделе мы приведем асимптотические разложения для квантилей обобщенных процессов Кокса с нулевым средним. Как мы отмечали во введении, вычисление квантилей распределений необходимо для корректного использования такой меры риска как VaR. Пусть $\Lambda(t) = Ut$, $t \geq 0$, где U – такая случайная величина, что $\mathsf{P}(U \geq 0) = 1$. Для $\beta \in (0,1)$ квантиль порядка β случайной величины $S(t)$ (см. (12.2.1)) с таким управляющим процессом обозначим $u_\beta^{(1)}(t)$.

Напомним, что некоторая случайная величина Y удовлетворяет условию Крамера, если

$$\limsup_{|s|\to\infty} |\mathsf{E}\exp\{isY\}| < 1.$$

Теорема 12.2.4. *Пусть* $a = \mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^4 < \infty$, *причем случайная величина* X_1 *удовлетворяет условию Крамера. Предположим, что* $\mathsf{E}U^{-1} < \infty$, $\mathsf{E}U = 1$ *и для любого* $q \in (0,1)$

$$s\log(s)\mathsf{E}q^{Us} \to 0 \quad (s \to \infty).$$

Тогда при $t \to \infty$

$$u_\beta^{(1)}(t) = -\frac{q_1(u_\beta^{(1)})}{q_0'(u_\beta^{(1)})} + \sigma\sqrt{t}u_\beta^{(1)} +$$

$$+\frac{q_0'(u_\beta^{(1)})q_1(u_\beta^{(1)})q_1'(u_\beta^{(1)}) - (q_0'(u_\beta^{(1)}))^2 q_2(u_\beta^{(1)}) - \frac{1}{2}q_1^2(u_\beta^{(1)})q_0''(u_\beta^{(1)})}{(q_0'(u_\beta^{(1)}))^3\sqrt{t}} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\Big),$$

где $u_\beta^{(1)}$ – *квантиль порядка* β *функции распределения*

$$q_0(x) \;=\; \mathsf{E}\Phi\left(xU^{-1/2}\right),$$

а функции $q_1(x)$ *и* $q_2(x)$ *имеют вид*

$$q_1(x) \;=\; -\,\frac{\alpha_3}{6\sigma^3}\mathsf{E}U^{-1/2}\phi(xU^{-1/2})(x^2U^{-1} - 1),$$

$$q_2(x) \;=\; -\,\mathsf{E}U^{-1}\phi(xU^{-1/2})\Big[(x^3U^{-3/2} - 3xU^{-1/2})\frac{\alpha_4}{24\sigma^4} +$$

$$+\,(x^5U^{-5/2} - 10x^3U^{-3/2} + 15xU^{-1/2})\frac{\alpha_3^2}{72\sigma^6}\Big].$$

Доказательство этого утверждение приведено, например, в (Бенинг и Королев, 2000), (Bening and Korolev, 2002).

Теперь рассмотрим ситуацию с дискретным временем $t = n = 1, 2, \ldots$ и предположим, что управляющий процесс $\Lambda(n)$ представляется в виде (12.2.2), где случайные величины $Z_1, Z_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены. Для $\beta \in (0,1)$ квантиль порядка β случайной величины $S(n)$ с таким управляющим процессом мы будем обозначать $u_\beta^{(2)}(n)$.

Теорема 12.2.5. *Пусть* $\mathsf{E}|X_1|^4 < \infty$, $\mathsf{E}Z_1^4 < \infty$. *Тогда если* $\nu_1 = 1$ *и случайная величина* X_1 *удовлетворяет условию Крамера, то при* $n \to \infty$

$$u_\beta^{(2)}(n) \;=\; (u_\beta^2 - 1)\frac{\alpha_3}{6\sigma^3} \;+\; \sigma\sqrt{n}u_\beta \;+$$

$$+\;\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{\alpha_3^2}{36\sigma^6}(5u_\beta - 2u_\beta^3) \;+\; \frac{\alpha_4 + 3\sigma^4(\nu_2 - 1)}{24\sigma^4}(u_\beta^3 - 3u_\beta)\right] \;+\; o\Big(n^{-1/2}\Big),$$

где u_β *– квантиль порядка* β *стандартного нормального распределения,* $\alpha_k = \mathsf{E}X_1^k$, $k \geq 1$, *а* $\nu_2 = \mathsf{E}Z_1^2$.

Заметим, что если $\nu_2 = 2$, то асимптотическое разложение, приведенное в Теореме 12.2.5, совпадает с асимптотическим разложением для квантилей случайной величины $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ (см. (Bening and Korolev, 2002)).

Если же в дополнение к условиям Теоремы 12.2.5 $\alpha_3 = 0$, что возможно, например, если случайные величины X_j имеют симметричное распределение, то

$$u_\beta^{(2)}(n) \;=\; \sigma\sqrt{n}u_\beta \;+\; \frac{\alpha_4 + 3\sigma^4(\nu_2 - 1)}{24\sigma^4\sqrt{n}}(u_\beta^3 - 3u_\beta) \;+\; o\Big(n^{-1/2}\Big).$$

12.3 Некоторые свойства масштабных смесей нормальных законов

12.3.1 Основные определения

В этой главе мы рассматриваем методы анализа риска, основанные на распределениях вероятностей специального вида – масштабных смесях нормальных законов. Такие распределения имеют вид

$$\mathsf{E}\Phi\Big(\frac{x}{Y}\Big) = \int\limits_0^\infty \Phi\Big(\frac{x}{y}\Big)d\mathsf{P}(Y < y),$$

где Y – неотрицательная случайная величина. (Напомним, что здесь и далее мы используем традиционные обозначения $\Phi(x)$ и $\phi(x)$ для стандартных нормальных функции распределения и плотности вероятностей, соответственно:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big\{-\frac{x^2}{2}\Big\}, \qquad \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\phi(u)du, \qquad x \in \mathbb{R}).$$

Им соответствуют плотности вида

$$\mathsf{E}\frac{1}{Y}\phi\Big(\frac{x}{Y}\Big) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{y}\phi\Big(\frac{x}{y}\Big)d\mathsf{P}(Y < y).$$

В частности, если Y – дискретная случайная величина, принимающая положительные значения $y_1, y_2, \ldots$, то

$$\mathsf{E}\Phi\Big(\frac{x}{Y}\Big) = \sum_{k=1}^\infty \mathsf{P}(Y = y_k)\Phi\Big(\frac{x}{y_k}\Big)$$

и

$$\mathsf{E}\frac{1}{Y}\phi\Big(\frac{x}{Y}\Big) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\mathsf{P}(Y = y_k)}{y_k}\phi\Big(\frac{x}{y_k}\Big)$$

(более подробно о понятии смеси вероятностных распределений говорится в разделе 2.10).

Несложно убедиться, что если X и Y – независимые случайные величины, причем X имеет стандартное нормальное распределение, а случайная величина Y неотрицательна, то

$$\mathsf{E}\Phi\Big(\frac{x}{Y}\Big) = \mathsf{P}(X \cdot Y < x).$$

Мы ограничимся лишь рассмотрением масштабных смесей нормальных законов с нулевым средним. На то есть несколько причин. Во-первых, условия сходимости к масштабным смесям распределений с ненулевым средним можно получить из приводимых ниже результатов с помощью простого переобозначения. Во-вторых, такие распределения имеют широкое применение в физике, метрологии и финансовой математике (см. ниже). В-третьих, класс масштабных смесей нормальных законов с нулевым средним весьма богат и содержит, в частности, распределения Лапласа (двойное показательное), Коши, Стьюдента, симметричные строго устойчивые законы (см., например, (Золотарев, 1983), Теорема 3.3.1), а также, как мы увидим ниже, многие симметризованные распределения, в частности, симметризованное гамма-распределение.

12.3.2 Островершинность масштабных смесей нормальных законов

Понятие островершинности распределения можно определять по-разному. К примеру, в прикладных исследованиях в качестве численной характеристики островершинности часто рассматривается коэффициент эксцесса æ(Z), который для случайной величины Z с $\mathsf{E}Z^4 < \infty$

определяется как

$$æ(Z) = \mathsf{E}\Big(\frac{Z - \mathsf{E}Z}{\sqrt{\mathsf{D}Z}}\Big)^4.$$

Если $\mathsf{P}(X < x) = \Phi(x)$, то $æ(X) = 3$. Плотности с более острыми вершинами (и, соответственно, более тяжелыми хвостами), чем у нормальной плотности, имеют $æ > 3$, а для плотностей с менее острой вершиной $æ < 3$. Следующее утверждение устанавливает, что смеси $\mathsf{E}\Phi(x/\sqrt{U})$ с конечными четвертыми моментами *всегда* являются более островершинными и, следовательно, имеют более тяжелые хвосты, нежели нормальный закон, если в качестве характеристики островершинности рассматривается коэффициент эксцесса.

Лемма 12.3.1. *Пусть X и Y — независимые случайные величины с конечными четвертыми моментами. Предположим, что $\mathsf{E}X = 0$ и $\mathsf{P}(Y \geq 0) = 1$. Тогда*

$$æ(XY) \geq æ(X).$$

Более того, $æ(XY) = æ(X)$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{P}(Y = \mathrm{const}) = 1$.

Доказательство (см., например, (Gnedenko and Korolev, 1996) или (Bening and Korolev, 2002)). Из независимости случайных величин X и Y вытекает, что

$$æ(XY) = \mathsf{E}\Big(\frac{XY - \mathsf{E}XY}{\sqrt{\mathsf{D}XY}}\Big)^4 = \frac{\mathsf{E}(XY - \mathsf{E}XY)^4}{(\mathsf{E}(XY - \mathsf{E}XY)^2)^2} =$$

$$= \frac{\mathsf{E}(XY - \mathsf{E}X\mathsf{E}Y)^4}{(\mathsf{E}(XY - \mathsf{E}X\mathsf{E}Y)^2)^2} = \frac{\mathsf{E}X^4\mathsf{E}Y^4}{(\mathsf{E}X^2)^2(\mathsf{E}Y^2)^2} = æ(X) \cdot \frac{\mathsf{E}Y^4}{(\mathsf{E}Y^2)^2}. \qquad (12.3.1)$$

Но по неравенству Иенсена $\mathsf{E}Y^4 \geq (\mathsf{E}Y^2)^2$. Поэтому правая часть соотношения (12.3.1) всегда не меньше, чем $æ(X)$. Более того, она равна $æ(X)$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}Y^4 = (\mathsf{E}Y^2)^2$, что, очевидно, возможно, только если $\mathsf{P}(Y = \mathrm{const}) = 1$. Лемма доказана.

Таким образом, если X – стандартная нормальная случайная величина, а U – неотрицательная случайная величина с $\mathsf{E}U^2 < \infty$, независимая от X, то $æ(X \cdot \sqrt{U}) \geq 3$ и $æ(X \cdot \sqrt{U}) = 3$, если и только если U неслучайна.

Понятие "распределения с тяжелыми хвостами", естественно, тесно связанное с понятием островершинности, также можно определить по-разному. В данном обзоре мы не придерживаемся какого-либо единого формального определения распределения с тяжелыми хвостами, понимая под таковым распределение, хвосты которого имеют более высокую скорость убывания по сравнению с нормальным законом при неограниченном росте аргумента. В (Birnbaum, 1940) предложено вместо “абсолютной” тяжести хвостов распределений вероятности рассматривать “относительную”, сравнивая вероятности больших уклонений. Следуя этому подходу и используя неравенство Иенсена, легко получить неравенства, напрямую связывающие хвосты масштабных смесей нормальных законов с хвостами самого́ нормального распределения. Пусть, как и ранее, X – стандартная нормальная случайная величина, а U – неотрицательная случайная величина, независимая от X. Плотность случайной величины $Z = X \cdot \sqrt{U}$ (всегда существующую, симметричную и одновершинную) обозначим $p_Z(x)$. Легко видеть, что $\mathsf{P}(Z > x) = 1 - \mathsf{E}\Phi(x/\sqrt{U})$ для $x > 0$.

Лемма 12.3.2. *Для $x > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathsf{P}(Z > x) \geq 1 - \Phi(\sqrt{2\pi} x p_Z(0)).$$

Если случайная величина U удовлетворяет условию нормировки $\mathsf{E}U^{-1/2} = 1$, то

$$\mathsf{P}(Z > x) \geq 1 - \Phi(x), \quad x > 0.$$

Из Леммы 12.3.2 вытекает, что если $\mathsf{E}U^{-1/2} = 1$, то для любого $x \geq 0$

$$\mathsf{P}(|X \cdot \sqrt{U}| \geq x) \ \geq \ \mathsf{P}(|X| \geq x) \ (= \ 2[1 - \Phi(x)]),$$

то есть масштабные смеси нормальных законов всегда имеют более тяжелые хвосты, нежели само нормальное распределение.

12.3.3 Масштабные нормальные смеси как сверточные симметризации вероятностных распределений

Из результатов предыдущих разделов вытекает, что задача статистического анализа распределений многих реальных случайных величин и процессов, характеризующих риски, сводится к статистическому определению смешивающего распределения (разделению смеси), которое является неизвестным параметром рассматриваемой статистической задачи. Без каких-либо дополнительных предположений класс смешивающих законов (параметрическое множество) совпадает с множеством всех распределений, сосредоточенных на неотрицательной полуоси. Подбор нужного закона при этом представляет собой чрезвычайно трудоемкую статистическую задачу. Вопрос о существовании и единственности решения этой задачи тесно связан с понятием идентифицируемости, то есть однозначности представления смесей. Общая задача идентификации сдвиг/масштабной смеси нормальных законов допускает неоднозначное решение, однако конечные сдвиг/масштабные смеси нормальных законов и произвольные масштабные смеси, рассматриваемые в данной работе, идентифицируемы однозначно (Teicher, 1961), (Teicher, 1963), также см., например, (Королев, 1997). С целью упрощения задачи вполне естественно стремиться сузить параметрическое множество, то есть семейство допустимых смешивающих законов за счет каких-либо дополнительных соображений. Один из возможных подходов к решению этой задачи и предлагается в данном разделе.

Поскольку излагаемые здесь модели могут быть использованы для описания самых разных стохастических объектов, например, логарифмов приращений биржевых цен или экспериментальных данных, связанных с измерениями параметров турбулентной плазмы, мы не будем конкретизировать природу анализируемых данных и будем говорить просто о некотором *показателе* P. Практика показывает, что во многих случаях статистический анализ данных об изменениях показателя удобно производить, разбивая общий массив данных (выборку) на два подмассива (две подвыборки), один из которых содержит только положительные, а другой – только неположительные данные, подгоняя распределение к каждой из подвыборок и в качестве итогового распределения показателя беря свертку подогнанных распределений.

При этом часто соображения симметрии обосновывают предположение о том, что сворачиваемые распределения должны по крайней мере принадлежать к одному типу. Для простоты мы будем предполагать, что они совпадают и равны, скажем, $F(x)$. Характеристическую функцию, соответствующую функции распределения $F(x)$, обозначим $f(t)$. Тогда характеристическая функция показателя P имеет вид

$$\mathsf{E}\exp\{isP\} = |f(s)|^2, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Последняя характеристическая функция вещественна, следовательно, распределение, ей соответствующее, является симметричным в том смысле, что

$$\mathsf{P}(P < -x) = 1 - \mathsf{P}(P > x).$$

Распределение, соответствующее характеристической функции $|f(s)|^2$, называется *сверточной симметризацией* распределения $F(x)$.

Таким образом, упомянутая выше задача сужения класса допустимых смесей нормальных законов сводится к следующей.

Задача 12.3.1. *Описать класс* $\mathfrak{P}$ *всех распределений* F*, сосредоточенных на неотрицательной полуоси и таких, что их сверточная симметризация представима в виде масштабной смеси нормальных законов.*

Решение Задачи 12.3.1 дается следующей теоремой.

Теорема 12.3.1. *Распределение F принадлежит к классу $\mathfrak{P}$ тогда и только тогда, когда $F(0) = 0$ и соответствующая ему характеристическая функция f удовлетворяет следующему условию: функция $|f(\sqrt{t})|^2$, $t \geq 0$, является вполне монотонной, то есть она бесконечно дифференцируема и при каждом $n \geq 1$*

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} |f(\sqrt{t})|^2 \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{12.3.2}$$

Доказательство см., например, в работе (Королев, 2000).

Заметим, что условие (12.3.2) Теоремы 12.3.1 представляет собой критерий представимости сверточной симметризации *произвольного* распределения F (не обязательно сосредоточенного на полуоси) с характеристической функцией f в виде масштабной смеси нормальных законов.

Класс $\mathfrak{P}$ не является пустым, что демонстрируют следующие примеры.

Пример 12.3.1. Пусть $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ – функция гамма-распределения с некоторыми параметром формы α и параметром масштаба λ. Тогда $\Gamma_{\alpha,\lambda} \in \mathfrak{P}$. В частности, к классу $\mathfrak{P}$ принадлежит экспоненциальное распределение, которому соответствует $\alpha = 1$.

Действительно, функции распределения $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ соответствует характеристическая функция

$$\gamma_{\alpha,\lambda}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^{\alpha}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Легко видеть, что для $s \geq 0$

$$|\gamma_{\alpha,\lambda}(\sqrt{s})|^2 = \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + s}\right)^{\alpha}. \tag{12.3.3}$$

В правой части (12.3.3) стоит преобразование Лапласа-Стильтьеса гамма-распределения с параметром формы α и параметром масштаба λ^2. По теореме С. Н. Бернштейна эта функция вполне монотонна, и следовательно, согласно Теореме 12.3.1, $\Gamma_{\alpha,\lambda} \in \mathfrak{P}$.

Можно показать, что распределению $\Gamma_{\alpha,\lambda} \in \mathfrak{P}$ соответствует смешивающая случайная величина $Y = \sqrt{U}$, где U имеет функцию распределения $\Gamma_{\alpha,\lambda^2/2}$.

Действительно, рассмотрим случайную величину $P \stackrel{d}{=} W - W'$, где W и W' – независимые случайные величины с одним и тем же гамма-распределением с некоторыми параметрами масштаба $\lambda > 0$ и формы

$\alpha > 0$, задаваемым плотностью вероятностей

$$p_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

где $\Gamma(\alpha)$ – эйлерова гамма-функция,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx.$$

Но тогда также справдливо и соотношение $P \stackrel{d}{=} X \cdot \sqrt{W''}$, где случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение и независима от случайной величины W'', имеющей гамма-распределение с параметром масштаба $\frac{1}{2}\lambda^2$ и параметром формы α. Действительно, заметим, что характеристическая функция разности $W - W'$ равна

$$\mathsf{E} e^{it(W-W')} = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{it}{\lambda}\right)^\alpha} \cdot \frac{1}{\left(1 + \dfrac{it}{\lambda}\right)^\alpha} = \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}\right)^\alpha. \tag{12.3.4}$$

Пусть W'' – гамма-распределенная случайная величина с параметром формы α и некоторым параметром масштаба μ и пусть X – независимая от нее случайная величина со стандартным нормальным распределением. Тогда

$$\mathsf{E} \exp\{itX\sqrt{W''}\} = \frac{\mu^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty e^{-x(\frac{1}{2}t^2+\mu)} x^{\alpha-1}\, dx =$$

$$= \frac{\mu^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\frac{1}{2}t^2 + \mu)^\alpha} \int\limits_0^\infty e^{-y} y^{\alpha-1}\, dy = \left(\frac{2\mu}{2\mu + t^2}\right)^\alpha. \tag{12.3.5}$$

Правые части (12.3.4) и (12.3.5) совпадают, если $\mu = \frac{1}{2}\lambda^2$, что и требовалось доказать.

В частности, масштабной смесью нормальных законов является распределение Лапласа с плотностью $\ell(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$, которому соответствует смешивающая экспоненциально распределенная случайная величина U.

Пример 12.3.2. Пусть $G_{\alpha,b,c}$ – функция распределения устойчивого закона, сосредоточенного на положительной полуоси, которому соответствует характеристическая функция

$$g_{\alpha,b,c}(t) = \exp\left\{ibt - c|t|^\alpha\left[1 - i\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right]\right\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Здесь $0 < \alpha < 1$, $b \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Тогда $G_{\alpha,b,c} \in \mathfrak{P}$.

Чтобы найти смешивающее распределение, соответствующее функции распределения $G_{\alpha,b,c}$, не ограничивая общности, будем считать, что $2c = 1$ (это предположение фактически сводится к изменению масштаба в $(2c)^{1/\alpha}$ раз). Тогда характеристическая функция $g_\alpha(t)$, соответствующая симметризации закона $G_{\alpha,b,\frac{1}{2}}$, очевидно, равна $|g_{\alpha,b,\frac{1}{2}}(t)|^2 = \exp\{-|t|^\alpha\}$, что, как известно, соответствует симметричному устойчивому закону G_α с параметром α. По Теореме 3.3.1 из (Золотарев, 1983), при этом функция распределения G_α может быть представлена в виде

$$G_\alpha(x) = \int_0^\infty \Phi\left(x/\sqrt{y}\right) d\mathsf{P}(Y_{\alpha/2} < y), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения, а $Y_{\alpha/2}$ – положительная строго устойчивая случайная величина с показателем $\alpha/2$.

В частности, к классу $\mathfrak{P}$ принадлежит распределение Леви (устойчивое распределение с параметром $\alpha = 1/2$) с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left\{-\frac{1}{2x}\right\}, \quad x > 0.$$

Ему соответствует смешивающее сосредоточенное на положительной полуоси строго устойчивое распределение с характеристическим показателем $\alpha = 1/4$.

Иногда говорят, что случайная величина X имеет распределение с тяжелыми хвостами, если для некоторых $C > 0$ и $\gamma > 0$

$$\mathsf{P}(|X| \geq x) \sim Cx^{-\gamma}$$

при $x \to \infty$. При этом можно показать, что "тяжесть" хвоста распределения с тяжелыми хвостами совпадает с аналогичной характеристикой его симметризации. А именно, если случайная величина X имеет распределение с тяжелыми хвостами в вышеуказанном смысле, характеризуемыми параметром $\gamma > 0$, то

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\mathsf{P}(|X^{(s)}| \geq x)}{\mathsf{P}(|X| \geq x)} \leq 2^{\gamma+1}.$$

Довольно часто оказывается, что хвосты законов, подогнанных к подвыборкам одного знака, убывают (при $x \to \infty$) вейбулловским образом, то есть как $O(\exp\{-x^\gamma\})$ с некоторым $\gamma \in (0,1)$. Два следующих примера иллюстрируют возможность выбора соответствующего распределения из класса $\mathfrak{P}$.

Оба этих примера основаны на следующем утверждении, доказанном в работе (Багиров, 1988).

ТЕОРЕМА 12.3.2. *Пусть $\mathfrak{A}$ – класс случайных величин, функции распределения которых представимы в виде масштабных смесей нормальных функций распределения с нулевым средним. Если V – некоторая случайная величина из класса $\mathfrak{A}$ и n – произвольное натуральное число, то распределение случайной величины V^{2n} принадлежит классу $\mathfrak{P}$.*

ПРИМЕР 12.3.3. Пусть X – случайная величина, плотность распределения которой имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k\sqrt{2\pi}} x^{-(2k-1)/2k} \exp\{-x^{1/k}\}, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

при некотором натуральном k. Тогда $\mathsf{P}(X < x) \in \mathfrak{P}$. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся Теоремой 12.3.2. В качестве V возьмем случайную величину со стандартным нормальным распределением. Очевидно, $V \in \mathfrak{A}$. Несложно проверить, что при этом рассматриваемая в данном примере плотность $p(x)$ соответствует случайной величине $X = V^{2k}$.

ПРИМЕР 12.3.4. Пусть W_γ – распределение Вейбулла с параметром γ, имеющее плотность

$$w_\gamma(x) = \begin{cases} \gamma x^{\gamma-1} \exp\{-x^\gamma\}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

причем $\gamma = (2k)^{-1}$ при некотором $k = 1, 2, \ldots$ Тогда $W_\gamma \in \mathfrak{P}$. Действительно, выше (в частности, см. Пример 12.3.1) мы заметили, что к классу $\mathfrak{A}$ принадлежит случайная величина Λ, имеющая распределение Лапласа. Легко убедиться, что случайная величина Λ^{2k} имеет плотность $w_\gamma(x)$ с $\gamma = (2k)^{-1}$. Поэтому принадлежность распределения W_γ к классу $\mathfrak{P}$ вытекает из Теоремы 12.3.2.

Теорема 12.3.2 обеспечивает также присутствие в классе $\mathfrak{P}$ распределений (а стало быть, и соответствующих случайных величин в классе $\mathfrak{A}$), имеющих хвосты, убывающих степенным образом с произвольным показателем. В этом нас убеждает следующий пример.

ПРИМЕР 12.3.5. Пусть $F_{1,m}$ – распределение Снедекора–Фишера с $(1, m)$ степенями свободы ($m > 0$), задаваемое плотностью

$$p_{1,m}(x) = \frac{\Gamma((m+1)/2) m^{m/2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(m/2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}(m+x)^{(m+1)/2}}, \quad x > 0.$$

Тогда $F_{1,m} \in\mathfrak{P}$. Действительно, распределение Снедекора–Фишера с (n,m) степенями свободы ($n > 0$, $m > 0$), хорошо известное в математической статистике, соответствует случайной величине

$$Z_{n,m} = \frac{m\eta_n}{n\eta_m},$$

где η_n и η_m – независимые случайные величины, имеющие распределение хи-квадрат соответственно с n и m степенями свободы (при этом n и m не обязаны быть целыми). Отсюда видно, что распределение Снедекора–Фишера $F_{1,m}$ с $(1,m)$ степенями свободы соответствует квадрату случайной величины τ_m, имеющей распределение Стьюдента с m степенями свободы. Но как хорошо известно, $\tau_m \in\mathfrak{A}$. Теперь требуемое утверждение непосредственно вытекает из Теоремы 12.3.2.

Необходимо отметить, что в соответствии с введенной выше терминологией, масштабная смесь нормальных законов, являющаяся симметризацией распределения Снедекора–Фишера $F_{1,m}$ с $(1,m)$ степенями свободы, имеет тяжелые хвосты, убывающие при $x \to \infty$ как $O(x^{-m/2})$.

Можно сформулировать задачу, являющуюся в некотором смысле обратной к Задаче 12.3.1.

Задача 12.3.2 *Описать класс $\mathfrak{M}$ всех распределений H, сосредоточенных на неотрицательной полуоси, обладающих следующим свойством: для распределения H существует распределение F, сосредоточенное на неотрицательной полуоси, сверточная симметризация которого совпадает с функцией распределения*

$$\int\limits_0^\infty \Phi(x/y)dH(y).$$

Эта задача не является тривиальной, поскольку класс $\mathfrak{M}$ не совпадает с классом всех распределений, сосредоточенных на неотрицательной полуоси. Действительно, пусть H – вырожденная функция распределения с единственным единичным скачком в некоторой точке $a > 0$. Тогда масштабная смесь нормальных законов становится нормальным распределением, а основное уравнение принимает вид $X \stackrel{d}{=} U/a - U'/a$. Это уравнение относительно распределения случайной величины U по теореме Леви–Крамера о разложимости нормального закона лишь на нормальные компоненты имеет единственное решение: распределение случайной величины U само должно быть нормальным, но оно имеет точки роста на отрицательной полуоси, и стало быть, вырожденное распределение не принадлежит к $\mathfrak{M}$.

12.3.4 Масштабные нормальные смеси как рандомизационные симметризации вероятностных распределений

Рассмотрим еще один подход к симметризации распределений. Для наглядности, вновь будем говорить о случайной величине P, например, равной приращению некоторого финансового индекса за рассматриваемый промежуток времени. Пусть X – абсолютная величина этого приращения. Если финансовый рынок находится в стационарном режиме, то заранее нельзя сделать абсолютно никакого прогноза о том, в какую сторону сдвинется рассматриваемый финансовый индекс, то есть о том, каким окажется знак случайной величины P. Формально это выражается в том, что приращение с вероятностью $\frac{1}{2}$ может быть положительным и с такой же вероятностью – отрицательным. Другими словами,

$$\mathsf{P}(P < x) = \tfrac{1}{2}\mathsf{P}(X < x) + \tfrac{1}{2}\mathsf{P}(-X < x).$$

Абстрагируясь от нашей конкретной прикладной задачи, рассмотрим теперь произвольную случайную величину X и обозначим ее функцию распределения $F(x)$. Назовем *рандомизационной симметризацией* случайной величины X случайную величину $\widetilde{X}$ такую, что

$$\widetilde{X} = \begin{cases} X & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}, \\ -X & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\mathsf{P}(\widetilde{X} < x) = \tfrac{1}{2}\mathsf{P}(X < x) + \tfrac{1}{2}\mathsf{P}(-X < x) =$$

$$= \tfrac{1}{2}[F(x) + 1 - F(-x+0)] = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}[F(x) - F(-x+0)].$$

Если при этом случайная величина X абсолютно непрерывна, то, обозначив плотности случайных величин X и $\widetilde{X}$ соответственно $p(x)$ и $q(x)$, из последнего равенства мы получим соотношение

$$q(x) = \tfrac{1}{2}[p(x) - p(-x)].$$

Более того, если $\mathsf{P}(X \geq 0) = 1$, то

$$\mathsf{P}(\widetilde{X} < x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[1 + F(x)], & \text{если } x > 0, \\ \frac{1}{2}[1 - F(-x+0)], & \text{если } x \leq 0, \end{cases}$$

и

$$q(x) = \tfrac{1}{2}p(|x|).$$

По аналогии, функцию распределения $Q(x) = \mathsf{P}(\widetilde{X} < x)$ будем называть *рандомизационной симметризацией* функции распределения $F(x)$.

Рандомизационную симметризацию $\widetilde{X}$ случайной величины X удобно интерпретировать следующим образом. Пусть Z – независимая от X случайная величина такая, что $\mathsf{P}(Z = 1) = 1 - \mathsf{P}(Z = -1) = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\widetilde{X} = X \cdot Z.$$

Если $f(s)$ – характеристическая функция случайной величины X, то

$$\mathsf{E}\exp\{is\widetilde{X}\} = \tfrac{1}{2}f(s) + \tfrac{1}{2}f(-s) =$$
$$= \tfrac{1}{2}[\mathsf{E}\cos sX + i\mathsf{E}\sin sX + \mathsf{E}\cos sX - i\mathsf{E}\sin sX] = \mathsf{E}\cos sX = \mathrm{Re}f(s).$$

Принимая во внимание приведенные выше доводы в пользу того, что распределение приращения показателя разумно искать среди смесей нормальных законов, мы приходим к следующей задаче.

Задача 12.3.3. *Описать класс $\mathfrak{Q}$ всех распределений F, сосредоточенных на неотрицательной полуоси и таких, что их рандомизационная симметризация представима в виде масштабной смеси нормальных законов.*

Решение Задачи 12.3.3 дается следующей теоремой.

Теорема 12.3.3. *Распределение F принадлежит к классу $\mathfrak{Q}$ тогда и только тогда, когда*

(iii) $F(0) = 0$;

(iv) *соответствующая ему характеристическая функция $f(s)$ удовлетворяет следующему условию: функция $Ref(\sqrt{s})$, $s \geq 0$, является вполне монотонной, то есть она бесконечно дифференцируема и при каждом $n \geq 1$*

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\mathrm{Re}f(\sqrt{s}) \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Доказательство. В терминах случайных величин (отождествляя случайные величины и их функции распределения, а по сути рассматривая классы эквивалентности случайных величин, относя к одному классу эквивалентности все случайные величины с одной и той же функцией распределения) мы можем дать следующее определение класса $\mathfrak{Q}$: класс $\mathfrak{Q}$ содержит те и только те случайные величины X, для каждой из которых найдутся независимая от X случайная величина Z

такая, что $\mathsf{P}(Z=1)=1-\mathsf{P}(Z=-1)=\frac{1}{2}$, и пара независимых случайных величин W и Y, такая, что W имеет стандартное нормальное распределение, $\mathsf{P}(Y\geq 0)=1$ и

$$X\cdot Z \stackrel{d}{=} W\cdot Y. \tag{12.3.6}$$

Переписав (12.3.6) в терминах характеристических функций, получим

$$\mathrm{Re} f(s)=\mathsf{E}\exp\{itWY\}=\int\limits_0^\infty \exp\Big\{-\frac{s^2y^2}{2}\Big\}d\mathsf{P}(Y<y)=$$

$$=\mathsf{E}\exp\Big\{-s^2\Big(\frac{Y^2}{2}\Big)\Big\},\quad t\in\mathbb{R}. \tag{12.3.7}$$

Обозначим $V=Y^2/2$, $u=s^2$. Тогда, очевидно, $u\geq 0$ и $s=\pm\sqrt{u}$. В левой части соотношения (12.3.7) стоит четная функция, поэтому всегда

$$\mathrm{Re} f(-\sqrt{u})=\mathrm{Re} f(\sqrt{u}).$$

Таким образом, соотношение (12.3.7) эквивалентно следующему:

$$\mathrm{Re} f(\sqrt{u})=\mathsf{E}\exp\{-uV\},\quad u\geq 0. \tag{12.3.8}$$

В правой части (12.3.8) стоит преобразование Лапласа-Стильтьеса некоторой неотрицательной случайной величины V. Поэтому мы можем заключить, что $F\in\mathfrak{Q}$ если и только если соответствующая функции распределения F характеристическая функция f удовлетворяет условию: функция $\mathrm{Re} f(\sqrt{u})$ является преобразованием Лапласа–Стильтьеса. Но согласно теореме С. Н. Бернштейна (см., например, (Феллер, 1984; раздел XIII.4)), для того чтобы некоторая функция была преобразованием Лапласа–Стильтьеса, необходимо и достаточно, чтобы (а) она была вполне монотонной и (б) в нуле она была равна единице. В нашем случае условие (б) выполнено автоматически, поскольку f – характеристическая функция. Условие (iii) при этом обеспечивает концентрацию F на неотрицательной полуоси. Теорема доказана.

Заметим, что условие (iv) теоремы 12.3.3 представляет собой критерий представимости рандомизационной симметризации *произвольного* распределения F (не обязательно сосредоточенного на полуоси) с характеристической функцией f в виде масштабной смеси нормальных законов.

Класс $\mathfrak{Q}$ не пуст. Например, он содержит экспоненциальное распределение. Действительно, характеристическая функция экспоненциального распределения с параметром λ, как известно, равна

$$f(s)=\frac{1}{1-\frac{is}{\lambda}}=\frac{1+\frac{is}{\lambda}}{(1-\frac{is}{\lambda})(1+\frac{is}{\lambda})}=\frac{1+\frac{is}{\lambda}}{1+\frac{s^2}{\lambda^2}}.$$

Стало быть,

$$\mathrm{Re}f(s) = \frac{1}{1+\frac{s^2}{\lambda^2}},$$

так что

$$\mathrm{Re}f(\sqrt{s}) = \frac{1}{1+\frac{s}{\lambda^2}}.$$

Но последняя функция есть не что иное как преобразование Лапласа–Стильтьеса показательного распределения с параметром λ^2, и стало быть, вполне монотонна. По теореме 12.3.3 рандомизационная симметризация экспоненциального распределения представима в виде масштабной смеси нормальных законов. Более того, так как в данном случае $\mathrm{Re}f(s) = |f(s)|^2$, то рандомизационная симметризация показательного распределения совпадает с его сверточной симметризацией, которая, как мы уже знаем, представляет собой распределение Лапласа.

Строго говоря, рандомизационная симметризация не приводит к сужению класса масштабных смесей нормальных законов. В самом деле, можно заметить, что все масштабные смеси нормальных законов абсолютно непрерывны. Воспользовавшись уже приведенным соотношением $q(x) = \frac{1}{2}p(|x|)$, связывающим плотности $p(x)$ случайной величины $X \geq 0$ и $q(x)$ ее рандомизационной симметризации $\widetilde{X}$, мы *каждой* масштабной смеси нормальных плотностей $q(x)$ (которая, очевидно, симметрична) мы можем поставить в соответствие ее “половинку” $p(x)$, отличную от нуля на неотрицательной полуоси. Ясно, что при этом $p(x)$ соответствует распределению из класса $\mathfrak{Q}$. Это означает, что соответствие между классом масштабных смесей нормальных законов и классом $\mathfrak{Q}$ взаимно однозначно.

Из соотношения $q(x) = \frac{1}{2}p(|x|)$ вытекает, что к классу $\mathfrak{Q}$ принадлежат только унимодальные законы, имеющие моду в нуле.

Из этого замечания, в свою очередь, вытекает, что классы $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{P}$ не совпадают. Действительно, в отличие от сверточной модели симметризации, рандомизационные симметризации гамма-распределений с параметром формы, превосходящим единицу, не могут быть представлены в виде масштабных смесей нормальных законов, так как рандомизационные симметризации указанных распределений не унимодальны.

В отличие от сверточной модели симметризации, в рамках рандомизационной модели, очевидно, нормальное распределение допустимо как распределение приращений финансовых индексов. Действительно, несложно видеть, что если $G(x) = 2\Phi(\max\{x, 0\}) - 1$ – функция распределения максимума стандартного винеровского процесса на единичном отрезке, то рандомизационная симметризация функции распределения $G(x)$ совпадает с $\Phi(x)$.

12.4 Предельные теоремы для асимптотически нормальных статистик, построенных по выборкам случайного объема

В предыдущих разделах данной главы мы рассматривали видоизменение предельного распределения сумм независимых случайных величин при замене числа слагаемых случайной величиной. Сходный эффект наблюдается при статистическом анализе, основанном на выборках случайного объема, при котором используются такие статистики (то есть измеримые функции от выборки), которые ведут себя в определенном смысле подобно суммам случайных величин, а именно, обладают свойством асимптотической нормальности.

Иногда при анализе эффективности и/или качества функционирования технических систем, экономических или финансовых компаний оценка и прогноз основных характеристик производятся на основе статистических данных, накапливаемых в течение определенного интервала времени. Как правило, данные накапливаются в результате осуществления некоторых "информативных" событий. Например, выводы о распределении размера страховых выплат, что играет ключевую роль при вычислении или оценивании такого важного критерия эффективности функционирования страховой компании как вероятность разорения, обычно делаются на основе статистики $X_1, X_2, \ldots, X_{N(T)}$ значений страховых требований, поступивших в течение интервала времени $[0, T]$ (очевидно, здесь $N(T)$ обозначает число страховых требований, поступивших за время $[0, T]$). Аналогично, выводы о значении так называемого "коэффициента готовности" технической системы (определяемого как отношение средней продолжительности безотказной работы системы к средней продолжительности цикла "безотказная работа – ремонт") делаются на основе статистики $(X_1, Q_1), \ldots, (X_{N(T)}, Q_{N(T)})$, накопленной за некоторый интервал времени $[0, T]$, где X_i – продолжительность безотказной работы системы после $(i-1)$-го ремонта, а Q_i – продолжительность i-го ремонта системы. Более того, эти выводы используются для прогнозирования коэффициента готовности на следующий период времени $[T, 2T]$. Однако, очевидно (по крайней мере, в двух описанных выше ситуациях), что наблюдаемое число информативных событий, произошедших в течение интервала времени $[0, T]$, является не чем иным как реализацией некоторой целочисленной случайной величины, потому как и число страховых требований, накопленных к моменту времени T, и число циклов "безотказная работа – ремонт" до этого времени следуют некоторым считающим случайным процессам.

Если не принимать во внимание случайный характер объема доступной информации, то все что можно сделать – это построить в некотором смысле “условный” прогноз, ориентированный на предположение о том, что в течение следующего периода времени произойдет примерно столько же информативных событий. Чтобы сделать полный прогноз с учетом случайности числа информативных событий, необходимо использовать результаты типа предельных теорем для статистик, построенных по выборкам случайного объема. В классической математической статистике типическим свойством многих измеримых функций от выборки (статистик) является их асимптотическая нормальность (при неслучайном объеме выборки). Оказывается, что при замене объема выборки случайной величиной свойство асимптотической нормальности рассматриваемых статистик трансформируется таким образом, что вместо нормального у статистик могут возникнуть предельные распределения с произвольно тяжелыми хвостами. Этот эффект приводит к тому, что условные прогнозы, о которых говорилось выше и которые основаны на нормальности предельного распределения рассматриваемых характеристик, существенно недооценивают возможные риски. Учитывать это обстоятельство чрезвычайно важно при использовании такой популярной в экономике и финансовой инженерии меры риска как VaR, упоминавшейся в начале этой главы. В данном и следующем разделах мы рассмотрим эффект трансформации предельных распределений статистик при замене объема выборки случайной величиной более подробно.

Рассмотрим случайные величины $N_1, N_2, \ldots, X_1, X_2, \ldots$, определенные на одном и том же измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$. Пусть на $\mathcal{A}$ задано семейство вероятностных мер $\{\mathsf{P}_\theta\}$, где $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Предположим, что при каждом $n \geq 1$ случайная величина N_n принимает только натуральные значения и независима от последовательности $X_1, X_2, \ldots$ относительно каждой из семейства мер $\{\mathsf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$. Пусть

$$T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n) = (T_{n,1}(X_1, \ldots, X_n), \ldots, T_{n,r}(X_1, \ldots, X_n))$$

– некоторая статистика со значениями в $\mathbb{R}^r$, $r \geq 1$. Для каждого $n \geq 1$ определим случайный вектор (элемент) T_{N_n}, положив

$$T_{N_n}(\omega) = T_{N_n(\omega)}\left(X_1(\omega), \ldots, X_{N_n(\omega)}(\omega)\right)$$

для каждого элементарного исхода $\omega \in \Omega$.

Пусть Σ – некоторая положительно определенная матрица. Нормальное распределение в $\mathbb{R}^r$ с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей Σ будем обозначать Φ_Σ. Это распределение определяется плотностью

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\exp\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top\Sigma^{-1}\mathbf{x}\}}{(2\pi)^{r/2}|\Sigma|^{1/2}}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r.$$

Распределение случайного вектора ξ относительно меры P_θ мы будем обозначать $\mathcal{L}_\theta(\xi)$. Слабая сходимость распределений как и ранее будет обозначаться символом $\Longrightarrow$.

Будем говорить, что статистика T_n *асимптотически нормальна* с асимптотической ковариационной матрицей Σ, если существует функция $t(\theta) : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}^r$ такая, что при каждом $\theta \in \Theta$

$$\mathcal{L}_\theta(\sqrt{n}(T_n - t(\theta))) \Longrightarrow \Phi_\Sigma \quad (n \to \infty). \tag{12.4.1}$$

На существенное отличие асимптотических свойств статистик, построенных по выборкам случайного объема, от аналогичных свойств статистик, асимптотически нормальных в смысле (12.4.1), обратил внимание еще Б. В. Гнеденко. В частности, изучая достаточные условия слабой сходимости распределений выборочных квантилей в выборках случайного объема, он привел следующий пример, связанный с выборочной медианой. Хорошо известно, что в стандартной ситуации выборочная медиана асимптотически нормальна. В то же время, как показано в (Гнеденко, 1989), если объем выборки N_n имеет геометрическое распределение со средним n, то нормированная выборочная медиана $\sqrt{n}(X_{([N_n/2]+1)} - \mathrm{med}X_1)$ имеет предельную функцию распределения

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right),$$

у которой нет никаких моментов порядков $\delta \geq 2$ (мы упоминали этот пример выше).

Наша цель в данной главе – изучить асимптотическое поведение случайных элементов T_{N_n}.

12.4.1 Вспомогательные результаты

Рассмотрим последовательность $\{S_n\}_{n\geq 1}$ случайных элементов, принимающих значения в r-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^r$. Пусть $\Xi(\mathbb{R}^r)$ – множество всех невырожденных линейных операторов, действующих из $\mathbb{R}^r$ в $\mathbb{R}^r$. Символы $\stackrel{d}{=}$ и $\xrightarrow{\mathsf{P}}$ будут соответственно обозначать совпадение распределений и сходимость по вероятности. Предположим, что существуют последовательности $\{B_n\}_{n\geq 1}$ операторов из

$\Xi(\mathbb{R}^r)$ и $\{a_n\}_{n\geq 1}$ элементов из $\mathbb{R}^r$ такие, что

$$Y_n \equiv B_n^{-1}(S_n - a_n) \Longrightarrow Y \quad (n \to \infty), \tag{12.4.2}$$

где Y – некоторый случайный элемент распределение которого мы обозначим H, $H = \mathcal{L}(Y)$.

Наряду с $\{S_n\}_{n\geq 1}$, рассмотрим последовательность целочисленных положительных случайных величин $\{N_n\}_{n\geq 1}$ таких, что при каждом $n \geq 1$ случайная величина N_n независима от последовательности $\{S_k\}_{k\geq 1}$. Пусть $c_n \in \mathbb{R}^r$, $D_n \in \Xi(\mathbb{R}^r)$, $n \geq 1$. В данном разделе мы сформулируем достаточные условия слабой сходимости распределений случайных элементов $Z_n = D_n^{-1}(S_{N_n} - c_n)$ при $n \to \infty$.

Предположим, что все случайные величины и случайные элементы заданы на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Под измеримостью случайного поля мы будем подразумевать его измеримость как функции двух переменных – элементарного исхода и параметра – относительно декартова произведения σ-алгебры $\mathcal{A}$ и борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R}^r)$ подмножеств $\mathbb{R}^r$.

Для $g \in \mathbb{R}^r$ обозначим $W_n(g) = D_n^{-1}(B_{N_n}g + a_{N_n} - c_n)$. В работах (Korolev and Kossova, 1992) и (Korolev and Kossova, 1995) доказана следующая теорема, устанавливающая достаточные условия слабой сходимости произвольных многомерных случайных последовательностей с независимыми случайными индексами при операторной нормировке.

Теорема 12.4.1. *Пусть $\|D_n^{-1}\| \to \infty$ при $n \to \infty$ и последовательность случайных величин $\{\|D_n^{-1}B_{N_n}\|\}_{n\geq 1}$ слабо относительно компактна. Предположим, что существуют случайный элемент Y с распределением H и случайное поле $W(g)$, $g \in \mathbb{R}^r$, такие, что имеет место* (12.4.2) *и*

$$W_n(g) \Longrightarrow W(g) \qquad (n \to \infty)$$

для H-почти всех $g \in \mathbb{R}^r$. Тогда поле $W(g)$ измеримо, линейно зависит от g и

$$Z_n \Longrightarrow W(Y) \qquad (n \to \infty),$$

где поле $W(\cdot)$ и случайный элемент Y независимы.

Теперь приведем один вспомогательный результат, связанный с идентифицируемостью специального семейства смесей многомерных нормальных законов. Пусть U – неотрицательная случайная величина. Символом $\mathsf{E}\Phi_{U\Sigma}(\cdot)$ мы будем обозначать распределение, которое для каждого борелевского множества A в $\mathbb{R}^r$ определяется как

$$\mathsf{E}\Phi_{U\Sigma}(A) = \int_0^\infty \Phi_{u\Sigma}(A)d\mathsf{P}(U < u). \tag{12.4.3}$$

Пусть $\mathcal{U}$ – множество всех неотрицательных случайных величин.

Лемма 12.4.1. *Какова бы ни была невырожденная ковариационная матрица Σ, семейство распределений $\{\mathsf{E}\Phi_{U\Sigma}(\cdot): \ U \in \mathcal{U}\}$ идентифицируемо в том смысле, что если $U_1 \in \mathcal{U}$, $U_2 \in \mathcal{U}$ и*

$$\mathsf{E}\Phi_{U_1\Sigma}(A) = \mathsf{E}\Phi_{U_2\Sigma}(A) \tag{12.4.4}$$

для любого множества $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^r)$, то $U_1 \stackrel{d}{=} U_2$.

Доказательство этого утверждения совсем просто. Если $U \in \mathcal{U}$, то характеристическая функция, соответствующая распределению $\mathsf{E}\Phi_{U\Sigma}(\cdot)$, имеет вид

$$\phi_U(t) = \int_0^\infty \exp\left\{-\tfrac{1}{2}t^\top(u\Sigma)t\right\} d\mathsf{P}(U < u) =$$

$$= \int_0^\infty \exp\{-us\} d\mathsf{P}(U < u), \quad s = \tfrac{1}{2}\|C^\top t\|^2, \quad t \in \mathbb{R}^r, \tag{12.4.5}$$

где C – невырожденная матрица такая, что $C^\top\Sigma^{-1}C = I_r$, а I_r – тождественная матрица размера $r \times r$. Но в правой части (12.4.5) стоит преобразование Лапласа–Стилтьеса случайной величины U. Из (12.4.4) вытекает тождество $\phi_{U_1}(t) \equiv \phi_{U_2}(t)$, что в силу (12.4.5) означает совпадение преобразований Лапласа–Стилтьеса случайных величин U_1 и U_2, а это в свою очередь влечет $U_1 \stackrel{d}{=} U_2$. Лемма доказана.

12.4.2 От асимптотической нормальности к распределениям с тяжелыми хвостами

В дополнение к обозначениям, введенным в разделе 12.4.1, положим $Z_n = \sqrt{n}(T_{N_n} - t(\theta))$. Символ E_θ будет обозначать математическое ожидание относительно вероятностной меры P_θ. Основным результатом данной главы является следующее утверждение.

Теорема 12.4.2. *Пусть $N_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ при $n \to \infty$ относительно каждой из вероятностных мер P_θ, $\theta \in \Theta$. Предположим, что статистика T_n асимптотически нормальна в смысле* (12.4.1) *с асимптотической ковариационной матрицей Σ. Для того чтобы при каждом $\theta \in \Theta$ существовало распределение F_θ такое, что при каждом $\theta \in \Theta$*

$$\mathcal{L}_\theta(Z_n) \Longrightarrow F_\theta \quad (n \to \infty), \tag{12.4.6}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало семейство функций распределения $\mathcal{V} = \{V(x,\theta): \ \theta \in \Theta\}$, удовлетворяющее условиям

(i) *$V(x,\theta)=0$ при $x<0$, $\theta\in\Theta$;*

(ii) *для любого $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^r)$*

$$F_\theta(A)=\int_0^\infty \Phi_{u^{-1}\Sigma}(A)d_uV(u,\theta),\quad x\in\mathbb{R}^1,\quad \theta\in\Theta;$$

(iii) $\mathsf{P}_\theta(N_n<nx)\Longrightarrow V(x,\theta)$, *$n\to\infty$, $\theta\in\Theta$.*

При этом, если функции распределения случайных величин N_n не зависят от θ, то не зависят от θ и функции распределения $V(x,\theta)$, то есть семейство $\mathcal{V}$ состоит из единственного элемента.

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать утверждение для какого-нибудь одного значения θ. Для остальных θ доказательство будет повторено дословно. Поэтому в нижеследующих рассуждениях индекс θ у вероятностных мер, распределений и соответствующих математических ожиданий будет опускаться.

Достаточность. При доказательстве мы будем существенно опираться на Теорему 12.4.1. Для каждого $n\geq 1$ положим $S_n=T_{N_n}-t(\theta)$, $a_n=c_n=0$, $B_n^{-1}=D_n^{-1}=\sqrt{n}I_r$. Для удобства обозначений введем случайную величину U с функцией распределения $V(x,\theta)$. Заметим, что условия теоремы гарантируют слабую относительную компактность последовательности случайных величин

$$\|D_n^{-1}B_{N_n}\|=\sqrt{\frac{n}{N_n}},\quad n=1,2,\ldots$$

вследствие ее слабой сходимости к случайной величине $1/\sqrt{U}$. Это обусловлено тем, что точка $x\geq 0$ является точкой непрерывности функции распределения некоторой неотрицательной случайной величины X тогда и только тогда, когда точка $1/x$ является точкой непрерывности функции распределения случайной величины $1/X$ (для определенности можно считать, что $1/0=+\infty$ в силу неотрицательности случайной величины X). Далее, в рассматриваемом случае $W_n(g)=\sqrt{n/N_n}g$, $g\in\mathbb{R}^r$. Поэтому условие $N_n/n\Longrightarrow U$ влечет $W_n(g)\Longrightarrow U^{-1/2}g$ для всех $g\in\mathbb{R}^r$. Условие (12.4.1) означает, что в рассматриваемом случае $H=\Phi_\Sigma$. Поэтому по Теореме 12.4.1 $Z_n\Longrightarrow U^{-1/2}Y$, где Y – случайный элемент с распределением Φ_Σ, независимый от случайной величины U. Несложно убедиться, что распределение случайного элемента $U^{-1/2}Y$ совпадает с $\mathsf{E}\Phi_{U^{-1}\Sigma}(\cdot)$, где матрица Σ удовлетворяет условию (12.4.1).

Необходимость. Пусть выполнено условие (12.4.6). Убедимся в слабой относительной компактности последовательности случайных величин $\{\|D_n^{-1}B_{N_n}\|\}_{n\geq 1}$. Пусть Y – случайный элемент с распределением

Φ_Σ. Существуют такие числа $\delta > 0$ и $R > 0$, что

$$\mathsf{P}(\|Y\| > R) > \delta. \tag{12.4.7}$$

Для выбранного таким образом R и произвольного $x > 0$ имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\|\sqrt{n}S_n\| > x) &\geq \mathsf{P}(\|\sqrt{n}S_n\| > x;\ \|\sqrt{N_n}S_n\| > R) = \\ &= \mathsf{P}\left(\sqrt{\frac{n}{N_n}} > \frac{x}{\|\sqrt{N_n}S_n\|};\ \|\sqrt{N_n}S_n\| > R\right) \geq \\ &\geq \mathsf{P}\left(\sqrt{\frac{n}{N_n}} > \frac{x}{R};\ \|\sqrt{N_n}S_n\| > R\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(N_n = k)\mathsf{P}\left(\sqrt{\frac{n}{k}} > \frac{x}{R};\ \|T_k\| > R\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(N_n = k)\mathsf{P}\left(\sqrt{\frac{n}{k}} > \frac{x}{R}\right)\mathsf{P}\left(\|T_k\| > R\right)\end{aligned} \tag{12.4.8}$$

(последнее равенство имеет место, поскольку любая константа независима от любой случайной величины). Так как в силу условия (12.4.1) имеет место сходимость $T_k \Longrightarrow Y$ $(k \to \infty)$, то из (12.4.7) вытекает существование такого номера $k_0 = k_0(R, \delta)$, что для всех $k > k_0$

$$\mathsf{P}(\|T_k\| > R) > \frac{\delta}{2}.$$

Поэтому, продолжив (12.4.8), мы получим

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\|\sqrt{n}S_n\| > x) &\geq \frac{\delta}{2}\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\mathsf{P}(N_n = k)\mathsf{P}\left(\sqrt{\frac{n}{k}} > \frac{x}{R}\right) = \\ &= \frac{\delta}{2}\left[\mathsf{P}\left(\sqrt{\frac{n}{N_n}} > \frac{x}{R}\right) - \sum_{k=1}^{k_0}\mathsf{P}(N_n = k)\mathsf{P}\left(\sqrt{\frac{n}{k}} > \frac{x}{R}\right)\right] \geq \\ &\geq \frac{\delta}{2}\left[\mathsf{P}\left(\sqrt{\frac{n}{N_n}} > \frac{x}{R}\right) - \mathsf{P}(N_n \leq k_0)\right].\end{aligned} \tag{12.4.9}$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\left(\sqrt{\frac{n}{N_n}} > \frac{x}{R}\right) \leq \frac{2}{\delta}\mathsf{P}(\|\sqrt{n}S_n\| > x) + \mathsf{P}(N_n \leq k_0). \tag{12.4.10}$$

Из условия $N_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ при $n \to \infty$ следует, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое $n_0 = n_0(\epsilon)$, что $\mathsf{P}(N_n \leq n_0) < \epsilon$ для всех $n \geq n_0$.

Поэтому с учетом слабой относительной компактности последовательности $\{\sqrt{n}S_n\}_{n\geq 1}$, вытекающей из ее слабой сходимости к случайному элементу Z вследствие условия (12.4.6), соотношение (12.4.10) влечет

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\geq n_0(\epsilon)}\mathsf{P}\left(\sqrt{\frac{n}{N_n}}>\frac{x}{R}\right)\leq\epsilon, \tag{12.4.11}$$

каким бы ни было $\epsilon>0$. Предположим теперь, что последовательность

$$\|D_n^{-1}B_{N_n}\|=\sqrt{\frac{n}{N_n}},\quad n=1,2,\ldots$$

не является слабо относительно компактной. В этом случае существует число $\alpha>0$ и последовательности $\mathcal{N}$ натуральных и $\{x_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ вещественных чисел, удовлетворяющие условиям $x_n\uparrow\infty$ $(n\to\infty,\ n\in\mathcal{N})$ и

$$\mathsf{P}\left(\sqrt{\frac{n}{N_n}}>x_n\right)>\alpha,\quad n\in\mathcal{N}. \tag{12.4.12}$$

Но согласно (12.4.11) для любого $\epsilon>0$ можно указать такие числа $M=M(\epsilon)$ и $n_0=n_0(\epsilon)$, что

$$\sup_{n\geq n_0(\epsilon)}\mathsf{P}\left(\sqrt{\frac{n}{N_n}}>M(\epsilon)\right)\leq 2\epsilon. \tag{12.4.13}$$

Выберем $\epsilon<\alpha/2$, где α – число из (12.4.12). Тогда для всех достаточно больших $n\in\mathcal{N}$ согласно (12.4.12) должно выполняться неравенство, противоположное (12.4.13). Полученное противоречие по теореме Прохорова доказывает слабую относительную компактность последовательности $\{\|D_n^{-1}B_{N_n}\|\}_{n\geq 1}$ или, что в данном случае то же самое, последовательности $\{n/N_n\}_{n\geq 1}$.

Введем множество $\mathcal{W}(Z)$, содержащие все неотрицательные случайные величины U' такие, что $\mathsf{P}(Z\in A)=\mathsf{E}\Phi_{U'\Sigma}(A)$ для любого $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^r)$. Пусть $L(\cdot,\cdot)$ – метрика Леви в пространстве случайных величин или, что то же самое, в пространстве функций распределения (если X_1 и X_2 – случайные величины с функциями распределения F_1 и F_2 соответственно, то мы отождествляем $L(X_1,X_2)$ и $L(F_1,F_2)$). Покажем, что существует последовательность случайных величин $\{U'_n\}_{n\geq 1}$, $U'_n\in\mathcal{W}(Z)$, такая, что

$$L\Big(\frac{n}{N_n},U'_n\Big)\to 0\ \ (n\to\infty). \tag{12.4.14}$$

Обозначим

$$\beta_n=\inf\Big\{L\Big(\frac{n}{N_n},U'\Big):\ U'\in\mathcal{W}(Z)\Big\}.$$

Покажем, что $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Предположим противное. В таком случае $\beta_n \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех n из некоторой подпоследовательности $\mathcal{N}$ натуральных чисел. Выберем подпоследовательность $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}$ так, чтобы последовательность $\{n/N_n\}_{n\in\mathcal{N}_1}$ слабо сходилась к некоторой случайной величине U' (это можно сделать в силу установленной выше слабой относительной компактности семейства $\{n/N_n\}_{n\geq 1}$). Но с помощью рассуждений, приведенных при доказательстве достаточности, мы заключаем, что $n/N_n \Longrightarrow U'$ ($n \to \infty$, $n \in \mathcal{N}_1$) тогда и только тогда, когда $N_n/n \Longrightarrow U$ ($n \to \infty$, $n \in \mathcal{N}_1$), где случайная величина U распределена так же, как $1/U'$. Но тогда $W_n(g) \Longrightarrow \sqrt{U'}g$ ($n \to \infty$, $n \in \mathcal{N}_1$) для любого $g \in \mathbb{R}^r$. Применив Теорему 12.4.1 к $n \in \mathcal{N}_1$ с учетом условия (12.4.2), выполненного в силу (12.4.1), убеждаемся, что $U' \in \mathcal{W}(Z)$, поскольку условие (12.4.6) гарантирует совпадение пределов всех слабо сходящихся подпоследовательностей. Таким образом, мы пришли к противоречию с предположением о том, что $\beta_n \geq \delta$ для всех $n \in \mathcal{N}_1$. Следовательно, $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ выберем случайную величину U'_n из $\mathcal{W}(Z)$, для которой выполнено условие

$$L\Big(\frac{n}{N_n}, U'_n\Big) \leq \beta_n + \frac{1}{n}.$$

Эта последовательность, очевидно, удовлетворяет условию (12.4.14). Теперь рассмотрим структуру множества $\mathcal{W}(Z)$. Это множество состоит из случайных величин, определяющих семейство специальных смесей многомерных нормальных законов, о котором шла речь в разделе 12.4.2. Но по Лемме 12.4.1 это семейство идентифицируемо, так что, каков бы ни был случайный элемент Z, множество $\mathcal{W}(Z)$ состоит не более чем из одного элемента. Поэтому на самом деле условие (12.4.14) эквивалентно тому, что

$$\frac{n}{N_n} \Longrightarrow U' \quad (n \to \infty),$$

что в свою очередь, как уже было отмечено, эквивалентно условию

$$\frac{N_n}{n} \Longrightarrow U \quad (n \to \infty),$$

то есть условию (iii) теоремы. Теорема доказана.

Следствие 12.4.1. *В условиях Теоремы* 12.4.2 *статистика* T_{N_n} *асимптотически нормальна с некоторой асимптотической ковариационной матрицей* Σ' *если и только если существует число* $c > 0$ *такое, что*

$$\frac{N_n}{n} \Longrightarrow c \ \ (n \to \infty).$$

Более того, в таком случае $\Sigma' = c^{-1}\Sigma$.

Данное утверждение немедленно вытекает из Теоремы 12.4.2 с учетом Леммы 12.4.1.

Пример 12.4.1. *Многомерное распределение Стьюдента* описано, например, в книге (Де Гроот, 1974). Рассмотрим r-мерный нормальный случайный вектор Y с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей Σ. Пусть случайная величина W_γ имеет распределение хи-квадрат с параметром ("числом степеней свободы") $\gamma > 0$ (необязательно целым) и независима от случайного вектора Y. Распределение случайного вектора

$$Z = \sqrt{\gamma/W_\gamma} \cdot Y$$

называется *многомерным распределением Стьюдента*. Для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ плотность распределения случайного вектора Z имеет вид

$$p_{\gamma,\Sigma}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(r+\gamma)/2)}{|\Sigma|^{1/2}\Gamma(\gamma/2)(\pi\gamma)^{r/2}} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{\gamma}\mathbf{x}^\top\Sigma^{-1}\mathbf{x})^{(r+\gamma)/2}}.$$

Согласно Теореме 12.4.2 в многомерное распределение Стьюдента трансформируется предельное распределение статистики, являющейся асимптотически нормальной в смысле (12.4.1) при неслучайном объеме выборки, если объем выборки является случайной величиной, имеющей асимптотическое распределение хи-квадрат. Примеры таких случайных величин будут подробно рассмотрены в следующей главе.

12.5 Анализ случайных рисков с помощью центральных и промежуточных порядковых статистик

12.5.1 Асимптотическое распределение выборочных квантилей, построенных по выборке случайного объема

Примеры асимптотически нормальных статистик хорошо известны. Это и выборочные моменты, и оценки максимального правдоподобия, и многие другие. Не тратя зря объем данной книги, мы рассмотрим здесь лишь условия существования предельного распределения выборочных квантилей, построенных по выборке случайного объема. Задача оценивания квантилей представляет собой исключительный интерес при вычислении такой меры риска как VaR, см. выше. Данный раздел основан на работе (Королев, 1999).

Пусть $n \geq 1$, $X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с общей плотностью распределения $p(x)$, а $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ – соответствующий вариационный ряд, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$. Пусть $r \geq 1$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ – некоторые числа такие, что $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_r < 1$. Квантили порядков $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ с.в. X_1 мы будем обозначать ξ_{λ_i}, $i = 1, \ldots, r$. Выборочными квантилями порядков $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ принято называть случайные величины $X_{([\lambda_i n]+1)}$, $i = 1, \ldots, r$, где символ $[a]$ обозначает целую часть числа a. Следующий результат Мостеллера (Mosteller, 1946) (см. также (Дэйвид, 1979), раздел 9.2) является классическим. Обозначим $Y^*_{n,j} = \sqrt{n}(X_{([\lambda_j n]+1)} - \xi_{\lambda_j})$, $j = 1, \ldots, r$

Теорема 12.4.3. *Если $p(x)$ дифференцируема в окрестностях квантилей ξ_{λ_i} и $p(\xi_{\lambda_i}) \neq 0$, $i = 1, \ldots, r$, то совместное распределение нормированных выборочных квантилей $Y^*_{n,1}, \ldots, Y^*_{n,r}$ при $n \to \infty$ слабо сходится к r-мерному нормальному распределению с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $\Sigma = (\sigma_{ij})$,*

$$\sigma_{ij} = \frac{\lambda_i(1-\lambda_j)}{p(\xi_{\lambda_i})p(\xi_{\lambda_j})}, \quad i \leq j.$$

В данном разделе мы укажем условия существования предельного распределения выборочных квантилей, построенных по выборке случайного объема, и опишем вид этого предельного распределения при замене объема выборки случайной величиной. В связи с этим рассмотрим последовательность $X_1, X_2 \ldots$ — независимых одинаково распределенных с.в. с общей плотностью распределения $p(x)$. Пусть $\{N_n\}_{n\geq 1}$ — последовательность целочисленных неотрицательных с.в. таких, что при каждом $n \geq 1$ с.в. N_n и $X_1, X_2 \ldots$ независимы. Ниже мы рассмотрим асимптотику распределения случайных величин $X_{([\lambda_i N_n]+1)}$, $i = 1, \ldots, r$ при $n \to \infty$ в предположении, что $N_n \to \infty$ по вероятности.

Кратко остановимся на истории рассматриваемой задачи. Б. В. Гнеденко, С. Стоматович и А. Шукри (Гнеденко, Стоматович и Шукри, 1984) получили достаточные условия сходимости распределений выборочной медианы, построенной по выборкам случайного объема. В кандидатской диссертации А. К. Шукри эти условия распространены на выборочные квантили произвольного порядка. В работах (Королев и Селиванова, 1994) и (Селиванова, 1995) получены необходимые и достаточные условия слабой сходимости одномерных распределений выборочных квантилей в выборках случайного объема. Наконец, в заметке (Королев, 1995) приведены необходимые и достаточные условия слабой сходимости одномерных распределений произвольных статистик, построенных по выборкам случайного объема, в предположении, что рассматриваемые статистики асимптотически нормальны при неслучайном объеме выборки.

Цель данного подраздела – привести необходимые и достаточные условия слабой сходимости *совместных* распределений выборочных квантилей, построенных по выборкам случайного объема, и описать возникающие при этом r-мерные предельные законы, распространив тем самым Теорему 12.4.3 Мостеллера на выборки со случайным объемом.

В дополнение к обозначениям, введенным в разделе 1, положим $Q_{n,j} = X_{([\lambda_j N_n]+1)}$, $j = 1, \ldots, r$, $Q_n = (Q_{n,1}, \ldots, Q_{n,r})$, $\xi = (\xi_{\lambda_1}, \ldots, \xi_{\lambda_r})$, $Z_n = \sqrt{n}(Q_n - \xi)$. Основным результатом данного подраздела является следующее утверждение.

Теорема 12.4.4. *Пусть* $N_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ *при* $n \to \infty$. *Если* $p(x)$ *дифференцируема в окрестностях квантилей* ξ_{λ_i} *и* $p(\xi_{\lambda_i}) \neq 0$, $i = 1, \ldots, r$, *то для сходимости*

$$Z_n \Longrightarrow Z \qquad (n \to \infty)$$

к некоторому случайному элементу Z *необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неотрицательная случайная величина* U, *что*

$$\mathsf{P}(Z \in A) = \mathsf{E}\Phi_{U^{-1}\Sigma}(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^r),$$

где $\Sigma = (\sigma_{ij})$,

$$\sigma_{ij} = \frac{\lambda_i(1 - \lambda_j)}{p(\xi_{\lambda_i})p(\xi_{\lambda_j})}, \quad i \leq j,$$

и

$$\frac{N_n}{n} \Longrightarrow U \quad (n \to \infty).$$

Доказательство этого результата основано на Теореме 12.4.2. При этом условие (12.4.1) выполнено вследствие Теоремы 12.4.3 Мостеллера.

Следствие 12.4.2. *В условиях Теоремы* 12.4.4 *совместное распределение нормированных выборочных квантилей* $\sqrt{n}(X_{([\lambda_j N_n]+1)} - \xi_{\lambda_j})$, $j = 1, \ldots, r$, *слабо сходится к* r*-мерному нормальному закону с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей* Σ, *определенной в Теореме* 12.4.3, *если и только если*

$$\frac{N_n}{n} \Longrightarrow 1 \quad (n \to \infty).$$

Пусть $0 < \lambda < 1$, ξ_λ *– квантиль случайной величины* X_1 *порядка* λ. *Стандартную нормальную функцию распределения обозначим* $\Phi(x)$.

Следствие 12.4.3. *Предположим, что плотность $p(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки ξ_λ, $p(\xi_\lambda) > 0$ и $N_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ при $n \to \infty$. Тогда для того чтобы нормированная выборочная квантиль порядка λ, построенная по выборке случайного объема N_n, имела предельное распределение при $n \to \infty$:*

$$\frac{\sqrt{n}p(\xi_\lambda)}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}(X_{([\lambda N_n]+1)} - \xi_\lambda) \Longrightarrow Z \quad (n \to \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неотрицательная случайная величина U, что

$$\mathsf{P}(Z < x) \equiv \mathsf{E}\Phi(\sqrt{U}x)$$

и

$$\frac{N_n}{n} \Longrightarrow U \quad (n \to \infty).$$

Это утверждение, впервые доказанное в работе (Королев и Селиванова, 1994) и приведенное также в (Селиванова, 1995), является частным случаем Теоремы 12.4.4.

12.5.2 Предельные теоремы для промежуточных порядковых статистик, построенных по выборкам случайного объема

Стандартные методы расчета некоторых показателей надежности функционирования сложных технических систем применимы лишь тогда, когда система работает в стационарном режиме. Однако реально режим функционирования многих систем, рассматриваемый как функция времени, иногда испытывает некоторые колебания, имеет нестационарности, которые могут быть вызваны многими причинами, связанными с воздействием внутренних и внешних факторов риска. Например, режим функционирования оборудования систем связи явно имеет периодические компоненты, связанные, например, с сезонными изменениями температуры, влажности и других внешних параметров. Кроме того, участки нестационарности могут быть вызваны некоторыми случайно возникающими (не поддающимися абсолютно надежному прогнозированию) причинами, например, вандализмом. Мы опишем математическую модель, позволяющую учесть нестационарность в режиме функционирования сложных технических систем, обусловленную стохастическим характером интенсивности потоков экстремальных событий, определяющих изменения надежностных характеристик и/или ведущих к отказам оборудования. Использование этой модели приводит к выводу о том, что указанные выше нестационарности могут существенно влиять на аналитические оценки показателей надежности.

Как уже говорилось выше, неоднородные хаотические потоки "шоковых" событий, влияющих на работоспособность оборудования, естественно моделировать при помощи процессов Кокса, определяемых как суперпозиции $N(t) = N_1(\Lambda(t))$, $t \geq 0$, стандартного пуассоновского процесса (однородного пуассоновского процесса с единичной интенсивностью) $N_1(t)$ и независимого от него случайного процесса $\Lambda(t)$, имеющего почти наверное конечные неограниченно возрастающие непрерывные справа траектории, выходящие из нуля.

Аппаратура, применяемая в сложных технических системах на современном уровне развития технологии, как правило, обладает высокой надежностью и устойчивостью к однократным шоковым воздействиям. Другими словами, однократное шоковое воздействие не выводит аппаратуру из строя. Однако неблагоприятное воздействие шоков может сказываться в некотором изменении параметров аппаратуры, незначительном ухудшении ее надежностных характеристик, и, в принципе, узел (агрегат), изначально обладающий очень высокой надежностью, может выйти из строя после многократного шокового воздействия. Математическое описание результата многократного шокового воздействия на высоконадежную аппаратуру имеет следующий вид.

По выборке $X_1, \ldots, X_{N(t)}$ значений шоковых воздействий, зафиксированных на интервале времени $[0, t]$ построим вариационный ряд $X_{N(t):1}, \ldots, X_{N(t):N(t)}$. Пусть $k(n)$ – натуральнозначная функция натурального аргумента такая, что $k(n) \to \infty$ и $k(n)/n \to 0$ (или $n - k(n) \to \infty$, $k(n)/n \to 1$) при ($n \to \infty$). Значение $k(n)$ (или $n - k(n)$) имеет смысл такого числа шоковых воздействий большой величины, которое выводит аппаратуру из строя. При этом условие $k(n) \to \infty$ по сути соответствует представлению о высоконадежной аппаратуре как о такой, для выведения из стоя которой требуется очень много шоковых воздействий. Условие $k(n)/n \to 0$ означает, что количество больших, критических шоков хоть и велико по абсолютной величине, но все же мало́ по сравнению с общим числом шоков, зарегистрированных за рассматриваемый период времени, что опять-таки согласуется с представлением о высоконадежной аппаратуре как о такой, которая может противостоять очень большому числу шоковых воздействий. Таким образом, критическим для высоконадежной аппаратуры является значение порядковых статистик $X_{N(t):k(N(t))}$ с функцией $k(N(t))$, обладающей указанными выше свойствами. Такие порядковые статистики называются порядковыми статистиками с промежуточными рангами. Мы будем рассматривать асимптотическое поведение величин $X_{N(t):k(N(t))}$ при

$t \to \infty$. Этот случай менее всего изучен теоретически.

Теорема 12.4.5. *Пусть* $k(n) = [Cn^\alpha]$, $C > 0$, $0 < \alpha < 1$. *Предположим, что существуют неслучайные функции* $a(t) > 0$, $b(t)$ *и* $d(t)$ *такие, что* $d(t)$ – *натуральнозначная,* $d(t) \to \infty$ *и случайная величина* $(X_{d(t):k(d(t))} - b(t))/a(t)$ *при* $t \to \infty$ *имеет некоторое предельное распределение, скажем,* $G(x)$. *Предположим, что существует случайная величина* Λ *такая, что* $\mathsf{P}(\Lambda > 0) = 1$ *и*

$$\Lambda(t)/d(t) \Longrightarrow \Lambda \qquad (t \to \infty).$$

Тогда для каждого $x \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}\Big(\frac{X_{N(t):k(M(t))} - b(t)}{a(t)} < x\Big) \longrightarrow H(x) \qquad (t \to \infty),$$

где $M(t) = (N(t))^{1/\alpha}(d(t))^{1-1/\alpha}$. *Функция распределения* $H(x)$ *имеет вид* $H(x) = \mathsf{E}\Phi(\sqrt{\Lambda}u(x))$, *а функция* $u(x)$ *однозначно определяется функцией* $G(x)$ *и с точностью до сдвига и масштаба может иметь только три формы:*

$$u_1(x) = \begin{cases} -\infty, & x \le 0, \\ \beta \ln x, & x > 0; \end{cases} \qquad u_2(x) = \begin{cases} -\beta \ln |x|, & x < 0, \\ +\infty, & x \ge 0; \end{cases} \qquad u_3(x) \equiv x$$

где $\beta > 0$.

Этот результат, полученный в работе (Королев, Здоровцов и Сурков, 2002), исправляет теорему, приведенную в работе (Шериф, 1983). При этом Теорема 12.4.5 отличается по форме от приведенной в статье (Азларов и др., 1991) и приводит не к сдвиговым (как в (Азларов и др., 1991)), а к специальным масштабным смесям нормальных законов.

Последнее обстоятельство позволяет сделать вывод, основанный на следующей простой лемме, доказываемой с помощью неравенства Иенсена.

Лемма 12.4.2. *Предположим, что случайная величина* Λ *удовлетворяет условию нормировки* $\mathsf{E}\sqrt{\Lambda} = 1$ *(сохраняющему масштаб). Тогда*

$$1 - \mathsf{E}\Phi(\sqrt{\Lambda}u(x)) \ge 1 - \Phi(u(x)), \quad x > 0.$$

Из этой леммы вытекает, что $1 - G(x) \le 1 - H(x)$ при $x > 0$, что означает, что классическая теория порядковых статистик с промежуточными рангами *недооценивает* риски катастрофических шоков по сравнению с подходом, рассматриваемым в данном разделе.

Применение приведенных выше результатов к анализу надежности волоконно-оптических линий связи железнодорожного транспорта России описано в монографии (Здоровцов и Королев, 2004).

12.6 О распределении Стьюдента как альтернативе нормальному и другим устойчивым законам в статистике

В этой главе мы, используя результаты и методы, изложенные выше, развиваем идеи раздела 12.4.

12.6.1 Распределение Стьюдента как масштабная смесь нормальных законов

Как известно, распределением Стьюдента называется абсолютно непрерывное распределение вероятностей, задаваемое плотностью

$$p_\gamma(x) \;=\; \frac{\Gamma((\gamma+1)/2)}{\sqrt{\pi\gamma}\Gamma(\gamma/2)}\Big(1+\frac{x^2}{\gamma}\Big)^{-\frac{\gamma+1}{2}}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{12.5.1}$$

Здесь $\gamma > 0$ – параметр, $\Gamma(\,\cdot\,)$ – эйлерова гамма-функция,

$$\Gamma(z) \;=\; \int\limits_0^\infty e^{-y}y^{z-1}dy, \quad z > 0.$$

В частности, при $\gamma = 1$ плотность (12.5.1) имеет вид

$$p_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty,$$

что соответствует распределению Коши. Несложно видеть, что у распределения Стьюдента с параметром γ отсутствуют моменты порядка $\delta \ge \gamma$.

Если $\gamma = n$ – натуральное число, $X, X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины, имеющие одно и то же стандартное нормальное распределение, то, как известно, случайная величина

$$Y \;=\; \frac{\sqrt{n}\cdot X}{\sqrt{X_1^2+\ldots+X_n^2}} \tag{12.5.2}$$

имеет распределение Стьюдента с параметром n, который в таком случае называется *числом степеней свободы*. На представлении (12.5.2) основан критерий проверки гипотез о среднем значении нормальных выборок, предложенный в 1908 г. У. С. Госсеттом (W. S. Gossett), который подписал свою статью “*On the probable error of the mean*” псевдонимом “Student” (Student, 1908).

Как известно, случайная величина $X_1^2 + \ldots + X_n^2$, фигурирующая в (12.5.2), имеет распределение хи-квадрат с n степенями свободы, задаваемое плотностью

$$h_n(x) = \frac{x^{n/2}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}, \quad x > 0.$$

Пусть $G_{\alpha,\lambda}(x)$ – функция гамма-распределения с параметром формы α и параметром масштаба λ,

$$G_{\alpha,\lambda}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int\limits_0^x e^{-\lambda y} y^{\alpha-1} dy & \text{при } x > 0. \end{cases} \tag{12.5.3}$$

Несложно видеть, что распределение хи-квадрат с n степенями свободы является гамма-распределением с параметром формы $\alpha = \frac{n}{2}$ и параметром масштаба $\lambda = \frac{1}{2}$. Следовательно, в представлении (12.5.2) случайная величина $\frac{1}{n}(X_1^2 + \ldots + X_n^2)$ имеет гамма-распределением с параметром формы $\alpha = \frac{n}{2}$ и параметром масштаба $\lambda = \frac{n}{2}$. При этом по теореме Фубини из представления (12.5.2) вытекает возможность записать функцию распределения Стьюдента $P_n(x)$ с n степенями свободы, $P_n(x) = \int_{-\infty}^x p_n(y)dy$, в виде

$$P_n(x) = \mathsf{P}(Y < x) = \mathsf{P}\Big(X < x\sqrt{\tfrac{1}{n}(X_1^2 + \ldots + X_n^2)}\Big) =$$

$$= \int\limits_0^\infty \Phi(x\sqrt{y}) dG_{n/2,n/2}(u) = \mathsf{E}\Phi(x\sqrt{U_{n/2}}), \quad -\infty < x < \infty, \tag{12.5.4}$$

где $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения, а случайная величина $U_{n/2}$ имеет гамма-распределением с параметром формы $\alpha = \frac{n}{2}$ и параметром масштаба $\lambda = \frac{n}{2}$. Таким образом, распределение Стьюдента с целочисленным параметром $\gamma = n$ принадлежит к семейству масштабных смесей нормальных законов.

12.6.2 Распределение Стьюдента как асимптотическая аппроксимация

Общеизвестна важная роль, которую распределение Стьюдента играет в математической статистике при анализе нормальных выборок. Здесь параметр γ тесно связан с объемом выборки и принимает натуральные значения. Однако можно сказать, что в таких задачах роль распределения Стьюдента в значительной мере вспомогательна, оно является в определенном смысле абстрактной, идеальной теоретической моделью.

Вместе с тем, в описательной статистике распределение Стьюдента практически не используется в качестве аналитической модели, “подгоняемой” к экспериментальным данным[1]. Лишним подтверждением этого служит то обстоятельство, что ни в одном руководстве по теории (или практике) статистического оценивания не рассматривается задача оценивания параметра распределения Стьюдента.

По-видимому, недостаточное доверие прикладных статистиков к распределению Стьюдента как к модели, описывающей статистическое поведение реальных данных, связано с тем, что, в отличие от, скажем, нормального или пуассоновского распределений, фигурирующих в качестве предельных соответственно в центральной предельной теореме и теореме Пуассона о редких событиях, распределение Стьюдента не считается асимптотической аппроксимацией. В прикладной математике вообще и в статистике в частности, принято считать, что адекватной может быть лишь та аналитическая модель, в основе которой лежит какая-либо предельная теорема с довольно простыми и общими условиями, в то время как та асимптотическая схема, которая используется для обоснования возможности применения распределения Стьюдента в качестве предельной аппроксимации (в тех редких случаях, когда распределение Стьюдента используется в таком качестве) и связана с его безграничной делимостью (кстати, установленной сравнительно недавно), довольно сложна. А именно, известно, что любое безгранично делимое распределение может быть слабым пределом для распределений сумм независимых равномерно предельно малых случайных величин. Поэтому в принципе, если при статистическом анализе реальных данных можно предположить, что каждое наблюдение является результатом суммарного воздействия большого числа случайных факторов, которые вносят примерно одинаковый (в определенном смысле) вклад в наблюдаемое значение, то при выполнении условий, гарантирующих сходимость распределений сумм независимых равномерно предельно малых случайных величин к распределению Стьюдента, последнее вполне может быть использовано в качестве модели, описывающей статистическое поведение экспериментальных данных. Однако упомянутые условия формулируются в терминах элементов так называемого канонического представления безгранично делимой характеристической функции и имеют сложный вид, что серьезно затрудняет их практическую проверку. В результате в рамках такого подхода до

[1] Лишь относительно недавно появились работы, в которых распределение Стьюдента применяется (впрочем, без надлежащего теоретического обоснования) для описания динамики некоторых финансовых индексов, в частности, приращений логарифмов биржевых цен. В первую очередь здесь следует упомянуть работы П. Прэтца (Praetz, 1972) и Р. Блаттберга и Н. Гоундса (Blattberg and Gonedes, 1974).

сих пор не удалось найти достаточного обоснования возможности более или менее широкого применения распределения Стьюдента в задачах описательной статистики.

Следует особо подчеркнуть, что распределение Стьюдента в силу относительной простоты представления (12.5.1) могло бы быть удобной аналитической моделью, описывающей вероятностно-статистические свойства больших рисков, так как оно имеет более тяжелые хвосты, нежели нормальный закон. Например, оно могло бы стать удобной альтернативой устойчивым законам, часто применяемым в таком качестве (см., например, (Золотарев, 1983), (Uchaikin and Zolotarev, 1999)). Преимущество распределения Стьюдента перед устойчивыми моделями заключается, например, в том, что статистический анализ стьюдентовских моделей намного проще, так как для них функция правдоподобия выписывается в явном виде в терминах элементарных функций, в то время как для устойчивых законов это невозможно (за четырьмя исключениями). Вместе с тем, для $0 < \gamma \leq 2$ асимптотическое поведение хвостов распределения Стьюдента (при $|x| \to \infty$) совпадает с аналогичным поведением хвостов устойчивых законов.

Легко убедиться, что, в отличие от устойчивых законов, максимум плотности распределения Стьюдента стремится к нулю при все большем и большем "утяжелении" хвостов. Поэтому распределение Стьюдента с "числом степеней свободы", близким к нулю, может считаться аналогом равномерного распределения для случая бесконечного носителя.

В этом разделе мы укажем довольно простую асимптотическую схему, непосредственно приводящую к распределению Стьюдента как к предельному, и, как следствие, дадим обоснование возможности более широкого использования распределения Стьюдента в задачах описательной статистики. Материал данного раздела основан на работе (Бенинг и Королев, 2003).

12.6.3 Вспомогательные утверждения

Наши дальнейшие рассуждения будут основаны на двух следующих леммах.

Рассмотрим случайные величины $N_1, N_2, \ldots, X_1, X_2, \ldots$, определенные на одном и том же измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$. Пусть на $\mathcal{A}$ задано семейство вероятностных мер $\{\mathsf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$. Предположим, что при каждом $n \geq 1$ случайная величина N_n принимает только натуральные значения и независима от последовательности $X_1, X_2, \ldots$ относительно каждой из семейства мер $\{\mathsf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$. Пусть $T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n)$ –

некоторая статистика, то есть измеримая функция от случайных величин $X_1, \ldots, X_n$. Для каждого $n \geq 1$ определим случайную величину T_{N_n}, положив $T_{N_n}(\omega) = T_{N_n(\omega)}\Big(X_1(\omega), \ldots, X_{N_n(\omega)}(\omega)\Big)$ для каждого элементарного исхода $\omega \in \Omega$. Будем говорить, что статистика T_n асимптотически нормальна, если существуют функции $\delta(\theta)$ и $t(\theta)$ такие, что при каждом $\theta \in \Theta$

$$\mathsf{P}_\theta\Big(\delta(\theta)\sqrt{n}(T_n - t(\theta)) < x\Big) \Longrightarrow \Phi(x) \quad (n \to \infty). \tag{12.5.5}$$

Примеры асимптотически нормальных статистик хорошо известны. Свойством асимптотической нормальности обладают, например, выборочное среднее (при условии существования дисперсий), центральные порядковые статистики или оценки максимального правдоподобия (при достаточно общих условиях регулярности) и многие другие статистики.

Лемма 12.5.1. *Пусть $\{d_n\}_{n\geq 1}$ – некоторая неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел. Предположим, что $N_n \to \infty$ по вероятности при $n \to \infty$ относительно каждой вероятности из семейства $\{\mathsf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$. Пусть статистика T_n асимптотически нормальна в смысле* (12.5.5). *Для того чтобы при каждом $\theta \in \Theta$ существовала такая функция распределения $F(x, \theta)$, что*

$$\mathsf{P}_\theta\left(\delta(\theta)\sqrt{d_n}(T_{N_n} - t(\theta)) < x\right) \Longrightarrow F(x, \theta) \quad (n \to \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало семейство функций распределения $\mathcal{H} = \{H(x, \theta) :\ \theta \in \Theta\}$, удовлетворяющее условиям

$$H(x, \theta) = 0, \quad x < 0, \quad \theta \in \Theta;$$

$$F(x, \theta) = \int_0^\infty \Phi\Big(\, x\sqrt{y}\,\Big) d_y H(y, \theta), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \Theta;$$

$$\mathsf{P}_\theta(N_n < d_n x) \Longrightarrow H(x, \theta), \quad n \to \infty, \quad \theta \in \Theta.$$

При этом, если функции распределения случайных величин N_n не зависят от θ, то не зависят от θ и функции распределения $H(x, \theta)$, то есть семейство $\mathcal{H}$ состоит из единственного элемента.

Доказательство. Данная лемма по сути лишь переобозначениями отличается от Теоремы 3 из (Королев, 1995), доказательство которой, в свою очередь, основано на общих теоремах о сходимости суперпозиций независимых случайных последовательностей (Королев, 1994), (Королев, 1996). Эту лемму также легко получить из Теоремы 5.2, доказанной намного позже упомянутых работ.

Пусть $N_{p,r}$ – случайная величина, имеющая отрицательное биномиальное распределение,

$$\mathsf{P}(N_{p,r}=k) \;=\; C^{k-1}_{r+k-2}p^r(1-p)^{k-1}, \qquad k=1,2,\ldots \tag{12.5.6}$$

Здесь $r>0$ и $p\in(0,1)$ – параметры, и для нецелых r величина C^{k-1}_{r+k-2} определяется как

$$C^{k-1}_{r+k-2} \;=\; \frac{\Gamma(r+k-1)}{(k-1)!\cdot\Gamma(r)}.$$

В частности, при $r=1$ соотношение (12.5.6) задает геометрическое распределение. Известно, что

$$\mathsf{E}N_{p,r} \;=\; \frac{r(1-p)+p}{p},$$

так что $\mathsf{E}N_{p,r}\to\infty$ при $p\to 0$.

Отрицательное биномиальное распределение с натуральным r допускает наглядную интерпретацию в терминах испытаний Бернулли. А именно, случайная величина с распределением (12.5.6) – это число испытаний Бернулли, проведенных до осуществления r-й по счету неудачи, если вероятность успеха в одном испытании равна $1-p$.

Лемма 12.5.2. *Для любого фиксированного* $r>0$

$$\lim_{p\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{N_{p,r}}{\mathsf{E}N_{p,r}}<x\right)-G_{r,r}(x)\right| \;=\; 0,$$

где $G_{r,r}(x)$ *– функция гамма-распределения с параметром формы, совпадающим с параметром масштаба и равным* r*, см.* (12.5.3).

Доказательство. Характеристическая функция случайной величины $N_{p,r}$ равна

$$\mathsf{E}\exp\{itN_{p,r}\} \;=\; e^{it}\left[\frac{p}{1-(1-p)e^{it}}\right]^r, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Поэтому, используя представление $e^z=1+z+o(|z|)$ $(|z|\to 0)$, при каждом фиксированном $t\in\mathbb{R}$ мы имеем

$$\mathsf{E}\exp\left\{it\frac{N_{p,r}}{\mathsf{E}N_{p,r}}\right\} \;=\; \mathsf{E}\exp\left\{\frac{itpN_{p,r}}{r(1-p)+p}\right\} \;=$$

$$=\; \exp\left\{\frac{itp}{r(1-p)+p}\right\}\left[\frac{p}{1-(1-p)\exp\left\{\frac{itp}{r(1-p)+p}\right\}}\right]^r \;=$$

$$= \exp\Big\{\frac{itp}{r(1-p)+p}\Big\}\times$$

$$\times\Big[\frac{1}{p}\Big(1-\exp\Big\{\frac{itp}{r(1-p)+p}\Big\}\Big)+\exp\Big\{\frac{itp}{r(1-p)+p}\Big\}\Big]^{-r} =$$

$$= \exp\Big\{\frac{itp}{r(1-p)+p}\Big\}\Big[-\frac{1}{p}\Big(\frac{itp}{r(1-p)+p}+o(p)\Big)+1+O(p)\Big]^{-r} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \Big[1-\frac{it}{r}\Big]^{-r}$$

при $p \to 0$. Но правая часть этого соотношения в точности совпадает с характеристической функцией гамма-распределения $G_{r,r}(x)$. Ссылка на теорему о непрерывности соответствия между распределениями и соответствующими им характеристическими функциями устанавливает сходимость допредельных функций распределения к предельной в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, а замечание о монотонной непрерывности и ограниченности предельной функции распределения завершает доказательство.

12.6.4 Основные результаты и выводы

В подавляющем большинстве ситуаций, связанных с анализом экспериментальных данных, можно признать, что число случайных факторов, влияющих на наблюдаемые величины, само является случайным и изменяется от наблюдения к наблюдению. Поэтому вместо различных версий центральной предельной теоремы, обосновывающих нормальность распределения наблюдаемых случайных величин в классической статистике, в таких ситуациях следует опираться на их аналоги для выборок случайного объема (см. раздел 12.2 и Лемму 12.5.1).

Теорема 12.5.1. *Пусть $\gamma > 0$ произвольно и $\{d_n\}_{n\geq 1}$ – некоторая неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел. Предположим, что $N_n \to \infty$ по вероятности при $n \to \infty$ относительно каждой вероятности из семейства $\{\mathsf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$. Пусть статистика T_n асимптотически нормальна в смысле* (12.5.4). *Для того чтобы при каждом $\theta \in \Theta$*

$$\mathsf{P}_\theta\left(\delta(\theta)\sqrt{d_n}(T_{N_n}-t(\theta))<x\right) \implies P_\gamma(x) \quad (n\to\infty),$$

где $P_\gamma(x)$ – функция распределения Стьюдента с параметром γ, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathsf{P}_\theta(N_n<d_nx)\Longrightarrow G_{\gamma/2,\gamma/2}(x),\quad n\to\infty,\quad \theta\in\Theta.$$

Доказательство. Несложно убедиться в том, что при произвольном $\gamma > 0$ плотность $p_\gamma(x)$ распределения Стьюдента с параметром γ представима в виде

$$p_\gamma(x) \;=\; \mathsf{E}\sqrt{U_{\gamma/2}}\phi(x\sqrt{U_{\gamma/2}}),$$

где $\phi(x)$ – стандартная нормальная плотность, а $U_{\gamma/2}$ – случайная величина с функцией распределения $G_{\gamma/2,\gamma/2}(x)$. Действительно,

$$\mathsf{E}\sqrt{U_{\gamma/2}}\phi(x\sqrt{U_{\gamma/2}}) \;=$$

$$= \;\frac{\gamma^{\gamma/2}}{2^{(\gamma+1)/2}\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma/2)}\int\limits_0^\infty \exp\Big\{-u\Big(\frac{x^2+\gamma}{2}\Big)\Big\}u^{(\gamma-1)/2}du \;=$$

$$= \;\frac{\gamma^{\gamma/2}}{2^{(\gamma+1)/2}\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma/2)}\Big(\frac{x^2+\gamma}{2}\Big)^{-(\gamma+1)/2}\int\limits_0^\infty \exp\{-z\}z^{(\gamma+1)/2-1}dz \;=$$

$$= \;\frac{\gamma^{\gamma/2}}{2^{(\gamma+1)/2}\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma/2)}\Big(\frac{x^2+\gamma}{2}\Big)^{-(\gamma+1)/2}\Gamma\Big(\frac{\gamma+1}{2}\Big) \;=$$

$$= \;\frac{\Gamma((\gamma+1)/2)}{\sqrt{\pi\gamma}\Gamma(\gamma/2)}\Big(1+\frac{x^2}{\gamma}\Big)^{-\frac{\gamma+1}{2}} \;=\; p_\gamma(x).$$

Но плотность $p_\gamma(x) = \mathsf{E}\sqrt{U_{\gamma/2}}\phi(x\sqrt{U_{\gamma/2}})$ соответствует функции распределения $\mathsf{E}\Phi(x\sqrt{U_{\gamma/2}})$ (для натуральных γ этот факт был отмечен во введении). Теперь требуемое утверждение вытекает из Леммы 12.5.1 с учетом идентифицируемости масштабных смесей нормальных законов. Теорема доказана.

Следствие 12.5.1. *Пусть $r > 0$ произвольно. Предположим, что при каждом $n \geq 1$ случайная величина N_n имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $p = \frac{1}{n}$ и r. Пусть статистика T_n асимптотически нормальна в смысле* (12.5.5). *Тогда при каждом $\theta \in \Theta$*

$$\mathsf{P}_\theta\left(\delta(\theta)\sqrt{rn}(T_{N_n} - t(\theta)) < x\right) \;\Longrightarrow\; P_{2r}(x) \qquad (n\to\infty)$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$, где $P_{2r}(x)$ – функция распределения Стьюдента с параметром $\gamma = 2r$.

Доказательство. В силу Леммы 12.5.2 мы имеем

$$\frac{N_n}{nr} \;=\; \frac{N_n}{\mathsf{E}N_n}\cdot\frac{\mathsf{E}N_n}{nr} \;=\; \frac{N_n}{\mathsf{E}N_n}\cdot\frac{r(n-1)+1}{nr} \;=\; \frac{N_n}{\mathsf{E}N_n}\Big[1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big] \;\Longrightarrow U_r$$

при $n \to \infty$, где U_r – случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметром формы, совпадающим с параметром масштаба и равным r. Теперь требуемое утверждение непосредственно вытекает из Теоремы 12.5.1.

Замечание 12.5.1. Распределение Коши ($\gamma = 1$) возникает в ситуации, описанной в следствии 12.5.1, когда объем выборки N_n имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $p = \frac{1}{n}$, $r = \frac{1}{2}$ и n велико.

Замечание 12.5.2. В ситуации, когда объем выборки N_n имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $p = \frac{1}{n}$, $r = 1$ (то есть геометрическое распределение с параметром $p = \frac{1}{n}$), то в пределе при $n \to \infty$ мы получаем распределение Стьюдента с параметром $\gamma = 2$, которому соответствует функция распределения

$$P_2(x) \;=\; \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\Big), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{12.5.6}$$

Это распределение уже неоднократно упоминалось нами в разделах 11.3, 12.1 и 12.4. Оно впервые описано как предельное для выборочной медианы, построенной по выборке случайного объема, в которой объем выборки является случайной величиной с геометрическим распределением, по-видимому, в работе (Гнеденко, 1989). Следует отметить, что в упомянутой работе распределение (12.5.6) получено как масштабная смесь нормальных законов при показательном смешивающем распределении, но при этом не указано, что функция распределения, стоящая в правой части (12.5.6), соответствует именно распределению Стьюдента с "числом степеней свободы", равным 2.

Замечание 12.5.3. Скорость сходимости распределений регулярных статистик к распределению Стьюдента исследовалась в работах (Бенинг, Королев и У Да, 2004), (Беврани, Бенинг и Королев, 2005) и (Гавриленко, Зубов и Королев, 2006). В частности, в последней из упомянутых работ показано, что, если в условиях Следствия 12.5.1

$$\sup_x \Big|\mathsf{P}_\theta\Big(\delta(\theta)\sqrt{n}(T_n - t(\theta)) < x\Big) - \Phi(x)\Big| = O(n^{-1/2})$$

при $n \to \infty$ и фиксированном θ, то

$$\sup_x \Big|\mathsf{P}_\theta\Big(\delta(\theta)\sqrt{nr}(T_{N_n} - t(\theta)) < x\Big) - P_{2r}(x)\Big| =$$

$$= \begin{cases} O(n^{-1/2}), & \text{если } \frac{1}{2} \le r < \infty, \\ O(n^{-1/2}\log n), & \text{если } r = \frac{1}{2}, \\ O(n^{-r}), & \text{если } 0 < r < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, основной вывод из приведенных выше результатов можно сформулировать следующим образом. Если число случайных факторов, определяющих наблюдаемое значение случайной величины, само является случайной величиной, распределение которой может быть приближено гамма-распределением с одинаковыми параметрами (например, является отрицательным биномиальным с вероятностью успеха, близкой к единице, см. Лемму 12.5.2), то те функции от значений случайных факторов, которые в классической ситуации считаются асимптотически нормальными, в действительности являются асимптотически стьюдентовскими. Следовательно, в силу довольно широкой применимости гамма-моделей с одинаковыми параметрами и отрицательных биномиальных моделей распределение Стьюдента может рассматриваться в задачах прикладной (описательной) статистики как вполне разумная модель.

Необходимо отметить, что в пользу большего внимания прикладных статистиков к распределению Стьюдента также свидетельствует и так называемый энтропийный подход, согласно которому в условиях неопределенности математическую модель стохастической ситуации следует выбирать так, чтобы выбранная модель соответствовала максимально возможной (при некоторых разумных условиях) неопределенности. При этом в качестве меры неопределенности выбирается (дифференциальная) энтропия абсолютно непрерывного вероятностного распределения. Хорошо известно, что при соответствующих ограничениях на носитель и моменты плотности $p(x)$ “наиболее неопределенными” в смысле классической дифференциальной энтропии

$$H[p] \;=\; -\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\log p(x)dx \qquad (12.5.7)$$

являются, например, равномерное распределение (среди всех распределений с ограниченным носителем), показательное распределение (среди всех распределений, сосредоточенных на неотрицательной оси и имеющих конечное математическое ожидание) и нормальное распределение (среди всех распределений, сосредоточенных на всей числовой оси и имеющих конечный второй момент). Как показано в книге (Kapur, 1989), в классе плотностей $p(x)$, положительных на всей числовой оси и удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln(1+x^2)p(x)dx = c, \quad 0 < c < \infty,$$

максимум функционала $H[p]$ достигается на плотности распределения

Стьюдента $p_\gamma(x)$, параметр γ которой зависит от числа c и удовлетворяет уравнению

$$\psi\Big(\frac{\gamma+1}{2}\Big) - \psi\Big(\frac{\gamma}{2}\Big) = c,$$

где $\psi(z)$ – дигамма-функция, $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$. (Интересно отметить, что и в цитируемой книге (Kapur, 1989) данное распределение не распознано как распределение Стьюдента, а названо "обобщенным распределением Коши".)

Более того, в работе (Tsallis, de Souza and Maynard, 1995) показано, что если вместо (12.5.7) в качестве меры неопределенности рассмотреть обобщенную q-энтропию (non-extensive entropy)

$$H_q[p] \ = \ \frac{1}{q-1}\Big[1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} p^q(x)dx\Big], \quad q \in \mathbb{R}$$

(для которой функционал (12.5.7) является предельным случаем при $q \to 1$), то для $1 < q < 3$ максимум функционала $H_q[p]$ при условиях

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p^q(x)dx = 1$$

доставляет распределение Стьюдента с параметром $\gamma = (3-q)/(q-1)$.

12.6.5 Случай малого "числа степеней свободы"

Выше мы уже упоминали, что отрицательное биномиальное распределение (как мы убедились, тесно связанное с распределением Стьюдента Следствием 12.5.1), при натуральном r может быть интерпретировано в терминах испытаний Бернулли, проведенных до r-й неудачи. В то же время, особенно в задачах, связанных с анализом больших рисков, большой интерес представляет изучение распределения Стьюдента с малым параметром r, то есть с очень тяжелыми хвостами. Более того, можно показать, что при $\gamma = 2r \to 0$ максимум плотности $p_\gamma(x)$ распределения Стьюдента (см. (12.5.1)) стремится к нулю как $O(\sqrt{\gamma})$. Одновременно хвосты распределения Стьюдента становятся все более и более тяжелыми. Поэтому распределение Стьюдента с малым параметром может рассматриваться как некий аналог равномерного распределения на бесконечном интервале.

Чтобы Следствие 12.5.1 можно было использовать и в такой ситуации, следует разобраться, что из себя представляет отрицательное биномиальное распределение, то есть как оно может быть проинтерпретировано, при $0 < r < 1$. Мы приведем два примера такой интерпретации.

Пример 12.5.1. Этот пример хорошо знаком. Скажем, в книге (Кендалл и Стьюарт, 1966) он приведен со ссылкой на работу (Greenwood and Yule, 1920). Также см. Пример 7.6.1. Рассмотрим случайную величину $M_{p,r}$, имеющую смешанное пуассоновское распределение

$$\mathsf{P}(M_{p,r} = k) \;=\; \mathsf{E}\exp\{-U_{r,p/(1-p)}\}\frac{U^k_{r,p/(1-p)}}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $U_{r,p/(1-p)}$ – случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметром формы r и параметром масштаба $p/(1-p)$. Легко убедиться, что безусловное распределение случайной величины $M_{p,r}$ имеет вид

$$\mathsf{P}(M_{p,r} = k) \;=\; C^k_{r+k-1}p^r(1-p)^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12.5.8}$$

Несложно убедиться, что при этом $M_{p,r} = N_{p,r} - 1$, где, как и ранее, $N_{p,r}$ – случайная величина, имеющая отрицательное биномиальное распределение с параметрами r и p (см. (12.5.5)).

Таким образом, если сначала реализуется значение u случайной величины $U_{r,p/(1-p)}$ с гамма-распределением $G_{r,p/(1-p)}$, а затем реализуется значение случайной величины $M_{p,r}$, имеющей пуассоновское распределение, параметр которого равен полученному значению u, то, прибавив единицу к итоговой реализации случайной величины $M_{p,r}$, мы получаем реализацию отрицательной биномиальной случайной величины $N_{p,r}$ с параметрами r и p. При этом требуемая асимптотика $p \to 0$ (гарантирующая применимость Следствия 12.5.1) и $r \to 0$ для $N_{p,r}$ и $P_{2r}(x)$ естественно возникает как аналогичная асимптотика для $U_{r,p/(1-p)}$.

Пример 12.5.2. Вновь наряду со случайной величиной $N_{p,r}$, введенной выше, рассмотрим случайную величину $M_{p,r} = N_{p,r} - 1$, имеющую распределение (12.5.8). Рассмотрим независимые одинаково распределенные неотрицательные целочисленные случайные величины $Z_1, Z_2, \ldots$, каждая из которых имеет производящую функцию

$$p(z) \;=\; \frac{\log[1-(1-p)z]}{\log p}, \qquad |z| \le 1,$$

где $p \in (0, 1)$. Эта производящая функция задает так называемое логарифмическое распределение Фишера

$$\mathsf{P}(Z_1 = k) \;=\; \frac{(1-p)^k}{k\log p}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

(Кендалл и Стьюарт, 1966). Пусть N – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\mu > 0$, независимая от случайных величин $Z_1, Z_2, \ldots$ Положим

$$S \;=\; Z_1 + \ldots + Z_N.$$

Если $N = 0$, то полагаем $S = 0$.

Можно показать (Quenouille, 1949), (Gurland, 1957), что в таком случае числа q_n в представлении обобщенной пуассоновской производящей функции случайной величины S

$$\mathsf{E}z^S \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \;=\; \exp\{\mu(p(z) - 1)\}, \qquad |z| \leq 1,$$

равны

$$q_n \;=\; C_{n+r-1}^n p^r (1-p)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$r \;=\; -\frac{\mu}{\log p}. \tag{12.5.9}$$

Другими словами, в рассматриваемом случае распределение пуассоновской случайной суммы S совпадает с распределением (12.5.8) случайной величины $M_{p,r}$ при r, удовлетворяющем соотношению (12.5.9).

Таким образом, отрицательное биномиальное распределение с параметрами r и p можно интерпретировать как сдвинутое на единицу распределение суммы случайного числа независимых одинаково распределенных случайных величин, в которой слагаемые имеют логарифмическое распределение с параметром p, а число слагаемых имеет пуассоновское распределение с параметром $\mu = r \log \frac{1}{p}$. При этом требуемое соотношение $r < 1$ выполняется, если $\mu < \log \frac{1}{p}$, а распределение Стьюдента с $r \to 0$ может выступать в качестве асимптотической аппроксимации, основанной на Следствии 12.5.1, если $\mu = \mu(p) = o(\log \frac{1}{p})$ при $p \to 0$.

Список литературы

1. М. Абрамовиц и И. М. Стиган (ред.) *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами.* “Наука”, Москва, 1979.

2. Т. А. Азларов, А. А. Джамирзаев и И. Н. Мамуров. Предельные теоремы для распределений порядковых статистик при случайном объеме выборки. – *Узбекский матем. журнал*, 1991, №1, с. 3-13.

3. С. А. Айвазян, И. С. Енюков и Л. Д. Мешалкин. *Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных.* “Финансы и статистика”, Москва, 1983.

4. С. А. Айвазян, В. М. Бухштабер, И. С. Енюков и Л. Д. Мешалкин. *Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности.* “Финансы и статистика”, Москва, 1989.

5. Т. А. Азларов. *Исследования по математической теории массового обслуживания.* Дис. на соиск. ученой степени докт. физ.-матем. наук, Ташкент, 1972.

6. С. В. Артюхов, О. А. Базюкина, В. Ю. Королев и А. А. Кудрявцев. Модель оптимального ценообразования, основанная на процессах риска со случайными премиями. – в сб.: *Системы и средства информатики.* Специальный выпуск. ИПИРАН, Москва, 2005, с. 205-222.

7. Э. Б. Багиров. *Метод смесей и его применение к выводу нижних оценок для распределений функций от нормальных случайных величин.* Дисс. на соискание ученой степени кандидата физ.-матем. наук, МИАН, Москва, 1988.

8. Х. Беврани, В. Е. Бенинг и В. Ю. Королев. О точности аппроксимации отрицательного биномиального распределения гамма-распределением и скорости сходимости распределений некоторых статистик к распределению Стьюдента. – В сб. *Статистические методы оценивания и проверки гипотез.* Изд-во Пермского государственного университета, Пермь, 2005, с. 88-103.

9. А. Г. Белов, В. Я. Галкин и М. В. Уфимцев. *Вероятностно-статистические проблемы экспериментального разделения множественных процессов.* Изд-во Московского университета, Москва, 1985.

10. В. Е. Бенинг и В. Ю. Королев. Асимптотические разложения для квантилей обобщенных процессов Кокса и некоторые их приложения к задачам финансовой и актуарной математики. – *Обозрение промышленной и прикладной математики. Сер. "Финансовая и страховая математика"*, 1998, т. 5, вып. 1, с. 23-43.

11. В. Е. Бенинг и В. Ю. Королев. Асимптотические разложения для вероятности разорения в классическом процессе риска при малой нагрузке безопасности. – *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 2000, т. 7, вып. 1, с. 177-179.

12. В. Е. Бенинг и В. Ю. Королев. *Введение в математическую теорию риска.* М.: МАКС-Пресс, 2000.

13. В. Е. Бенинг и В. Ю. Королев. *Обобщенные процессы риска.* М.: МАКС-Пресс, 2000.

14. В. Е. Бенинг и В. Ю. Королев. О моделировании больших рисков при помощи распределения Стьюдента. – *Обозрение промышленной и прикладной математики, сер. "Финансовая и страховая математика"*, 2003, т. 10, вып. 2, с. 268-275.

15. В. Е. Бенинг и В. Ю. Королев. Об использовании распределения Стьюдента в задачах теории вероятностей и математической статистики. – *Теория вероятностей и ее применения*, 2004, т. 49, вып. 3, с. 417-435.

16. В. Е. Бенинг, В. Ю. Королев и С. Я. Шоргин. *Введение в математическую теорию актуарных расчетов.* М.: МАКС-Пресс, 2002.

17. В. Е. Бенинг, В. Ю. Королев и А. А. Кудрявцев. Вычислительные аспекты построения доверительных интервалов для вероятности разорения в обобщенном процессе риска. – *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 2000, т. 7, вып. 2, с. 313-315.

18. В. Е. Бенинг, В. Ю. Королев и А. А. Кудрявцев. О вычислении доверительных интервалов для вероятности разорения в обобщенном процессе риска. – *Вестник Московского университета, сер. 15 вычислительная математика и кибернетика*, 2001.

19. В. Е. Бенинг и В. Ю. Королев. Асимптотическое поведение обобщенных процессов риска. – *Обозрение промышленной и прикладной математики. Сер. "Финансовая и страховая математика"*, 1998, т. 5, вып. 1, с. 116-133.

20. В. Е. Бенинг и В. Ю. Королев. Статистическое оценивание вероятности разорения для обобщенных процессов риска. – *Теория вероятностей и ее применения*, 1999, т. 44, вып. 1, с. 161-164.

21. В. Е. Бенинг, В. Ю. Королев и У Да. Оценки скорости сходимости распределений некоторых статистик к распределению Стьюдента. – *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия "Прикладная математика и информатика"*, 2004, № 1(12), с. 59-74.

22. В. Е. Бенинг и В. И. Ротарь. Одна модель оптимального поведения страховой компании. – *Эконом. матем. методы*, 1993, т. 29, в. 4, с. 617–626.

23. С. Н. Бернштейн. *Теория вероятностей.* 4-е изд. М.-Л.: Гостехиздат, 1946.

24. П. Биллингсли. *Сходимость вероятностных мер.* "Наука", Москва, 1977.

25. А. В. Бойков. *Стохастические модели капитала страховой компании и оценивание вероятности неразорения.* – Дис. канд. физ.-матем. наук. Москва, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2003, 83 с.

26. Л. Н. Большев. О преобразованиях случайных величин. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1959, т. 4, в. 1, с. 136–149.

27. А. А. Боровков. *Теория вероятностей.* Наука, Москва, 1976.

28. К. А. Боровков. К вопросу об уточнении пуассоновской аппроксимации. – *Теория вероятностей и ее примен.*, 1988, т. 33, вып. 2, с. 364-368.

29. Е. В. Булинская. *Теория риска и перестрахование. Часть I. Упорядочивание рисков.* М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2001.

30. Р. Н. Бхаттачария, Р. Ранга Рао. *Аппроксимация нормальным распределением.* "Наука", Москва, 1982.

31. О. П. Виноградов. Об одном элементарном методе получения оценок вероятности разорения. – *Обозрение прикладной и промышленной математики, сер. "Финансовая и страховая математика"*, 1998, т. 5, вып. 1, с. 134-140.

32. В. Г. Воинов, М. С. Никулин. *Несмещенные оценки и их применения.* "Наука", Москва, 1989.

33. С. В. Гавриленко, В. Н. Зубов и В. Ю. Королев. Оценка скорости сходимости регулярных статистик, построенных по выборкам случайного объема с отрицательным биномиальным распределением, к распределению Стьюдента. – В сб. *Статистические методы оценивания и проверки гипотез.* Изд-во Пермского государственного университета, Пермь, 2006, в печати.

34. Б. В. Гнеденко. Об оценивании неизвестных параметров распределений по случайному числу независимых наблюдений. – в: *Теория вероятностей и математическая статистика. Труды Тбилисского математического института им. А. М. Размадзе.* 1989, т. 92, с. 146-150.

35. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров. *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.* ГИТТЛ, Москва–Ленинград, 1949.

36. Б. В. Гнеденко, С. Стоматович и А. Шукри. О распределении медианы. – *Вестник Московского университета, Сер. математика, механика*, 1984, N 2, с. 59-63.

37. Б. В. Гнеденко и Х. Фахим. Об одной теореме переноса. – *Доклады АН СССР*, 1969, т. 187, № 1, с. 15-17.

38. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* ГИФМЛ, Москва, 1962.

39. Я. Гранделл. Смешанные пуассоновские процессы. – *Обозрение промышленной и прикладной математики. Сер. “Финансовая и страховая математика”*, 1998, т. 5, вып. 1, с. 44-65.

40. М. Де Гроот. *Оптимальные статистические решения.* “Мир”, Москва, 1974.

41. Э. Гумбель. *Статистика экстремальных значений.* “Мир", Москва, 1965.

42. Р. Л. Добрушин. Лемма о пределе сложной случайной функции. – *Успехи матем. наук*, 1955, т. 10, вып. 2(64), с. 157-159.

43. Р. Л. Добрушин. О законе Пуассона для распределения частиц в пространстве. – *Укр. матем. журнал*, 1956, т. 8, с. 127-134.

44. Дж. Дуб. *Вероятностные процессы.* Изд-во иностранной литературы, Москва, 1956.

45. Г. Дэйвид. *Порядковые статистики.* “Наука”, Москва, 1979.

46. А. Ю. Зайцев. О точности аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин, отличных от нуля с малой вероятностью, с помощью сопровождающих законов. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1983, т. 28, вып. 1, с. 184-185.

47. В. М. Золотарев. Односторонняя трактовка и уточнения некоторых неравенств чебышевского типа. – *Литовский матем. сборник*, 1965, т. 5, № 2, с. 233-250.

48. В. М. Золотарев. Абсолютная оценка остаточного члена в центральной предельной теореме. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1966, т. 11, вып. 1, с. 108-119.

49. В. М. Золотарев. *Одномерные устойчивые распределения.* "Наука", Москва, 1983.

50. В. М. Золотарев. *Современная теория суммирования независимых случайных величин.* "Наука", Москва, 1986.

51. И. А. Ибрагимов и Ю. В. Линник. *Независимые и стационарно связанные величины.* "Наука", Москва, 1965.

52. И. А. Ибрагимов. О точности аппроксимации функций распределения сумм независимых случайных величин нормальным распределением. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1966, т. 11, вып. 4, с. 632-655.

53. О. К. Исаенко и В. Ю. Урбах. Разделение смесей вероятностных распределений на их компоненты. – в сб.: *Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей, математическая статистика, теоретическая кибернетика.* Изд-во ВИНИТИ, Москва, 1976, с. 37-58.

54. В. В. Калашников и Д. Константинидис. Вероятность разорения. – *Фундаментальная и прикладная математика*, 1996, т. 2, вып. 4, с. 1055-1100.

55. В. В. Калашников и Г. Ш. Цициашвили. Асимптотически точные двусторонние оценки вероятности разорения при наличии больших выплат. – *Обозрение прикладной и промышленной математики, Сер. "Финансовая и страховая математика"*, 1998, т. 5, вып. 1, с. 66-82.

56. А. Картан. *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.* "Мир", Москва, 1971.

57. Т. Р. Кашаев и В. Ю. Королев. Об оптимальном планировании резерва с приложениями к страхованию. – *Вестник Московского университета, Серия 15, вычислительная математика и кибернетика*, 1999, вып. 2, с. 40-48.

58. Т. Р. Кашаев и В. Ю. Королев. Асимптотическое поведение обобщенных процессов риска при возможности больших выплат – *Обозрение прикладной и промышленной математики. Серия страховая и финансовая математика.* 2004, том 11, вып. 1, с. 51-66.

59. Т. Р. Кашаев, В. Ю. Королев и С. Я. Шоргин. Математические методы оценки оптимальных параметров процессов риска. – В сб. *Системы и средства информатики.* Изд-во ИПИ РАН, Москва, 2002, с. 127-141.

60. Д. Е. Кащеев. *Моделирование динамики финансовых временных рядов и оценивание производных финансовых инструментов.* Дисс. на соискание ученой степени кандидата физ.-матем. наук, Тверской государственный университет, Тверь, 2001.

61. М. Дж. Кендалл и А. Стьюарт. *Теория распределений.* Наука, Москва, 1966.

62. Й. Керстан, К. Маттес и Й. Мекке. *Безгранично делимые точечные процессы.* – Наука, Москва, 1982.

63. Г. Кимбл. *Как правильно пользоваться статистикой.* "Финансы и статистика", Москва, 1982.

64. Л. Б. Клебанов, Г. М. Мания и И. А. Меламед. Одна задача В. М. Золотарева и аналоги безгранично делимых и устойчивых распределений в схеме суммирования случайного числа случайных величин. – *Теория вероятностей и ее применения*, 1984, т. 29, вып. 4, с. 757-760.

65. А. Н. Колмогоров. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей. – *Вестник Моск. ун-та*, 1953, № 10, с. 29-38.

66. В. Ю. Королев. О точности нормальной аппроксимации для распределений сумм случайного числа независимых случайных величин. — *Теория вероятностей и ее применения*, 1988, т. 33, N. 3, с. 577-581.

67. В. Ю. Королев. Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами. I. – *Теория вероятностей и ее применения*, 1994, т. 39, вып. 2, с. 313-333.

68. В. Ю. Королев. Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами. II. – *Теория вероятностей и ее применения*, 1995, т. 40, вып. 4, с. 907-910.

69. В. Ю. Королев. *Вероятностные модели. Введение в асимптотическую теорию случайного суммирования.* Диалог-МГУ, Москва, 1997.

70. В. Ю. Королев. Построение моделей распределений биржевых цен при помощи методов асимптотической теории случайного суммирования. – *Обозрение прикладной и промышленной математики, серия Финансовая и страховая математика*, 1997, т. 4, вып. 1, с. 86-102.

71. В. Ю. Королев. О сходимости распределений случайных сумм к устойчивым законам. – *Теория вероятностей и ее применения*, 1997, т. 42, вып. 4, с. 818-820.

72. В. Ю. Королев. О сходимости распределений обобщенных процессов Кокса к устойчивым законам. – *Теория вероятностей и ее применения*, 1998, т. 43, вып. 4, с. 786-792.

73. В. Ю. Королев. Асимптотические свойства выборочных квантилей, построенных по выборкам случайного объема. – *Теория вероятностей и ее применения*, 1999, т. 44, вып. 2, с. 440-445.

74. В. Ю. Королев. Асимптотические свойства экстремумов обобщенных процессов Кокса и их применения в некоторых задачах финансовой математики. – *Теория вероятностей и ее применения*, 2000, т. 45, вып. 1, с. 182-194.

75. В. Ю. Королев. О распределениях, симметризация которых является масштабной смесью нормальных законов. – в сб.: *Статистические методы оценивания и проверки гипотез.* изд-во Пермского государственного университета, Пермь, 2000, с. 136-143.

76. В. Ю. Королев. О стереотипе нормальности и механизмах возникновения распределений с тяжелыми хвостами при математическом моделировании реальных процессов. – в сб. *"Стохастические модели структурной плазменной турбулентности"* под ред. В. Ю. Королева и Н. Н. Скворцовой. Макс–Пресс, Москва, 2003 г., с. 183-273.

77. В. Ю. Королев. *Смешанные гауссовские модели реальных процессов.* МАКС Пресс, Москва, 2004, 124 с.

78. В. Ю. Королев. *Теория вероятностей и математическая статистика.* Изд-во "Проспект", Москва, 2005, 160 с.

79. В. Ю. Королев, И. А. Здоровцов и А. Г. Сурков. Определение критических значений параметров среды функционирования высоконадежных элементов волоконно-оптических линий передачи Магистральной цифровой сети связи. – В сб. *Системы и средства информатики.* Москва, изд-во ИПИ РАН, 2002, с. 122-126.

80. В. Ю. Королев и А. А. Кудрявцев. Обращение теоремы переноса для обобщенных процессов риска. – *Обозрение промышленной и прикладной математики, сер. "Финансовая и страховая математика"*, 2003, т. 10, вып. 2, с. 303-314.

81. В. Ю. Королев и А. А. Кудрявцев. Функциональные предельные теоремы для обобщенных процессов риска. – *Вестник Московского университета, сер. 15 Вычисл. матем. и киберн.* 2003, №4, с. 29-38.

82. В. Ю. Королев, П. И. Минькина и С. Я. Шоргин. Применение экспоненциальных оценок вероятностей больших уклонений пуассоновских случайных сумм для оптимизации прибыли в условиях арбитража. – в сб.: *Системы и средства информатики.* Специальный выпуск. ИПИРАН, Москва, 2005, с. 223-238.

83. В. Ю. Королев и Д. О. Селиванова. *Асимптотическое поведение выборочных квантилей, построенных по выборкам случайного объема.* Деп. ВИНИТИ 12.05.94, N 1197-В94.

84. В. Ю. Королев и И. Г. Шевцова. О точности нормальной аппроксимации. I. – *Теория вероятностей и ее примен.*, 2005, т. 50, вып. 2, с. 353-366.

85. В. Ю. Королев и И. Г. Шевцова. О точности нормальной аппроксимации. II. – *Теория вероятностей и ее примен.*, 2005, т. 50, вып. 3, с. 555-564.

86. В. Ю. Королев и С. Я. Шоргин. Аппроксимация распределений сумм случайных индикаторов. – в сб.: *Системы и средства информатики.* Специальный выпуск. ИПИРАН, Москва, 2001, с. 148-157.

87. В. С. Королюк и Ю. В. Боровских. *Теория U-статистик.* “Наукова думка”, Киев, 1989.

88. А. Кофман. *Методы и модели исследования операций.* Мир, Москва, 1966.

89. В. М. Круглов. Смеси вероятностных распределений. – *Вестник московского университета, сер. 15 вычислительная математика и кибернетика*, 1991, вып. 2, с. 3-15.

90. В. М. Круглов и В. Ю. Королев. *Предельные теоремы для случайных сумм.* Издательство Московского университета, Москва, 1990.

91. А. А. Кудрявцев. *Неоднородные процессы риска.* Дисс. на соискание ученой степени кандидата физ.-матем. наук, Московский государственный университет, Москва, 2003.

92. М. Лоэв. *Теория вероятностей.* Изд-во иностранной литературы, Москва, 1962.

93. Е. Лукач. *Характеристические функции.* М.: Наука, 1979.

94. В. К. Мацкявичюс. О нижней оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1983, т. 28, вып. 3, с. 565-569.

95. А. В. Мельников. *Риск-менеджмент. Стохастический анализ рисков в экономике финансов и страхования.* М.: "Анкил", 2001.

96. Методика (I) расчета тарифных ставок по массовым рисковым видам страхования, утвержденная Распоряжением Росстрахнадзора № 02-03-36 от 08.07.93. – В сб.: *Страховой портфель.* СОМИНТЕК, Москва, 1994, с. 614–619.

97. Методика расчета тарифных ставок по рисковым видам страхования, утвержденная Распоряжением Росстрахнадзора N 02-03-36 от 08.07.93, – *Финансовая газета*, 1993, N 40.

98. В. Г. Михайлов. Об уточнении центральной предельной теоремы для суммы независимых случайных индикаторов. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1991, т. 36, вып. 4, с. 798.

99. С. В. Нагаев. Некоторые предельные теоремы для больших уклонений. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1965, т. 10, вып. 2, с. 231-254.

100. А. Н. Наконечный. Уточнение экспоненциальной асимптотики для функции распределения суммы случайного числа неотрицательных случайных величин. – *Кибернетика и системный анализ*, 1997, № 1, с. 112-121.

101. Дж. Фон Нейман и О. Моргенштерн. *Теория игр и экономическое поведение.* "Наука", Москва, 1970.

102. П. В. Новицкий и И. А. Зограф. *Оценка погрешностей результатов измерений.* Энергоатомиздат, Ленинград, 1991.

103. Л. В. Осипов. Уточнение теоремы Линдеберга. – *Теория вероятностей и ее применения*, 1966, т. 11, вып. 2, с. 339-342.

104. Н. Я. Петраков и В. И. Ротарь. *Фактор неопределенности и управление экономическими системами.* Наука, Москва, 1985.

105. В. В. Петров. *Суммы независимых случайных величин.* М.: Наука, 1972.

106. В. В. Петров. *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* М.: Наука, 1987.

107. Э. Л. Пресман. О сближении биномиальных и безгранично делимых распределений. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1983, т. 28, вып. 2, с. 372-382.

108. Э. Л. Пресман. О сближении по вариации распределения суммы независимых бернуллиевских величин с пуассоновским законом. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1985, т. 30, вып. 2, с. 391-396.

109. Ю. В. Прохоров. Асимптотическое поведение биномиального распределения. – *Успехи матем. наук*, 1953, т. 8, с. 135-142.

110. Ю. В. Прохоров. Об одной локальной теореме. – В сб. *"Предельные теоремы теории вероятностей"*, Ташкент, изд-во АН УзССР, 1963, с. 75-80.

111. Ю. В. Прохоров, В. Ю. Королев и В. Е. Бенинг. Аналитические методы математической теории риска, основанные на смешанных гауссовских моделях. – *Вестник Московского университета, сер. 15 Вычисл. матем. и киберн.*, 2005, Специальный выпуск, с. 94-112.

112. Б. А. Рогозин. Одно замечание к работе Эссеена "Моментное неравенство с применением к центральной предельной теореме". – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1960, т. 5, вып. 1, с. 125-128.

113. В. И. Ротарь и В. Е. Бенинг. Введение в математическую теорию страхования. – *Обозрение прикладной и промышленной математики, сер. "Финансовая и страховая математика"*, 1994, т. 1, вып. 5, с. 698-779.

114. Г. В. Ротарь. Одна задача управления резервом. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1972, т. 17, вып. 3, с. 597-599.

115. Г. В. Ротарь. *Некоторые задачи планирования резерва.* Дис. канд. физ.-матем. наук, Центральный экономико-математический институт, Москва, 1972.

116. Г. В. Ротарь. Об одной задаче управления резервами. – *Эконом. матем. методы*, 1976, т. 12, вып. 4, с. 733-739.

117. Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков и А. М. Зубков. *Сборник задач по теории вероятностей.* "Наука", Москва, 1989.

118. Д. О. Селиванова. *Оценки скорости сходимости в предельных теоремах для случайных сумм.* Дис. канд. физ.-матем. наук. МГУ, 1995.

119. Е. Сенета. *Правильно меняющиеся функции.* Наука, Москва, 1985.

120. Д. С. Сильвестров. *Предельные теоремы для сложных случайных функций.* Вища школа, Киев, 1974.

121. Г. О. Темнов. *Математические модели риска и случайного притока взносов в страховании.* – Дис. канд. физ.-матем. наук, С.-Петербург, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 2004, 102 с.

122. Д. К. Фаддеев. К понятию энтропии конечной вероятностной схемы. – *Успехи матем. наук*, 1956, т. 11, № 1, с. 227-231.

123. А. С. Файнлейб. Обобщение неравенства Эссеена и его применение в вероятностной теории чисел. – *Известия АН СССР, сер. матем.*, 1968, т. 32, №4, с. 859-879.

124. Г. И. Фалин *Математический анализ рисков в страховании.* Российский юридический издательский дом, Москва, 1994.

125. В. Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т. 1. "Мир", Москва, 1984.

126. В. Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т. 2. "Мир", Москва, 1984.

127. П. Фишберн. *Теория полезности для принятия решений.* "Наука", Москва, 1978.

128. А. Я. Хинчин. *Предельные законы для сумм независимых случайных величин.* ОНТИ НКТП, Москва–Ленинград, 1938.

129. В. П. Чистяков. Теорема о суммах независимых положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1964, т. 9, вып. 4, с. 710-718.

130. Г. П. Чистяков. Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. I. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, т. 46, вып. 2, с. 326-344.

131. В. В. Шахов. *Введение в страхование.* "Финансы и статистика", Москва, 1992.

132. И. Г. Шевцова. О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм. – *Обозрение прикладной и промышленной математики.* 2006, в печати.

133. И. Г. Шевцова. Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена. *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, т. 51, вып. 3.

134. И. Г. Шевцова. *Уточнение структуры оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме для сумм независимых случайных величин.* Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. МГУ, 2006.

135. А. Ф. Э. С. Шериф. *Предельные теоремы для крайних членов вариационного ряда.* Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. МГУ, 1983.

136. И. С. Шиганов. Об уточнении верхней константы в остаточном члене центральной предельной теоремы. – В сб.: *Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара.* ВНИИСИ, Москва, 1982.

137. А. Н. Ширяев. *Теория вероятностей.* "Наука", Москва, 1989.

138. А. Н. Ширяев. Актуарное и финансовое дело: современное состояние и перспективы развития. – *Обозрение прикладной и промышленной математики. Серия страховая и финансовая математика.* 1994, том 1, вып. 5, с. 684-697.

139. А. Н. Ширяев. Вероятностно-статистические модели эволюции финансовых индексов. – *Обозрение прикладной и промышленной математики, серия Финансовая и страховая математика*, 1995, т. 2, вып. 4, с. 527-555.

140. А. Н. Ширяев. *Основы стохастической финансовой математики. Факты. Модели.* "Фазис", Москва, 1998, 512 с.

141. А. Н. Ширяев. *Основы стохастической финансовой математики. Теория.* – "Фазис", Москва, 1998, 544 с.

142. С. Я. Шоргин. Аппроксимация обобщенного биномиального распределения. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1977, т. 22, вып. 4, с. 867-871.

143. С. Я. Шоргин и С. Н. Сурков. Методика вычисления страховой неттоставки, обеспечивающей устойчивость страховой деятельности для рисковых видов страхования. – *Вестник РОСС*, 1993, в. 2, с. 75–78.

144. С. Я. Шоргин. Асимптотические оценки оптимальных страховых тарифов на основе факторизационной модели индивидуального иска. – *Эконом. матем. методы*, 1996, т. 32, в. 2, с. 127–137.

145. С. Я. Шоргин. Асимптотическая оценка оптимальных страховых премий в условиях факторизационной модели индивидуального иска. – *Вестник Московского ун-та. Сер. 15, вычисл. матем. и кибернет.*, 1996, №3, с. 48–54.

146. С. Я. Шоргин. О точности нормальной аппроксимации распределений случайных сумм с безгранично делимыми индексами. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, т. 41, в. 4, с. 920–926.

147. С. Я. Шоргин. *Факторизационная модель страхового иска и асимптотические оценки оптимальных страховых ставок.* – Рукопись деп. в ВИНИТИ 04.11.96, №3210-В96.

148. С. Я. Шоргин. Асимптотические оценки оптимальных страховых тарифов в условиях вариации страховых сумм. – *Обозрение прикл. и промышл. матем., сер. финанс. и страх. матем.*, 1997, т. 4, в. 1, с. 124–156.

149. С. Я. Шоргин. *Гарантированные оценки ставок страховых премий для факторизуемых исков.* – Рукопись деп. в ВИНИТИ 04.11.96, №3211-В96.

150. Д. Штойян. *Качественные свойства и оценки стохастических моделей.* М.: “Мир”, 1979.

151. Эль-Сайед Х. С. Н. *Асимптотические задачи изучения распределения геометрической суммы случайных величин.* – Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. Ташкентский гос. ун-т, Ташкент, 1993.

152. Л. Э. Эльсгольц. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* “Наука”, Москва, 1969.

153. П. Эмбрехтс и К. Клюппельберг. Некоторые аспекты страховой математики. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1993, т. 38, в. 2, с. 375–416.

154. П. Эмбрехтс. Актуарный и финансовый подходы к расчетам стоимости в страховании. – *Обозрение прикладной и промышленной математики, сер. “Финансовая и страховая математика”*, 1998, т. 5, вып. 1, с. 6-22.

155. А. М. Яглом и И. М. Яглом. *Вероятность и информация.* “Наука”, Москва, 1973.

156. V. Akgiray and G. G. Booth. Compound distribution models of stock returns: an empirical comparison. – *J. of Financial Research.*, 1987, vol. 10, p. 269-280.

157. M. Allais. L’extension des théories de l’équilibre économique general et du rendement social au cas du risque.– *Econometrica*, 1953, vol. 21, p. 269-290.

158. M. Allais. Le comportement de l’homme rationnel devant le risque: Critique des postulates et axiomes de l’école américaine. – *Econometrica*, 1953, vol. 21, p. 503-546.

159. W. Albers, P. J. Bickel and W. R. Van Zwet. Asymptotic expansions for the power of distributuion-free test in the one-sample problem. – *Annals of Statist.*, 1976, vol. 4, p. 108-156; Correction: 1978, vol. 6, p. 1170-1171.

160. R. S. Ambagaspitiya. A family of discrete distributions. – *Insurance: Math., Econom.*, 1995, vol. 16, No. 2, p. 107-127.

161. R. S. Ambagaspitiya and P. Balakrishnan. On the compound generalized Poisson distributions. – *Astin Bull.*, 1993, vol. 24, No. 2, p. 255-263.

162. H. Ammeter. A generalization of the collective theory of risk in regard to fluctuating basic probabilities. – *Skand. AktuarTidskr.*, 1948, vol. 31, p. 171-198.

163. E. Sparre Andersen. On the fluctuations of sums of random variables. I. – *Math. Scand.*, 1953, vol. 1, p. 263-285.

164. E. Sparre Andersen. On the fluctuations of sums of random variables. II. – *Math. Scand.*, 1954, vol. 2, p. 195-223.

165. E. Sparre Andersen. On the collective theory of risk in the case of contagion between claims. – in: *Trans. 15th Int. Congress of Actuaries, New York, vol. 2*, 1957, p. 219-229.

166. G. Arfwedson. Some problems in the collective theory of risk. – *Skand. AktuarTidskr.*, 1950, vol. 33, p. 1-38.

167. G. Arfwedson. A semi-convenient series with application to the collective theory of risk. – *Skand. AktuarTidskr.*, 1952, vol. 35, p. 16-35.

168. G. Arfwedson. Research in collective risk theory. The case of equal risk sums. – *Skand. AktuarTidskr.*, 1953, vol. 36, p. 1-15.

169. G. Arfwedson. On the collective theory of risk. – *Trans. Int. Congress of Actuaries*, Madrid, 1954.

170. G. Arfwedson. Research in collective risk theory. I. – *Skand. AktuarTidskr.*, 1954, vol. 37, p. 191-223.

171. G. Arfwedson. Research in collective risk theory. II. – *Skand. AktuarTidskr.*, 1955, vol. 38, p. 53-100.

172. G. Arfwedson. Notes on collective risk theory. – *Skand. AktuarTidskr.*, 1957, vol. 40, p. 46-59.

173. K. J. Arrow. *Social Choice and Individual Values.* Cowles Commission Monograph, No. 12, Chicago, 1951.

174. K. J. Arrow. *Essays in the Theory of Risk Bearing.* North–Holland, Amsterdam, 1970.

175. K. J. Arrow. Optimal insurance and generalized deductibles. – *Scandinavian Actuar. J.*, 1974, No. 1, p. 1-42.

176. S. Asmussen. *Applied Probabilities and Queues.* John Wiley, Chichester, 1987.

177. S. Asmussen. *Ruin Probabilities.* World Scientific, Singapore, 1997.

178. S. Asmussen and T. Rolski. Computational methods in risk theory: A matrix-algoriyhmic approach. – *Insurance: Math., Econom.*. 1991, vol. 10, p. 259-274.

179. L. Bachelier. *Théorie de la spéculation.* Ann. Ecole Norm. Sup., 1900, vol. 17, p. 21-86 (reprinted in: P. H. Coothner (Ed.). *The Random Character of Stock Market Prices.* Cambridge, Ma, MIT Press, 1967, p. 517-531).

180. B. von Bahr. Ruin probabilities expressed in terms of ladder height distributions. – *Scandinavian Actuar. J.*, 1974, No. 2, p. 190-204.

181. B. von Bahr. Asymptotic ruin probability when exponential moments do not exist. – *Scandinavian Actuar. J.*, 1975, No. 1, p. 6-10.

182. A. D. Barbour and P. Hall. On the rate of Poisson convergence. – *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1981, vol. 95, p. 473-480.

183. G. Beall and R. R. Rescia. A generalization of Neyman's contagious distribution. – *Biometrics*, 1953, vol. 9, p. 354-386.

184. R. E. Beard, T. Pentikäinen and E. Pesonen. *Risk Theory.* Chapman and Hall, London, 1978.

185. J. A. Beekman. Collective risk results. *Trans. Soc. Actuaries*, 1968, Vol. 20, p. 182.

186. J. A. Beekman. A ruin function approximation. – *Trans. Soc. Actuaries*, 1969, Vol. 21, p. 41-48, 275-279.

187. V. E. Bening, V. Yu. Korolev and S. Ya. Shorgin. On approximations to generalized Poisson distribution. – *J. Math. Sciences*, 1997, v. 83, №3.

188. V. E. Bening and V. Yu. Korolev. *Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance*, VSP, Utrecht, 2002.

189. V. E. Bening and V. Yu. Korolev. Asymptotic behavior of non-ordinary generalized Cox processes with nonzero means. — *Journal of Mathematical Sciences*, 1998, Vol. 92, No. 3, p. 3836-3856.

190. V. E. Bening and V. Yu. Korolev. Generalized risk processes: asymptotic properties and statistical estimation of ruin probability. – *"Dwudziesta Ósma Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki, Zakopane-Kościelisko, 22-29.IX.1999".* Abstracts of Communications. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 1999, p. 5-7

191. V. E. Bening and V. Yu. Korolev. Nonparametric estimation of ruin probability for generalized risk processes. – *XX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. Lublin–Nałeczów, Poland, 5-11 September, 1999.* Abstracts of Communications. Maria Curie-Skłodowska University Publishing House, Lublin, 1999, p. 26-28.

192. V. E. Bening, V. Yu. Korolev and S. Ya. Shorgin. On random sums of indicators. – *Пятая Международная Петрозаводская конференция "Вероятностные методы в дискретной математике". Петрозаводск, 1 – 6 июня 2000 г. Тезисы докладов. Обозрение прикладной и промышленной математики*, 2000, т. 7, вып. 1, с. 161-163.

193. V. E. Bening and V. Yu. Korolev. Asymptotic expansions for the ruin probability in the classical risk process with small safety loading. – *"Dwudziesta Dziewiata Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki, Zakopane-Kościelisko, 19-26.IX.2000"*. Abstracts of Communications. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 2000, p. 5-6.

194. V. E. Bening, V. Yu. Korolev and Liu Lixin. Asymptotic behavior of generalized risk processes. – *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2004, Vol. 20, No. 2, p. 349-356.

195. G. Bennett. Probability inequalities for the sum of independent random variables. – J. Amer. Statist. Assoc., 1962, vol. 57, p. 33-45.

196. V. Bentkus. *On the asymptotical behavior of the constant in the Berry–Esseen inequality.* Preprint 91 – 078, Universität Bielefeld, 1991.

197. V. Bentkus. On the asymptotical behavior of the constant in the Berry–Esseen inequality. – *J. Theor. Probab.*, 1994, vol. 2, No, 2, p. 211-224.

198. H. Bergström. On the central limit theorem in the case of not equally distributed random variables. – *Skand. Aktuarietidskr.*, 1949, vol. 33, p. 37-62.

199. A. C. Berry. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. – *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1941, vol. 49, p. 122-139.

200. S. K. Bhattacharya and M. S. Holla. On a discrete distribution with special reference to the theory of accident proneness. – *J. Amer. Statist. Assoc.*, 1965, vol. 60, p. 1060-1066.

201. Z. W. Birnbaum. On random variables with comparable peakedness. – *Ann. Math. Statist.*, 1948, vol. 19, No. 1, p. 76-81.

202. R. Blattberg and N. Gonedes. A comparison of the stable and Student distributions as statistical models of stock prices. – *J. Business*, 1974, vol. 47, p. 244-250.

203. A. Boness, A. Chen and S. Jatusipitak. Investigations of nonstationary prices. – *J. Business*, 1974, vol. 47, p. 518-537.

204. K. Borch. Equilibrium in a reinsurance market. – *Econometrica*, 1962, vol. 30, No. 3, p. 424-444.

205. K. Borch. *The Mathematical Theory of Insurance.* Lexington Books, 1974.

206. N. L. Bowers, H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones and C. J. Nesbitt *Actuarial Mathematics.* Itasca, Illinois: The Society of Actuaries, 1986. Имеется русский перевод: Н. Бауэрс, Х. Гербер, Д. Джонс, С. Несбитт и Дж. Хикман. *Актуарная математика.* “Янус-К”, Москва, 2001, 644 с.

207. J. E. Brada and J. Van Tassel. The distribution of stock-price differences: Gaussian after all? – *Operations Research*, 1966, vol. 14, p. 332-340.

208. L. Breiman. The Poisson tendency in traffic distribution. – *Ann. Math. Statist.*, 1963, vol. 34, p. 308-311.

209. H. Bülmann. Austauschbare stochastiche Variabeln und ihre Grenzwertsätze. – *Univ. California Publ. Statist.*, 1960, vol. 3, p. 1-36.

210. H. Bülmann. *Mathematical Methods in Risk Theory.* Springer, Berlin, 1970.

211. H. Bülmann. An economic premium principle. – *Astin Bull.*, 1980, vol. 11, p. 52-60.

212. H. Bülmann. Tendencies of development in risk theory. – in: *Centennial Celebration of the Actuarial Profession in North America.* Vol. 2. The Society of Actuaries, Shaumburg, Illinois, 1989, p. 499-521.

213. H. Bülmann and R. Buzzi. On a transformation of the weighted compound Poisson process. – *Astin Bull.*, 1971, vol. 6, p. 42-46.

214. B. Chan. Recursive formulas for compound difference distributions. – *Trans. Soc. Actuar.*, 1984, vol. 36, p. 171-180.

215. F.-Y. Chan. On a family of aggregate claims distributions. – *Insurance: Math., Econom.*, 1984, vol. 3, No. 3, p. 151-155.

216. V. Čekanavičius. *Asymptotic expansions for compound Poisson approximation of the generalized Poisson binomial distribution.* – Preprint. Vilnius University, 1995, №10.

217. R. Collins. Actuarial application of Monte Carlo technique. – *Trans. Soc. Actuaries*, 1962, vol. 14, p. 365-384.

218. R. Consael. Sur les processes de Poisson du type composé. – *Académie Royale de Belgique, Bulletin, Classe de Sciences,* 5^{e} *Série*, 1952, vol. 38, p. 442-461.

219. R. Consael. Sur les processes composés de Poisson à deux variables aléatoires. – *Académie Royale de Belgique, Bulletin, Classe de Sciences, Mémoires*, 1952, vol. 27, No. 6, p. 4-43.

220. P. C. Consul. *Generalized Poisson Distributions.* Marcel Dekker, New York and Basel, 1989.

221. R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, D. E. Knuth. On the Lambert W function. – *Adv. Computational Maths*, 1996, vol. 5, p. 329-359.

222. D. R. Cox. Some statistical methods connected with series of events. – *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, 1955, vol. 17, p. 129-164.

223. H. Cramér. On the mathematical theory of risk. – in: *Skandia Jubilee Volume*, Stockholm, 1930.

224. H. Cramér. *Collective Risk Theory. Skandia Jubilee Volume*, Stockholm, 1955.

225. K. Croux and N. Veraverbeke. Nonparametric estimators for the probability of ruin. – *Insurance: Mathematics and Economics*, 1990, Vol. 9, p. 127-130.

226. C. D. Daykin, T. Pentikäinen and E. Pesonen. *Practical Risk Theory for Actuaries.* Chapman and Hall, London, 1994.

227. P. Deheuvels and D. Pfeifer. A semigroup approach to Poisson approximation. – *Annals of Probability*, 1986, vol. 14, p. 663-676.

228. P. Deheuvels and D. Pfeifer. Operator semigroups and Poisson convergence in selected metrics. – *Semigroup Forum*, 1986, vol. 34, p. 203-224.

229. P. Deheuvels and D. Pfeifer. Semigroups and Poisson approximation. – in: *New Perspectives in Theoretical and Applied Statistics.* Wiley, New York, 1987, p. 439-448.

230. P. Deheuvels and D. Pfeifer. Poisson approximation of multinomial distributions and point processes. – *J. Multivariate Analysis*, 1988, vol. 25, No. 1, p. 65-89.

231. P. Deheuvels, M. L. Puri and S. S. Ralescu. Asymptotic expansions for sums of nonidentically distributed Bernoulli random variables. – *J. Multivariate Analysis*, 1989, vol. 26, No. 2, p. 282-303.

232. P. Delaporte. Quelqes problémes de statistique mathématique posés par l'assurance automobile et le bonus pour non sinistre. – *Institute Actuaries Français Bulletin Trimestriel*, 1959, vol. 70, p. 87-102.

233. P. Delaporte. Un probléme de tarification de l'assurance accidents d'automobile examiné par la statistique mathématique. – in: *Trans. 16th Intern. Congress of Actuaries, Brussels*, 1960, vol. 2, p. 121-135.

234. F. Delbaen and J. M. Haezendonck. Classical risk theory in an economical environment. – *Insurance: Mathem., Econom.*, 1987, vol. 6, p. 85-116.

235. O. Deprez and H. U. Gerber. On convex principles of premium calculations. – *Insurance: Mathem., Econom.*, 1985, vol. 4, p. 179-189.

236. F. Eggenberger. Die wahrscheinlichkeidsanteckung. – *Mitt. Verein. Schweiz. Versich. Mathr.*, 1924, vol. 16, p. 31-143.

237. P. Embrechts and H.-P. Schmidli. *A general Insurance Risk Model.* ETH Preprint. Zurich, 1992.

238. P. Embrechts and N. Veraverbecke. Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. – *Insurance: Mathem., Econom.*, 1982, vol. 1, p. 55-72.

239. P. Embrechts, K. Klüppelberg and T. Mikosch. *Modeling Extremal Events.* Springer, Berlin–New York, 1998.

240. G. Englund. A remainder term estimate in a random-sum central limit theorem. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1983, т. 28, вып. 1, с. 143-149.

241. F. Esscher. On the probability function in the collective theory of risk. – *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1932, vol. 15, p. 175-195.

242. C.-G. Esseen. On the Liapunoff limit of error in the theory of probability. – *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 1942, vol. A28, No. 9, p. 1-19.

243. C.-G. Esseen. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law. – *Acta Math.*, 1945, vol. 77, p. 1-125.

244. C.-G. Esseen. A moment inequality with an application to the central limit theorem. – *Skand. Aktuarietidskr.*, 1956, vol. 39, p. 160-170.

245. R. A. Fisher, A. S. Corbet and C. B. Williams. The relation between the number of species and the number of individuals. – *J. Animal Ecology*, 1943, vol. 12, p. 12-20.

246. H. U. Gerber. Martingales in risk theory. – *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherrungsmathematiker*, 1973, B. 73, S. 205-216.

247. H. U. Gerber. *An Introduction to Mathematical Risk Theory.* Wharton School University, Philadelphia, 1979.

248. H. U. Gerber. On the numerical evaluation of the distribution of aggregate claims and its stop-loss premiums. – *Insurance: Mathem., Econom.*, 1982, vol. 1, p. 13-18.

249. H. U. Gerber. Error bounds for the compound Poisson approximation. – *Insurance: Mathem., Econom.*, 1984, vol. 3, p. 191-194.

250. B. V. Gnedenko and V. Yu. Korolev. *Random Summation: Limit Theorems and Applications.* CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

251. A. V. Godambe. On representation of Poisson mixtures as Poisson sums and a characterization of the gamma distribution. – *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1977, vol. 82, p. 297-300.

252. C. M. Goldie. A class of infinitely divisible random variables. – *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1967, vol. 63, p. 1141-1143.

253. I. J. Good. The population frequencies of species and the estimation of population parameters. – *Biometrika*, 1953, vol. 40, p. 237-260.

254. M. J. Goovaerts and R. Kaas. Evaluating compound generalized Poisson distributions recursively. – *Astin Bulletin*, 1991, vol. 21, No. 2, p. 193-197.

255. M. J. Goovaerts, F. de Velger and J. Haezendonck. *Insurance Premiums. Theory and Applications.* North Holland, Amsterdam, 1984.

256. J. Grandell. A note on the behaviour of the "tail" of the mixture-Poisson distribution. – *Skand. AktuarTidskr.*, 1970, p. 76-77.

257. J. Grandell. *Doubly Stochastic Poisson Processes.* – Lecture Notes Math., vol. 529, 1976.

258. J. Grandell. Empirical bounds for ruin probabilities. – *Stoch. Processes Appl.*, 1979, vol. 8, p. 243-255.

259. J. Grandell. *Aspects of Risk Theory.* Springer, Berlin–New York, 1991.

260. J. Grandell. *Mixed Poisson Processes.* Chapman and Hall, London, 1997.

261. M. Greenwood and G. U. Yule. An inquiry into the nature of frequency-distributions of multiple happenings, etc. – *J. Roy. Statist. Soc.*, 1920, vol. 83, p. 255-279.

262. J. Gurland. Some interrelations among compound and generalized distributions. – *Biometrika*, 1957, vol. 44, p. 265-268.

263. J. Gurland. A generalized class of contagious distributions. – *Biometrics*, 1958, vol. 14, p. 229-249.

264. A. Gut. *Stopped Random Walks.* Springer, New York, 1988.

265. J. Haezendonck and M. J. Goovaerts. A new premium calculation principle based on Orlicz norms – *Insurance: Mathem., Econom.*, 1989, vol. 8, p. 261-267.

266. F. A. Haight. *Handbook of the Poisson Distribution.* Wiley, New York, 1967.

267. R. V. L. Hartley. Transmission of information. – *Bell Syst. Techn. Journal*, 1928, p. 535-.

268. C. C. Heyde. On the influence of moments on the rate of convergence to the normal distribution. – *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, 1967, Bd. 8, N. 1, S. 12-18.

269. C. Hipp. Approximations of aggregate claims distributions by compound Poisson distributions. – *Insurance: Mathem., Econom.*, 1985, vol. 4, p. 227-232.

270. C. Hipp. Improved approximations for the aggregate claims distribution in the individual model. – *Astin Bull.*, 1986, vol. 16, p. 89–100.

271. W. Hoeffding. Probability inequalities for sums of bounded random variables. – *J. Amer. Statist. Assoc.*, 1963, vol. 58, No. 301, p. 13–20.

272. M. S. Holla. On a Poisson-inverse Gaussian distribution. – *Metrika*, 1967, vol. 11, p. 115-121.

273. P. L. Hsu. The approximate distributions of the mean and variance of a sample of independent variables. – *Ann. Math. Statist.*, 1945, Vol. 16, No. 1, p. 1-29.

274. D. L. Iglehart. Diffusion approximations in collective risk theory. – *Journal of Applied Probability*, 1969, vol. 6, p. 285-292.

275. J. O. Irwin. The generalized Waring distribution applied to accident theory. – *J. Royal Statist. Soc., Ser. A*, 1968, vol. 130, p. 205-225.

276. J. O. Irwin. The generalized Waring distribution. – *J. Royal Statist. Soc., Ser. A*, 1975, vol. 138, p. 18-31, 204-227, 374-384.

277. W. S. Jewell and B. Sundt. Improved approximations for the distribution of a heterogeneous portfolio. – *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherrungsmathematiker*, 1981, B. 81, S. 221-240.

278. N. L. Johnson and S. Kotz. *Distributions in Statistics: Discrete Distributions.* Houghton Mifflin Comp., Boston, 1969.

279. N. L. Johnson, S. Kotz and A. W. Kemp. *Univariate Discrete Distributions.* Wiley, New York, 1992.

280. B. Jørgensen. Statistical properties of the generalized inverse Gaussian distribution. – *Lect. Notes Statist.*, vol. 9, 1982.

281. V. Kalashnikov. *Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1997.

282. V. Kalashnikov and G. Tsitsiashvili. Tails of waiting times and their bounds. – *Queueing Systems*, 1999, vol. 32, p. 257-283.

283. O. Kallenberg. Characterization and convergence of random measures and point processes. – *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 1973, B. 27, S. 9-21.

284. O. Kallenberg. Limits of compound and thinned point processes. – *J. Applied Prob.*, 1975, vol. 12, p. 269-278.

285. O. Kallenberg. *Random Measures.* 3rd ed. Akademie-Verlag, Berlin, and Academic Press, New York, 1983.

286. J. N. Kapur. *Maximum-Entropy Models in Science and Engineering.* – Wiley, New York, 1989.

287. T. R. Kashaev and V. Yu. Korolev. Natural estimates of the accuracy of the approximation of the distributions of random sums by location mixtures of stable laws. – *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, vol. 123, No. 1, p. 3741-3750.

288. L. Katz. Unified treatment of a broad class of discrete probability distributions. – in: *G. Patil (Ed.). Classical and Contagious Discrete Distributions.* Statistical Publishing Society/Pergamon Press, Calcutta/Oxford, 1965, p. 175-182.

289. M. G. Kendall. The analysis of economic time series: Part I, Prices. – *J. Royal Statist. Soc.*, 1953, vol. 96, p. 11-25.

290. A. W. Kemp and C. D. Kemp. Some properties of Hermite distribution. – *Biometrika*, 1965, vol. 52, p. 381-394.

291. J. Kerstan, K. Matthes and J. Mecke. *Infinitely Divisible Point Processes.* – Wiley, Chichester, 1978.

292. J. F. C. Kingman. On doubly stochastic Poisson processes. – *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1964, vol. 60, No. 4, p. 923-930.

293. B. Kling and M. J. Goovaerts. A note on compound generalized distributions. – *Scand. Actuar. J.*, 1993, p. 60-72.

294. P. Kornya. Distribution of aggregate claims in the individual risk theory model. – *Trans. Society of Actuaries.* 1983, vol. 35, p. 823-836.

295. V. Yu. Korolev. A general theorem on the limit behavior of superpositions of independent random processes with applications to Cox processes. – *Journal of Mathematical Sciences*, 1996, vol. 81, No. 5, p. 2951-2956.

296. V. Yu. Korolev and E. V. Kossova. On limit distributions of randomly indexed multidimensional random sequences with an operator normalization. – *Journal of Mathematical Sciences*, 1992, vol. 72, No. 1, p. 2915-2929.

297. V. Yu. Korolev and E. V. Kossova. Convergence of multidimensional random sequences with independent random indices. – *Journal of Mathematical Sciences*, 1995, vol. 76, No. 2, p. 2259-2268.

298. V. Yu. Korolev and A. A. Kudryavtsev. Limit theorems for generalized risk processes in Skorokhod space. – in: *Международная конференция "Колмогоров и современная математика" (Москва, 16-21 июня 2003 г.). Тезисы докладов*. Механико-математический факультет МГУ, Москва, 2003 г., с. 482-483.

299. V. Yu. Korolev and A. A. Kudryavtsev. Transfer theorem for generalized risk processes. – *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, vol. 119, No. 3, p. 303-306.

300. V. Yu. Korolev and A. A. Kudryavtsev. The asymptotic behavior of the reserve of an insurance company described by the generalized risk process. – *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, vol. 123, No. 1, p. 3751-3766.

301. V. Yu. Korolev and S. Ya. Shorgin. On the absolute constant in the remainder term estimate in the central limit theorem for Poisson random sums. – in: *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics*, Proceedings of the Fourth International Petrozavodsk Conference. VSP, Utrecht, 1997, p. 305-308.

302. V. Yu. Korolev and N. N. Skvortsova (Eds.) *Stochastic Models of Structural Plasma Turbulence*. VSP, Leiden–Boston, 2006.

303. V. M. Kruglov and A. N. Titov. Mixtures of probability distributions. – *Lect. Notes Math.*, 1988, v. 1233, p. 41–56.

304. J. Kupper. Some aspects of cumulative risk. – *Astin Bull.*, 1965, vol. 3, p. 85-103.

305. L. LeCam. An approximation theorem for the Poisson binomial distribution. – *Pacif. J. Math.*, 1960, vol. 19, No. 3, p. 1181-1197.

306. L. LeCam. On the distribution of sums of independent random variables. – in: *Bernoulli, Bayes, Laplace (anniversary volume)*. Springer, Berlin – Heidelberg – New York, 1965, p. 179-202.

307. H. Linhart and W. Zucchini. *Model Seclection*. Wiley, New York, 1986.

308. O. Lundberg. *On Random Processes and and their Application to Sickness and Accident Statistics*. Almqvist & Wiksell, Uppsala, 1964 (1st ed. 1940).

309. B. B. Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. – *J. Business*, 1963, vol. 36, p. 394-419.

310. B. B. Mandelbrot. The variation of some other speculative prices. – *J. Business*, 1967, vol. 40, p. 393-413.

311. G. Maruyama. On the Poisson distribution derived from independent random walks. – *Natur. Sci. Rep. Ochanomiza Univ.*, 1955, vol. 6, p. 1-6.

312. J. A. McFadden. The mixed Poisson processes. – *Sankhya, Ser. A*, 1965, vol. 27, p. 83-92.

313. J. Mecke. A characterization of mixed Poisson processes. – *Rev. Roumaine Math. Pures et Appl.*, 1976, vol. 21, p. 1355-1360.

314. P. Medgyessy. *Decomposition of Superpositions of Distribution Functions.* Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1961.

315. R. Michel. On Berry–Esseen results for the compound Poisson distribution. – *Insurance: Math. Econom.*, 1986, vol. 13, No. 1, p. 35–37.

316. R. Michel. An improved error bound for the compound Poisson approximation of a nearly homogeneous portfolio. – *Astin Bull.*, 1988, vol. 17, p. 165-169.

317. W. Molenaar. Approximations to the Poisson, binomial and hypergeometric distribution functions. – *Mathematical Centre Report*, Amsterdam, 1970.

318. F. Mosteller. On some useful "inefficient" statistics. – *Ann. Math. Stat.*, 1946, vol. 17, p. 377-408.

319. S. V. Nagaev. Large deviations of sums of independent random variables. – *Ann. Probab.*, 1979, v. 7, №5, p. 745–789.

320. K. Nawrotzki. Ein Grenzwertsatz für homogene zuffälige Punktfolgen. – *Math. Nachr.*, 1962, vol. 24, p. 201-217.

321. J. Neyman. On a new class of "contagious"distributions, applicable in entomology and bacteriology. – *Ann. Math. Statist.*, 1939, vol. 10, p. 35-57.

322. P. Ottestad. On certain compound frequency distribution. – *Skand. AktuarTidskr.*, 1944, p. 32-42.

323. H. Paditz. Über eine Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. – *Wiss. Z. Hochschule für Verkehswesen "Friedrich List"*. Dresden. 1986, B. 33, H. 2, S. 399-404.

324. L. Paditz. On the analytical structure of the constant in the nonuniform version of the Esseen inequality. – *Statistics* (Akademie–Verlag, Berlin), 1989, Vol. 20, No. 3, p. 453-464.

325. H. Paditz. On the error-bound in the nonuniform version of Esseen's inequality in the L_p-metric. – *Statistics*, 1996, vol. 27, p. 379-394.

326. A. Pakes. On the tails of waiting-time distributions. – *Journal of Applied Probability*, 1975, vol. 12, p. 555-564.

327. H. H. Panjer. The aggregate claims distribution and Stop-Loss reinsurance. – *Transactions of the Society of Actuaries*, 1980, vol. 32, p. 523-535.

328. H. H. Panjer. Recursive evaluation of a family of compound distributions. – *Astin Bull.*, 1981, vol. 12, p. 22-26.

329. H. H. Panjer and G. E. Willmot. *Insurance Risk Models*. The Society of Actuaries, Schaumburg, IL, 1992.

330. H. H. Panjer and G. E. Willmot. Computational techniques in reinsurance models – *Trans. XXII International Congress of Actuaries*. 1984, vol. 4, p. 111-120.

331. H. H. Panjer and G. E. Willmot. Computational aspects of recursive evaluation of compound distributions. – *Insurance: Math., Econom.*, 1986, vol. 5, p. 113-116.

332. D. Pfeifer. A semigroup setting for distance measures in connection with Poisson approximation. – *Semigroup Forum*, 1985, vol. 31, p. 199-203.

333. H. Pollaczek-Geiringer. Über die Poissonishe Verteilung und die Entwicklung willkürlicher Verteilungen. – *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1928, vol. 8, p. 292-309.

334. P. Praetz. The distribution of share prices changes. – *J. Business*, 1972, vol. 45, p. 49-55.

335. H. Prawitz. Limits for a distribution, if the characteristic function is given in a finite domain. – *Skand. AktuarTidskr.*, 1972, p. 138-154.

336. N. de Pril. On the exact computation of the aggregate claims distribution in the individual life model. – *Astin Bull.*, 1986, vol. 16, p. 109-112.

337. N. de Pril. The aggregate claims distribution in the individual model with arbitrary positive claims. – *Astin Bull.*, 1989, vol. 19, p. 9-24.

338. P. S. Puri and C. M. Goldie. Poisson mixtures and quasi-infinite divisibility of distributions. – *J. Appl. Probab.*, 1979, vol. 16, p. 138-153.

339. H.-J. Rossberg and G. Siegel. Die Bedeutung von Kingmans Integralunggleichungen bei der Approximation der stationären Wartezeitverteilung im Modell GI|G|1 mit und ohne Verzögerung beim Beginn einer Beschäftigungsperiode. – *Math. Operationsforsh. Statist.*, 1974, B. 5, S. 687-699.

340. M. H. Quenouille. A relation between the logarithmic, Poisson and negative binomial series. – *Biometrics*, 1949, vol. 5, p. 162-164.

341. W. Quinkert. *Die kollektive Risikotheorie unter Berücksichtigung schwankender Grundwahrscheinlichkeiten mit endlichen Schwankungsbereich*. Diss. University of Cologne, Cologne, 1957.

342. P. S. Puri and C. M. Goldie. Poisson mixtures and quasi-infinite divisibility of distributions. – *J. Appl. Probab.*, 1979, vol. 16, p. 138-153.

343. A. Rényi. A poisson-folyamat egy jellemzese. – *Magyar tud. acad. Mat. Kutato int. Közl.*, 1956, vol. 1, No. 4, p. 519-527.

344. A. Rényi. On an extremal property of the Poisson process. – *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 1964, vol. 16, p. 129-133.

345. T. Rolski, H.-P. Schmidli, V. Schmidt and J. Teugels. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley, Chichester, 1999.

346. H. Rootzén. *A Note on the Central Limit Theorem for Doubly Stochastic Poisson Processes*, Techn. Report, The University of North Carolina, 1975.

347. H. Rootzén. A note on the central limit theorem for doubly stochastic Poisson processes. – *Journal of Applied Probability*, 1976, vol. 13, No. 4, p. 809-813.

348. M. Ruohonen. On a model for the claim number process. – *Astin Bull.*, 1988, vol. 18, p. 57-68.

349. G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu. *Stable Non-Gaussian Random Processes, Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapman and Hall, New York, 1994.

350. K. J. Schröter. On a family of counting distributions and recursions for related compound distributions. – *Scand. Actuar. J.*, 1990, p. 161-195.

351. H. Seal. *Survival Probabilities. The Goal of Risk Theory.* Wiley, Chichester – New York – Brisbane – Toronto, 1978.

352. H. Seal. *Stochastic Theory of a Risk Business.* Wiley, New York, 1969.

353. C.-O. Segerdahl. When does ruin occur in the collective theory of risk. – *Scand. Actuarial J.*, 1955, p. 22-36.

354. V. V. Senatov. *Normal Approximation: New Results, Methods and Problems*. VSP, Utrecht, 1998.

355. S. Ya. Shorgin. Asymptotic analysis of an individual risk model with random insurance premiums. – *J. Math. Sciences*, 1996, vol. 81, No. 5, p. 3000-3004.

356. S. Ya. Shorgin. Conditions of the existence of arithmetic random variables with given two moments. – In: *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics*, Proceedings of the Fourth International Petrozavodsk Conference. VSP, Utrecht, 1997.

357. S. Ya. Shorgin. Asymptotic estimates of insurance tariffs in the individual risk model. – *J. Math. Sciences*, 1998, vol. 89, No. 5, p. 1559-1569.

358. S. Ya. Shorgin. Exponential bounds for generalized Poisson distributions. – *J. Math. Sciences*, 1998, vol. 91, No. 3, p. 2984-2989.

359. S. Ya. Shorgin. Guaranteed bounds for insurance premium rates for the insurance portfolio of factorizable claims. – *J. Math. Sciences*, 1999, vol. 93, No. 4, p. 582-590.

360. H. S. Sichel. On a family of discrete distributions particular suited to represent long tailed frequency data. – in: *Proc. 3rd Symp. on Mathematical Statistics*. Ed. by N. F. Laubscher. CSIR, Pretoria, 1971, p. 51-97.

361. H. S. Sichel. On a distribution representing sentence-length in written prose. – *J. Roy. Statist. Soc., Ser. A*, 1974, vol. 137, p. 25-34.

362. H. S. Sichel. On a distribution law for word frequencies. – *J. Amer. Statist. Assoc.*, 1975, vol. 70, p. 542-547.

363. J. G. Skellam. Studies in statistical ecology. I. Spatial pattern. – *Biometrika*, 1952, vol. 39, p. 346-362.

364. A. J. Stam. Regular variation of the tail of a subordinated probability distribution. – *Adv. Appl. Probab.*, 1973, vol. 5, p. 308-327.

365. C. Stone. On a theorem of Dobrushin. – *Ann. Math. Stat.*, 1968, vol. 39, p. 1391-1401.

366. B. Stroter. The numerical evaluation of the aggregate claim density function via integral evaluation. – *Blätter der Deutche Gesselschaft für Versicherungsmathematik*, 1985, B. 17, S. 1-14.

367. Student. On the probable error of the mean. – *Biometrica*, 1908, vol. 8, No. 1.

368. B. Sundt and W. Jewell. Further results on recursive evaluation of compound distributions. – *Astin Bulletin*, 1981, vol. 12, p. 27-39.

369. B. Sundt. On some extensions of Panjer's class of counting distributions. – *Astin Bulletin*, 1992, vol. 22, No. 1, p. 61-80.

370. K. Takano. A remark to a result of A. C. Berry. – *Res. Mem. Inst. Math.*, 1951, vol. 9, No. 6, p. 4.08-4.15.

371. G. M. Tallis. The identifiability of mixtures of distributions. – *Journal of Applied Probability*, 1969, vol. 6, No. 2, p. 389-398.

372. H. Teicher. Identifiability of mixtures. – *Ann. Math. Stat.*, 1961, vol. 32, p. 244-248.

373. H. Teicher. Identifiability of finite mixtures. – *Ann. Math. Stat.*, 1963, vol. 34, No. 4, p. 1265-1269.

374. J. L. Teugels. *Selected Topics in Insurance Mathematics*. University of Leuven, Belgium, 1985.

375. T. Thedéen. A note on the Poisson tendency in traffic distribution. – *Ann. Math. Statist.*, 1964, vol. 35, p. 1823-1824.

376. O. Thorin. Some remarks on the ruin problem in case the epochs of claims form a renewal process. – *Scand. Actuarial J.*, 1970, p. 29-50.

377. O. Thorin. Further remarks on the ruin problem in case the epochs of claims form a renewal process. – *Scand. Actuarial J.*, 1971, p. 14-38, p. 121-142.

378. D. M. Titterington, A. F. Smith and U. E. Makov. *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*. John Wiley and Sons, Chichester–New York–Brisbane–Toronto–Singapore, 1987.

379. C. Tsallis, A. M. C. de Souza and R. Maynard. Derivation of Lévy-type anomalous superdiffusion from general statistical mechanics. – in: M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky and U. Frisch (Eds.) *Lévy Flights and Related Topics in Physics*. Springer, Berlin, 1995, p. 269-289.

380. H. G. Tucker. Convolutions of distributions attracted to stable laws. – *Ann. Math. Statist.*, 1968, vol. 39, p. 1381-1390.

381. W. Tysiak. *Gleichmäßige und nicht-gleichmäßige Berry–Esseen–Abschätzungen*. Dissertation, Wuppertal, 1983.

382. N. G. Ushakov. *Selected Topics in Characteristic Functions*. VSP, Utrecht, 1999.

383. P. van Beek. *Fourier-analytische Methoden zur Verscharfung der Berry–Esseen Schranke*. – Doctoral dissertation, Friedrich Wilhelms Universitat, Bonn, 1971.

384. P. van Beek. An application of Fourier methods to the problem of sharpening the Berry–Esseen inequality. – *Z. Wahrsch. verw. Geb.*, 1972, Bd. 23, s. 187-196.

385. R. von Chossy and G. Rappl. Some approximation methods for the distribution of random sums. – *Insurance: Mathematics and Economics.* 1983, vol. 2, p. 251-270.

386. F. de Vylder. A practical solution to the problem of ultimate ruin probability. – *Scandinavian Actuarial Journal*, 1978, p. 114-119.

387. D. L. Wallace. Asymptotic approximations to distributions. – *Ann. Math. Statist.*, 1958, Vol. 29, p. 635-654.

388. E. Waymire and V. K. Gupta. An analysis of the Polya point process. – *Adv. Appl. Probab*, 1983, vol. 15, p. 39-53.

389. G. E. Willmot. Mixed compound Poisson distributions. – *Astin Bull.*, vol. 16S, p. S59-S79.

390. G. E. Willmot. The Poisson–inverse Gaussian distribution as an alternative to the negative binomial. – *Scandinavian Actuar. J.*, 1987, p. 113-127.

391. G. E. Willmot. Sundt and Jewell's family of discrete distributions. – *Astin Bulletin*, 1988, vol. 18, No. 1, p. 17-29.

392. G. E. Willmot. Asymptotic tail behaviour of Poisson mixtures with applications. – *Adv. Appl. Probab.*, 1990, vol. 22, p. 147-159.

393. G. E. Willmot and H. Panjer. Difference equation approaches in evaluation of compound distributions. – *Insurance: Math. Econom.*, 1987, vol. 6, No. 1, p. 43-56.

394. S. J. Yakowitz and J. D. Spragins. On the identifiability of finite mixtures. – *Ann. Math. Statistics*, 1968, vol. 39, p. 209-214.

395. V. M. Zolotarev. A sharpening of the inequality of Berry–Esseen. – *Z. Wahrsch. verw. Geb.*, 1967, Bd. 8, s. 332-342.